Az optimális méretezés műszaki alkalmazásai

Technical applications of optimal design

Dr. TIMÁR Imre[1], Dr. HORVÁTH Pál[2]

[1]Pannon Egyetem, H-8200 Veszprém, Egyetem u. 10.
tel.: +36 88 624 462 timar.imre@mk.uni-pannon.hu, https://uni-pannon.hu/
[2]Pannon Egyetem, H-8200 Veszprém, Egyetem u. 10.
tel.: +36 88 624 462 horath.pal@mk.uni-pannon.hu, https://uni-pannon.hu/

Abstract

An effective method for reducing material, energy and costs is the technical application of optimal sizing. We present the essence of the method and the types of technical optimization problems, which can be the following: topology optimization, shape optimization, material optimization, geometric size optimization and optimization of technological parameters. We present some optimization problems and their solutions.

Keywords: optimization, differential calculus, optimization methods

Kivonat

Az anyag-, energia- és a költségek csökkentésének hatékony módszere az optimális méretezés műszaki alkalmazása. Bemutatjuk a módszer lényegét és a műszaki optimálási problémák csoportosítását, melyek a következők lehetnek: topológiai optimálás, alakoptimálás, anyagoptimálás, geometriai méretoptimálás és technológiai paraméterek optimálása. Ismertetünk néhány optimálási problémát és annak megoldását.

Kulcsszavak: optimálás, differenciálszámítás, optimálási módszerek

1. BEVEZETÉS

Az anyag-, energia-, gyártási és üzemeltetési költségek növekedése szükségessé, a numerikus módszerek fejlődése pedig lehetővé tette az optimális méretezési módszerek széleskörű alkalmazását a műszaki gyakorlatban. E módszerek segítségével elérhető, hogy a különböző konstrukciók, rendszerek stb. ne csak kielégítsék a velük szemben támasztott követelményeket, hanem lehetőséget nyújtsanak a költségek csökkentésére is. Az optimális méretezés elterjedésének kezdeti szakaszában a szerkezet tömegét ill. térfogatát igyekeztek csökkenteni, majd később a problémákat a költségek irányából közelítették meg. A tömeg csökkentésére vonatkozóan a természetben sajátos példákat találunk. Nevezetesen a fák ágai az elágazási helyeken a legvastagabbak, mivel a hajlító nyomaték és a nyíróerő értéke ott a legnagyobb. Hasonlóképpen a jégcsap keresztmetszete a teljes húzóerőt felvevő keresztmetszetben a legnagyobb.

Az optimális méretezési módszerek eredményes műszaki alkalmazásához ismerni kell a matematikai módszereket és tisztában kell lenni a feladat műszaki tartalmával. Ennek megfelelően először röviden áttekintjük a matematikai alapokat, majd különböző műszaki alkalmazásokkal ismerkedünk meg.

2. AZ OPTIMÁLÁS ÁLTALÁNOS MEGFOGALMAZÁSA

Az optimálás érdekében először meg kell választani azokat a paramétereket, geometriai méreteket stb., melyeket ismeretleneknek tekintünk. Ezen ismeretlenek alkotják a változók halmazát és összességüket a következőképpen jelöljük: $\underline{\mathbf{x}}=[x_1, x_2, \ldots,x_n]^T$, ahol n az ismeretlenek száma. Ezt követően meg kell fogalmazni a célfüggvényt, $f(\underline{\mathbf{x}})$-et, ami lehet a szerkezet tömege, térfogata, költsége (beleértve az anyag-, gyártási-, üzemeltetési stb. költségeket). A célfüggvényhez kapcsolódóan meg kell fogalmazni azokat a feltételeket, melyeket az adott szerkezetnek, rendszernek üzemelés során ki kell elégítenie. A korlátozási feltételek lehetnek egyenlőtlenségek ($g_j(\underline{\mathbf{x}})$), ill. egyenlőségek ($h_j(\underline{\mathbf{x}})$). A korlátozások vonatkozhatnak a maximális feszültségekre, alakváltozásokra, felületi hőmérsékletre stb. A fentiekben vázolt feladat matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy meg kell határozni a többváltozós függvény minimumát úgy, hogy a kapott megoldás elégítse ki a megfogalmazott korlátozási feltételeket:

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$0 \le g_j(\underline{\mathbf{x}}),\ \ j=1,2,\ldots,m; \tag{1}$$

$$0 = h_j(\underline{\mathbf{x}}),\quad j=m+1,\ldots,p.$$

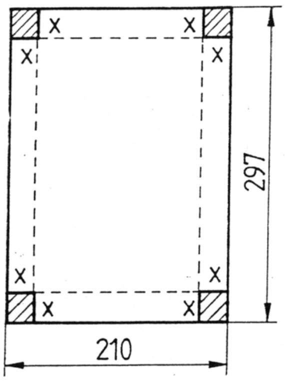
A fenti függvények lehetnek lineárisak, nem lineárisak ill. speciális típusúak. Előfordul, hogy hiányoznak az egyenlőségi ill. az egyenlőtlenségi korlátozások, vagy mindkettő. A változók száma tetszőleges lehet. Ennek megfelelően különböző optimálási feladatokkal állunk szemben, melyek megoldása sokszor nehézségekbe ütközik. A matematikai optimálási módszerek lényegében az (1) alatt megfogalmazott feladat megoldásához kapcsolódnak.

3. A DIFFERENCIÁL SZÁMÍTÁSON ALAPULÓ MÓDSZEREK

E módszert Newton (1643-1727) és Leibniz (1646-1716) alapozta meg. Ők egymástól függetlenül egyidejűleg dolgozták ki a differenciálszámítás alapjait. Ezáltal lehetőség nyílt a korlátozások nélküli egy- ill. többváltozós függvények szélsőértékének meghatározására és számos egyszerűbb optimálási probléma megoldására. Közülük egy olyan szemléletes feladatot mutatunk be, ami segíti az optimálás lényegének megértését.

Feladatunk, hogy egy A4-es lap (210x297 mm) minden sarkából vágjunk ki egy $x{\cdot}x$ méretű négyzetlapot, majd a megmaradt síkidomból az oldalak felhajtásával készítsünk egy nyitott dobozt (*1. ábra*). Látható, hogy végtelen sok megoldás létezik, de feladatunk az, hogy a doboz térfogata (V) legyen maximális [1]. térfogat

$$(x)=(297-2x)(210-2x)x=4x3-1014x2+62370x. \tag{2}$$



1. ábra. *A doboz terítéke*

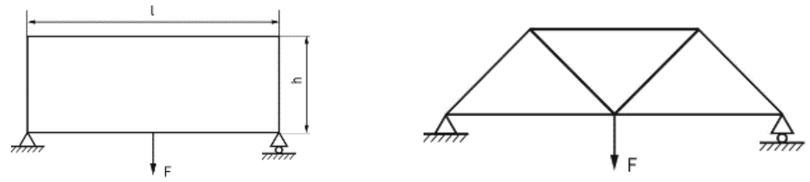
Könnyen belátható, hogy a V(**x**) függvény maximumának helye megegyezik az f(**x**) =V(**x**) függvény minimumának értékével. A szélsőérték (minimum) létezésének szükséges feltétele, hogy az f(**x**) függvény deriváltja legyen zérus

$$f'(\mathbf{x})=-12x^2+2028x-62370=0.$$

A másodfokú egyenlet megoldása révén két értéket kapunk: x_1=40,423 mm; x_2=128,577 mm. Az eredményekből látható, hogy gyakorlatilag csak az x_1 méretű kivágás valósítható meg. (A függvény deriváltjának vizsgálatával ellenőrizhető, hogy valóban létezik szélsőérték). Az x_1 értéknek a V(**x**) függvénybe helyettesítése után megkapjuk a doboz maximális térfogatát V_{max} = 1128495,1 mm^3.

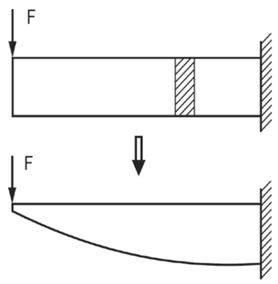
4. AZ OPTIMÁLÁS MŰSZAKI ALKALMAZÁSAI

Az optimális méretezés matematikai módszereinek célirányos alkalmazásával elérhető, hogy a különböző konstrukciók, termékek, ne csak kielégítsék a velük szemben támasztott műszaki követelményeket, hanem egyúttal gazdaságosak is legyenek. Az optimális méretezés öt alapvető területe a topológiai optimálás, az alakoptimálás, az méretoptimálás, az anyagoptimálás és a technológiai paraméterek optimálása.



2. ábra. *Topológiai optimálás*

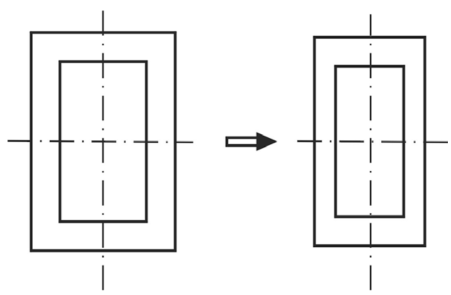
A topológiai optimálás módszereivel a szerkezet térbeli elhelyezkedését lehet meghatározni. Ennek során a rendelkezésre álló teret úgy kell kitölteni a megfelelő szerkezeti elemekkel, hogy a konstrukció valamilyen szempontból optimális legyen. A topológiai optimálást szerkezeti elrendezés optimálásra és általános alakoptimálásra lehet bontani. Az elrendezés optimálás általában a rácsos szerkezetekre jellemző, A végeselemes bázison alapuló topológiai optimálás a 80-as évek kezdetén indult meg. A topológiai optimálás lehetővé teszi a tervezési folyamat lerövidítését. A topológiai optimálás a szerkezetoptimálás bonyolult és gyorsan fejlődő terület.



3. ábra *Az alakoptimálás*

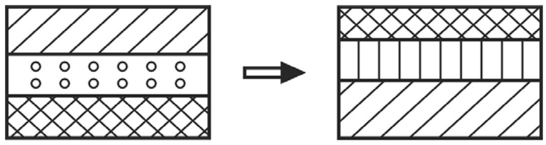
Az alakoptimálás célja, hogy segítségével meghatározzuk egy adott szerkezeti elemnek a követelményekhez igazodó optimális alakját (pl. a jégcsap keresztmetszete igazodik a fellépő húzóerőhöz). Az alakoptimálás kezdetén definiálni kell a kiinduló geometriát. A geometria megadása többféleképpen lehetséges: történhet egy összetett optimáló programrendszer segítségével, vagy a topológiai optimálás eredményeként adódik az alakoptimáláshoz szükséges kiinduló geometria. Ennek megfelelően a topológiai és az alakoptimálás gyakran nem különül el egymástól, hanem egységes tervezési folyamatot alkot. A kiinduló geometria adódhat még valamilyen CAD-program segítségével is, majd ennek felhasználásával jön létre az optimális alak. Számos esetben valamilyen függvénnyel is leírható a kiinduló geometria vagy definiálni kell azt a teret, melyből az optimálás kiindul.

Az optimális méretezés kezdeti szakaszában főként a *geometriai méretek optimálásával* kapcsolatos problémákat oldották meg. Valamely keresztmetszet vagy szerkezet geometriai méreteit úgy igyekeztek csökkenteni, hogy annak tömege vagy költsége minimális legyen. A geometriai méretek optimálásával számos esetben jelentős anyag ill. költségmegtakarítást értek el.



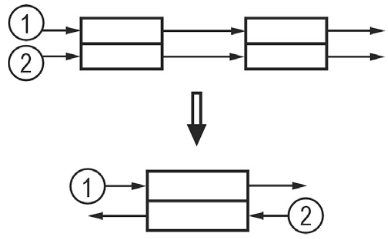
4. ábra. *Geometriai méretek optimálása*

Az anyagoptimálás célja az anyag szerkezeti felépítésének módosítása úgy, hogy kielégítse a vele szemben támasztott követelményeket. A kompozit és szálerősítéses anyagok kiváló lehetőséget nyújtanak a szerkezeti felépítés optimálására. A szálerősítéses anyagoknál például a szálak térbeli elrendezésének változtatásával lehet a szerkezet tulajdonságait módosítani.



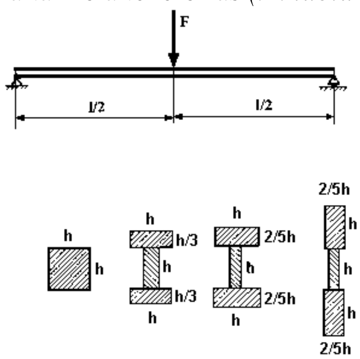
5. ábra. *Az anyagoptimálás*

Technológia paraméterek optimálása alapvetően a folyamatokra jellemző paraméterek (hőmérséklet, nyomás, áramlási sebességek stb.) optimálását jelenti. A 6. ábrán egy egyenáramú hőcserélő ellenáramúvá alakításának lehetséges modellje látható.



6. ábra. *Technológia paraméterek optimálása (hőcserélő)*

A megfogalmazott szempontok mellett, léteznek olyan konstrukciós megoldások, melyek gazdaságosabb anyagkihasználást tesznek lehetővé *(7. ábra*) és így növelhető a szerkezet teherbírása. Az ábrán látható egy *h x h* keresztmetszetű csuklós kéttámaszú tartót középen F erő terheli. A tartó igénybevétele hajlítás és nyírás (az utóbbit elhanyagoljuk). A hajlításból a tartó közepén, a szélső szálban σ_{max}=M_h/K feszültség ébred, ahol, M_h a hajlító nyomaték, *K* a keresztmetszeti tényező. A tartó anyagának jobb kihasználása érdekében megkívánjuk, hogy a szélső szálban a maximális feszültség éppen az anyag megengedett feszültségével (σ_m) legyen egyenlő. Ezt az esetet tekintjük kiindulási állapotnak. Amennyiben a keresztmeszet területét változatlannak tekintjük, de az alakját változtatjuk. akkor a keresztmetszeti tényező növekszik és ezáltal nő a teherbírás *(.1. táblázat).*



7. ábra. *A teherbírás növekedése a keresztmetszet alakjának változtatásával*

A tartó teherbírásának növekedése a keresztmetszet alakjának változtatásakor 1. táblázat

Keresztmetszet	**Teherbírás növekedés az első változathoz viszonyítva**
első változat	1
második	2,378
harmadik	2,795
negyedik	3,533

A fenti példa mutatja, hogy a mechanikai ismeretekre alapozva el lehet érni az anyag jobb kihasználását és ezáltal gazdaságosabb szerkezetet kapunk. Ha e gondolatmenetet tovább folytatjuk, akkor eljutunk az egyenszilárdságú tartókhoz, melyeket különböző terhelések esetén bizonyos értelemben „optimális" alakúra tervezhetünk.

A következő fejezetrészben áttekintjük, hogy a műszaki optimálási problémát miként lehet általánosan megfogalmazni.

5. A SZERKEZETOTIMÁLÁS FELOSZTÁSA

A szerkezetoptimálást az ún. szerkezetszintézist három fő szakaszra bonthatjuk.

1. A mérnöki-tervezői előkészítő fázis (analízis):

- az anyagok, a szerkezettípus, a gyártástechnológia megválasztása; a korlátozási (méretezési) feltételek megfogalmazása a kutatási eredmények és előírások alapján; a célfüggvény felépítése.

2. Matematikai munkafázis:

- a célfüggvény minimumának meghatározása a korlátozási feltételek figyelembevételével.

3. Mérnöki-tervezői értékelő, feldolgozó fázis:

- érzékenység vizsgálat, méretezési diagramok kidolgozása, beépítés magasabb szintű rendszerekbe.

Az érzékenység vizsgálat azért fontos, mert az optimálás során a kapott eredményeket gyakran kerekíteni kell és emiatt eltérünk az optimális értékektől. Az érzékenység vizsgálat során meg kell vizsgálni, hogy a célfüggvény minimuma mennyire érzékeny a változók esetleges módosítására.

6. A SUMT MÓDSZER

Az optimális méretezés SUMT módszerét *(Sequential Uncponstrtaoned Minimization Technique)* először hazánkban a Miskolci Egyetemen Farkas József professzor úrral alkalmaztuk szerkezetoptimálási feladatok A modern szerkezetoptimálás terén az első átfogó munka Schmit nevéhez fűződik, aki a matematikai programozási módszert nemlineáris egyenlőtlenségi korlátozások esetén rugalmas szerkezetek méretezésére alkalmazta bonyolult terhelési feltételek mellett. Ki kell emelni még azt is, hogy ez a tárgyalásmód új tervezési filozófiát honosított meg a mérnöki gyakorlatban és hozzájárult ahhoz, hogy a végeselemes analízis és a nemlineáris programozás meghonosodjon az automatizált optimális méretezésben. A nemlineáris optimálás erőteljes fejlődésnek indult amikor Caroll tanulmánya alapján Fiacco és McCormick [2] kifejlesztette a szekvenciális feltétel nélküli minimálás módszerét (a SUMT-módszert). Lényege, hogy az (1) alatti feltételes szélsőérték feladatot egy P($\underline{\mathbf{x}}$,r_k) függvény sorozatos feltétel nélküli szélsőérték feladataira alakította át.

$$P(\underline{x}, r_k) = f(\underline{x}) - r_k \sum_{j=1}^{m} \ln g_j(\underline{x}) + r_k^{-1} \sum_{j=m+1}^{p} \left\{\min\left[0, h_j(\underline{x})\right]\right\}^2, \tag{3}$$

ahol az r_k paraméter kezdő értékétől (r_1-től), illetve csökkenésének mértékétől függ a konvergencia sebessége. Az r_k értéke a számítás során monoton csökken

$$r_1 > r_2 \ldots > 0; \qquad r_{k+1} = r_k / c; \qquad c > 1, \tag{4}$$

ahol c állandó.

$$\lim_{r_k \to 0} [\min P(\underline{x}, r_k)] = \min f(x). \tag{5}$$

Kimutatható, hogy $r_k \to 0$ esetén a feltétel nélküli függvényminimumok sorozata az eredeti f($\underline{\mathbf{x}}$) függvény feltételes szélsőértékéhez tart.

7. HEURISZTIKUS ALGORITMUSOK

A heurisztikus algoritmusok működési elve valamilyen természeti jelenség megfigyelésén alapszik. A különböző élőlények adott helyzetben való viselkedéséből kiindulva dolgozták ki az algoritmusokat. Közülük most néhányat ismertetünk [3].

A Particle Swarm algoritmust (PSO) 1995-ben dolgozták ki és az egyik legígéretesebb metaheurisztikus optimáló algoritmus. Működését a madár és halrajok táplálékkereső mozgásának leírása ösztönözte. A működés véletlenszerű kiindulási pontokban elhelyezkedő adott számú részecske létrehozásával indul. A részecskék a problématérben az egyre jobb megoldást eredményező helyek felé mozognak és a csapatot a legjobb egyedek vezetik. A baktériumok táplálkozásán alapuló algoritmust (Bacterial Foraging – BA) először

2002-ben írták le és az un. rajintelligencia elvén működik. A rajintelligencia módszerek közös tulajdonsága, hogy nagyszámú homogén egyed viselkedésmintáit másolják. Az alapelv szerint lehetséges, hogy egy individuális egyed nem képes megoldani az adott feladatot, azonban, ha nagyszámú egyed csoportot alkot, akkor a csoport kollektív intelligenciája elég lehet a feladat sikeres megoldásához. A Firefly (FF) vagy szentjánosbogár algoritmust 2009-ben dolgozták ki. Működési elve a szentjánosbogár-féléktől származik, mely rovarok speciális fénykibocsátásuk segítségével találják meg egymást. Minél jobb megoldást talál az egyed, annál erősebb fényt bocsát ki, ami az adott területre vonzza a csoport többi tagját. A hangyakolónia (Ant Colony) algoritmus a hangyakolóniák táplálkozásának megfigyelésén és leírásán alapszik. A rendszertelen útvonal keresés a táplálék megtaláása után a feronom nyomok lerakása következtében rendszerezetté válik.

ÖSSZEFOGLALÁS

Bemutattuk az optimális méretezés általános megfogalmazását, majd a differenciál számításán alapuló optimálás lehetőségé, Ezt követen ismertettük a műszaki optimálási feladatokat. Tárgyaltuk a hazánkban először alkalmazott nemlineáris optimálási módszert és kitétünk a heurisztikus algoritmusokra.

IRODALOM

[1] Timár, I.: Az optimális méretezés műszaki alkalmazásai. Terminológia. Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság. Kolozsvár, 2002. p.: 3-20

[2] Fiacco, A. V., McCormick, G. P.: Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques. Wiley, New York, 1968.

[3] Marcsák, G. Z., Jármai, K.: Feltételes szerkezetoptimálási feladatok megoldása heurisztikus módszerekkel. Gép, 2014, No. 5, p.: 25-32.