

Emberi egyensúlyozás vizsgálata egyensúlyozó deszkán linearizált mechanikai modell és a MID tulajdonság felhasználásával

Investigation of Human Balancing on a Balance Board Using a Linearized Mechanical Model and the MID Property

RICHLIK Róbert^{1,2}, PhD hallgató, *Dr. INSPERGER Tamás*^{1,2}, egyetemi tanár

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék, H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.; robert.richlik@mm.bme.hu, insperger@mm.bme.hu

²HUN-REN-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport, Budapest.

Abstract

The objective of our research is to achieve a deeper understanding of human balance through the formulation of the equations of motion of suitable mechanical models. In the present work, we derived the linearized equation of motion of human balancing on a balance board. Using the MID property, we investigated the influence of the physical parameters of the board (radius and height) on the admissible neural time delay required for maintaining balance. The calculations provide an approximation of the stability limits of balancing capability for test subjects with known reaction times.

Keywords: human balancing, PD controller, MID property, reaction time, inverted pendulum

Kivonat

Kutatásunk célja az emberi egyensúlyozás mélyebb megértése megfelelő mechanikai modellek mozgásegyenleteinek felírásán keresztül. Jelen munkánkban egyensúlyozó deszkán való emberi egyensúlyozás linearizált mozgásegyenletét határoztuk meg. A MID tulajdonság felhasználásával vizsgáltuk a deszka fizikai paramétereinek (deszka sugara, magassága) hatását a deszkán való egyensúlyozáshoz szükséges emberi reakcióidőkésés tekintetében. A számítások ismert reakció idejű mérési alanyok egyensúlyozó képességeinek határait ad becslést.

Kulcsszavak: emberi egyensúlyozás, PD szabályozó, MID tulajdonság, reakcióidő, inverz inga

1. BEVEZETÉS

Az emberi egyensúlyozás egy rendkívül komplex biomechanikai feladat, amely az emberi idegrendszer és izmok gyors, összehangolt együttműködését igényli. Mozgásszervi és/vagy idegrendszeri károsodást okozó baleseteket, betegségeket követően a gyógyulás támogatására gyakran alkalmaznak rehabilitációs eszközöket. Egyik legismertebb ilyen eszközök az egyensúlyozó deszkák, amelyek kifejezetten támogatják a motorikus képességek fejlődését, illetve erősítik a lábak ízületeit, mélyizomzatát. Ezen okokból kifolyólag élsportolók edzésterveiben is alkalmazzák őket.

Jelen tanulmány a hagyományos egyensúlyozó deszkán történő emberi egyensúlyozás vizsgálatával foglalkozik. Az emberi testet egyszerűsített módon egy inverz ingaként közelítjük. Az emberi idegrendszer működését egy időkéleltetett PD szabályozóval vesszük figyelembe a modellben. A bokának az izmok, ínák és egyéb szövetek természetes merevségéből származó passzív ellenállását egy torziós rugóval modellezzük. Egy két szabadsági fokú (2 DoF) modellt vizsgálunk, ahol az egyik szabadsági fok a deszka billenési szöge, a másik szabadsági fok pedig az emberi test, mint inverz inga szögkitérése.

Célunk az egyensúlyozó deszka különböző konfigurációinak esetében közelítést adni arról, hogy milyen reakcióidejű embereknek van esélye sikeresen végrehajtani az adott egyensúlyozási feladatot. Ezzel egyfajta támpontot, térképet nyújtva, hogy az adott deszka sugár, deszka magasság beállítások milyen fizikai állapotban lévő alanyok esetében alkalmazhatók sikeresen, biztonságosan. Az eredmények kiszámításához,

ábrázolásához MATLAB szoftvert használtunk, a mechanikai modellek megrajzolása GeoGebra szoftverben történt. Az eredményeket különböző bokamerevségi adatok mellett is kirajzoltuk, ezzel széles spektrumon megadva a linearizált rendszer viselkedését.

2. MECHANIKAI MODELL

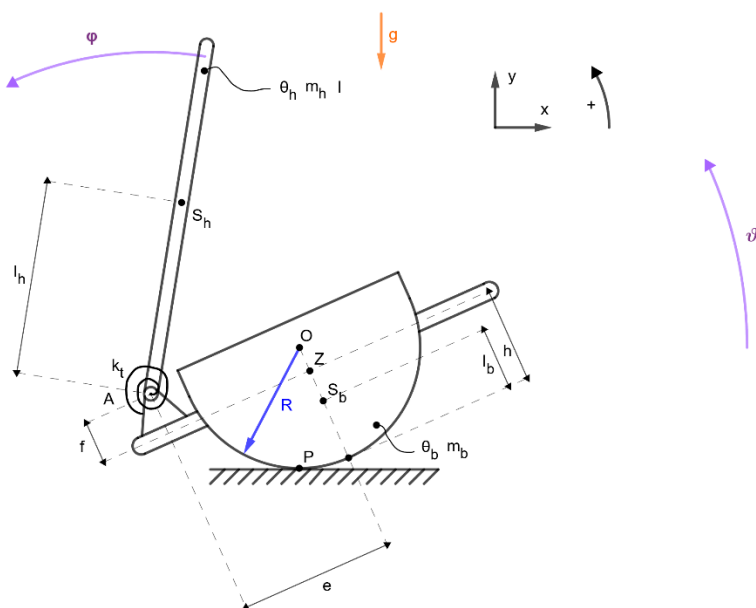
Az egyensúlyozó deszkán egyensúlyozó ember feladatáról egy 2 DoF (két szabadságfokú) modellt alkotunk [3], [4], [5], melynek legfontosabb paraméterei az l azaz az emberi test magassága, l_h ami az ember súlypontjának magasságát jelöli a bokához képest, m_h az emberi test tömege, θ_h az emberi test súlypontjára számított tehetetlensége, k_t a bokamerevség, f a boka magasság, e a deszka szimmetriatengelyének és a bokának a távolsága, l_b a deszka súlypontjának magassága, h a deszka magasság, R a deszka sugara, m_b a deszka tömege, θ_b a deszka súlypontjára vett tehetetlenségi nyomatéka. A két szabadsági fokhoz tartozó általános koordinátáknak a következőket választottuk: φ az emberi test szögének abszolút rendszerben vett koordinátája, és ϑ a deszka billenési szögének abszolút rendszerben vett koordinátája. A paraméterek numerikus értékeit az 1. táblázat foglalja össze.

Paraméterek

1. táblázat

Paraméter jelölése	Paraméter elnevezése	Numerikus érték
l	emberi test magassága	1,8 [m]
l_h	ember súlypontjának magassága (55%)	0,99 [m]
m_h	emberi test tömege	80 [kg]
θ_h	emberi test tehetetlensége (60%)	12,96 [kgm ²]
k_t	bokamerevség ($0 \dots m_h g l_h$)	$0 \dots 777 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \right]$
f	boka magasság	0,07 [m]
e	boka távolság	0,12 [m]
l_b	deszka súlypontjának magassága	0,0651 [m]
h	deszka magasság	0...0,3 [m]
R	deszka sugár	0...0,3 [m]
m_b	deszka tömege	3,0988 [kg]
θ_b	deszka tehetetlensége	0,0201 [kgm ²]

A valós fizikai problémáról alkotott mechanikai modellt az 1. ábra szemlélteti, melynek jobb oldalán látható a valós feladatról készült fénykép. Természetesen az ábra az 1. táblázatban szereplő paraméter jelölések feltüntetésével készült.



1. ábra. Egyensúlyozó deszkán egyensúlyozó ember mechanikai modellje (bal) és a valós egyensúlyozási feladat (jobb)

3. MOZGÁSEGYENLET FELÍRÁSA

A szabályozás nélküli rendszer mozgásegyenletének felírásához a jelen feladatra egyszerűsített másodfajú Lagrange-egyenletet használjuk,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0, \quad (1)$$

ahol T a rendszer teljes kinetikus energiája, U pedig a rendszer teljes potenciális energiája, q_k pedig a k számú általános koordináta. A rendszer teljes potenciális energiája az emberi test potenciális energiájának, a deszka potenciális energiájának és a boka rugóban tárolt energiának az összege. Linearizálást követően az általános koordinátákkal felírva:

$$U = m_b g y_{S_b} + m_h g y_{S_h} + \frac{1}{2} k_t (\varphi - \vartheta)^2, \quad (2)$$

$$U = m_b g l_b + m_b g (R - l_b) \frac{\vartheta^2}{2} + m_h g (h + f + l_h) + m_h g (R - h - f) \frac{\vartheta^2}{2} - m_h g e \vartheta - m_h g l_h \frac{\varphi^2}{2} + \frac{1}{2} k_t (\varphi^2 - 2\varphi\vartheta + \vartheta^2). \quad (3)$$

A két szabadságfokú rendszer teljes kinetikus energiája az emberi test és a deszka teljes kinetikus energiájának összege,

$$T = \frac{1}{2} m_b v_{S_b}^2 + \frac{1}{2} \theta_b \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m_h v_{S_h}^2 + \frac{1}{2} \theta_h \dot{\varphi}^2, \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{2} m_b l_b^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \theta_b \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} m_h (h + f)^2 \dot{\vartheta}^2 + m_h (h + f) l_h \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + \frac{1}{2} m_h l_h^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_h e^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \theta_h \dot{\varphi}^2. \quad (5)$$

A rendszer merevségi mátrixát (\mathbf{K}) a potenciális energia (3) általános koordináták szerinti második parciális deriváltjainak segítségével határozhatjuk meg. A tömegmátrixot pedig (\mathbf{M}) a kinetikus energia (5) általános koordináta deriváltak szerinti második parciális deriváltak alapján tudjuk meghatározni.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial \vartheta} \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi \partial \vartheta} & \frac{\partial^2 T}{\partial \vartheta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \vartheta} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi \partial \vartheta} & \frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_h + m_h l_h^2 & m_h(h+f)l_h \\ m_h(h+f)l_h & \theta_b + m_b l_b^2 + m_h(h+f)^2 + m_h e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\vartheta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_t - m_h g l_h & -k_t \\ -k_t & k_t + m_b g(R-l_b) + m_h g(R-h-f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \vartheta \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

A rendszer karakterisztikus egyenlete szabályozás és időkésés nélkül:

$$\det(s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + \frac{\text{tr}(\text{adj}(\mathbf{M})\mathbf{K})}{\det(\mathbf{M})} s^2 + \frac{\det(\mathbf{K})}{\det(\mathbf{M})} = 0, \quad (9)$$

ami

$$A(s) = s^4 + a_2 s^2 + a_0, \quad (10)$$

alakba írható, ahol a_0 az s^0 hatvány együtthatója, a_2 az s^2 hatvány együtthatója. $A(s)$ polinomhoz rakjuk hozzá az ember által kifejtett aktív szabályozó nyomatókat, amit az idegrendszert reprezentáló PD szabályozásból származó időkésleltetett visszacsatolással modellezünk. Így a rendszer karakterisztikus egyenlete:

$$D(s) = A(s) + B(s)e^{-s\tau}, \quad (11)$$

ahol $B(s) = b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$ a visszacsatolásból adódó tag, τ pedig a rendszer időkésése.

Kritikus időkésésnek (τ_{krit}) azt az időkésést nevezzük, aminél kisebb időkésés esetén létezik olyan szabályozó paraméter kombináció (azaz létezik olyan b_3, b_2, b_1, b_0 paraméternégyes), amellyel a $D(s)$ karakterisztikus egyenlet összes gyökének a valós része negatív, azaz a rendszer stabilizálható, de ha az időkésés nagyobb, mint a kritikus késés, akkor nem létezik ilyen paraméternégyes, azaz a rendszer nem stabilizálható. Az ún. többszörös multiplicitás okozta dominancia (Multiplicity Induced Dominancy, MID) tulajdonság [1] értelmében kritikus időkésleltetés esetén a rendszernek $s = 0$ -ban ötszörös gyöke van, azaz $D(0) = D'(0) = D''(0) = D'''(0) = D''''(0) = 0$ [1]. Ezen feltételek miatt a következő egyenlet adódik [2]:

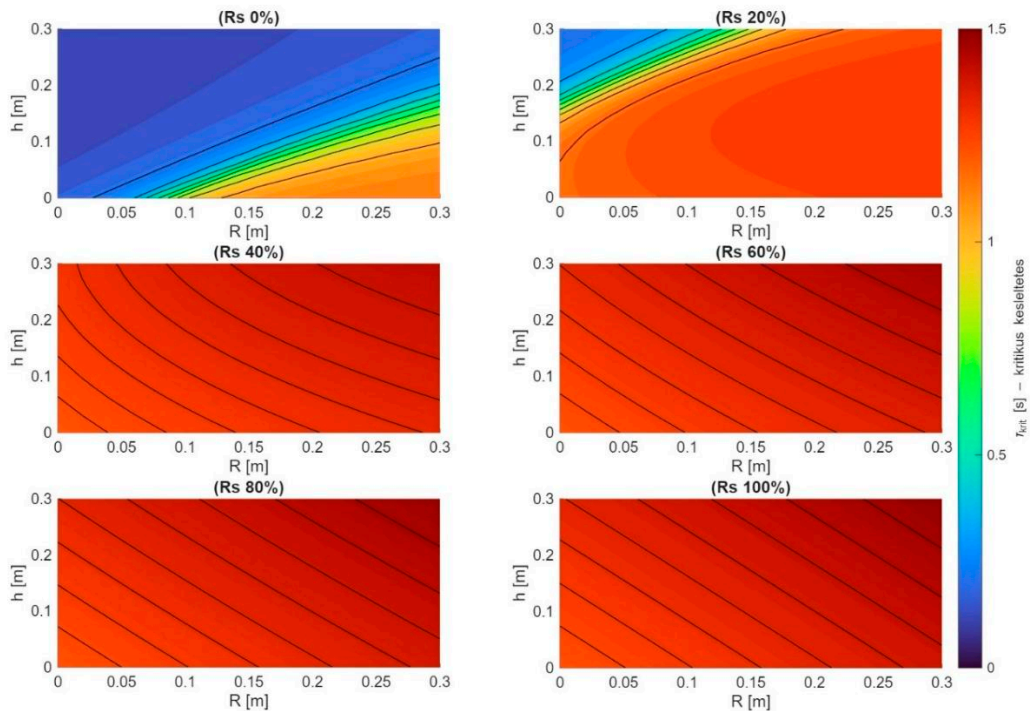
$$a_0 \tau^4 + 12a_2 \tau^2 + 24 = 0. \quad (12)$$

A páratlan hatványú tagok, illetve a PD szabályozóból származó tagok kiesnek, így a stabilizálhatósági kritérium csak az a_0 és a_2 paraméterekkel megadható. A másodfokú egyenletből a kritikus paraméterre adódó képlet:

$$\tau_{krit} = \sqrt{\min\{\tau_1^2, \tau_2^2\}}. \quad (13)$$

A paraméterek ismeretében lásd 1. táblázat, illetve a R és h értékeket változóként meghagyva, a \mathbf{K} merevségi mátrix és a \mathbf{M} tömegmátrix felírása után (9)-(13) lépéseken végig lépve kirajzolhatók a kritikus időkésések az (R, h) síkon, azaz minden deszka konfiguráció esetén. Mivel a boka merevség értékére (k_t) ilyen típusú feladatok esetén a szakirodalom nem ad egzakt értéket ezért több merevségi érték esetén is kirajzolásra került az ábra. Talajon állás esetén az egyensúlyban maradáshoz szükséges merevségi érték $k_t = m_h g l_h$, az ehhez viszonyított aktuális modellben vett boka merevség százalékos arányát tüntetjük fel az ábráink címeiben. Ezt az arányszámot szokás R_s -nek jelölni [6],

$$R_s = \frac{k_t}{m_h g l_h}. \quad (14)$$



2. ábra. Kritikus időkések a deszkakonfiguráció és a bokamerevség értékek ismeretében

4. EREDMÉNYEK

Egy linearizált két szabadságfokú mechanikai modell segítségével közelítettük az egyensúlyozó deszkán való egyensúlyozás feladatát. Az MID tulajdonság és a kapott mozgásegyenlet segítségével, az emberi idegrendszer működését egy PD szabályozónak tekintve sikerült egy becslést adni az emberi idegrendszer elvárt kritikus időkézésére az egyes deszka konfigurációk és bokamerevség értékek esetében. A 2. ábra támpontot adhat ismert bokamerevségű, reakcióidejű betegek, sportolók esetében számukra megfelelő nehézségű egyensúlyozó deszka konfiguráció kiválasztásában.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A Doktoranduszi Kiválósági Ösztöndíj Program (DKÖP) által támogatott projekt a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott, valamint a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem támogatása alapján valósult meg.

A projektet a HUN-REN Hungarian Research Network és az NKFIH 2024-1.2.8-TÉT-IPARI-CN-2025-00003 számú projektje támogatta.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Boussaada, I., Niculescu, S.I., On the dominance of multiple spectral values for time-delay systems with applications., IFAC-PapersOnLine 51 (14), 2018, 55–60.
- [2] Molnar, C.A., Balogh, T., Boussaada, I., Insperger, T., Calculation of the critical delay for the double inverted pendulum., J. Vib. Control 27 (3–4), 2021a, 356–364.
- [3] Chagdes JR, Rietdyk S, Jeffrey MH, Howard NZ, Raman A., Dynamic stability of a human standing on a balance board., J. Biomech. 46, 2013, 2593–2602.
- [4] Cruise DR, Chagdes JR, Liddy JJ, Rietdyk S, Haddad JM, Zelaznik HN, Raman A., An active balance board system with real-time control of stiffness and time-delay to assess mechanisms of postural stability., J. Biomech. 60, 2017, 48–56.
- [5] Molnar CA, Zelei A, Insperger T, Rolling balance board of adjustable geometry as a tool to assess balancing skill and to estimate reaction time delay., Journal of the Royal Society Interface, 2021, 18:20200956.
- [6] Insperger, T., Milton, J., Delay and Uncertainty in Human Balancing Tasks., In: Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences, Springer International Publishing, Cham, 2021.