

## Forgáshéjak néhány hierarchikus végeleme

### Some hierarchical finite elements of shells of revolution

DR. PÁCZELT István professor emeritus<sup>1</sup>,  
DR. BAKSA Attila egyetemi docens<sup>2</sup>

1: Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-30-269-5189, [istvan.paczelt@uni-miskolc.hu](mailto:istvan.paczelt@uni-miskolc.hu)

2: Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-30-312-7097, [attila.baksa@uni-miskolc.hu](mailto:attila.baksa@uni-miskolc.hu)

#### Abstract

The paper briefly summarizes the structure of hierarchical shell finite elements and presents computational results for a rotationally symmetric shell structure.

**Keywords:** finite element method, hierarchical model, shells of revolution, theory of elasticity

#### Kivonat

A cikk röviden összefoglalja a hierarchikus héj végelemek felépítését, továbbá egy forgás-héjszerkezetre vonatkozó számítási eredményeket mutat be.

**Kulcsszavak:** végelem-módszer, hierarchikus modellezés, forgáshéjak, rugalmasságtan

## 1. BEVEZETÉS

A  $p$ -verziós végelemek felhasználásával lineárisan rugalmas anyagú térbeli rúd alakú testek hierarchikus modellezésére láttunk példát az [1,2] munkákban. Az  $\mathbf{u}$  elmozdulásmezőt a keresztmetszetszabály és a hosszmenti lefutást jellemző függvények szorzatával közelítjük:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, s) = \mathbf{U}(x, y)\boldsymbol{\Psi}(s) = \mathbf{U}(x, y)\{\mathbf{G}(s)\mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{a}\} \quad (1)$$

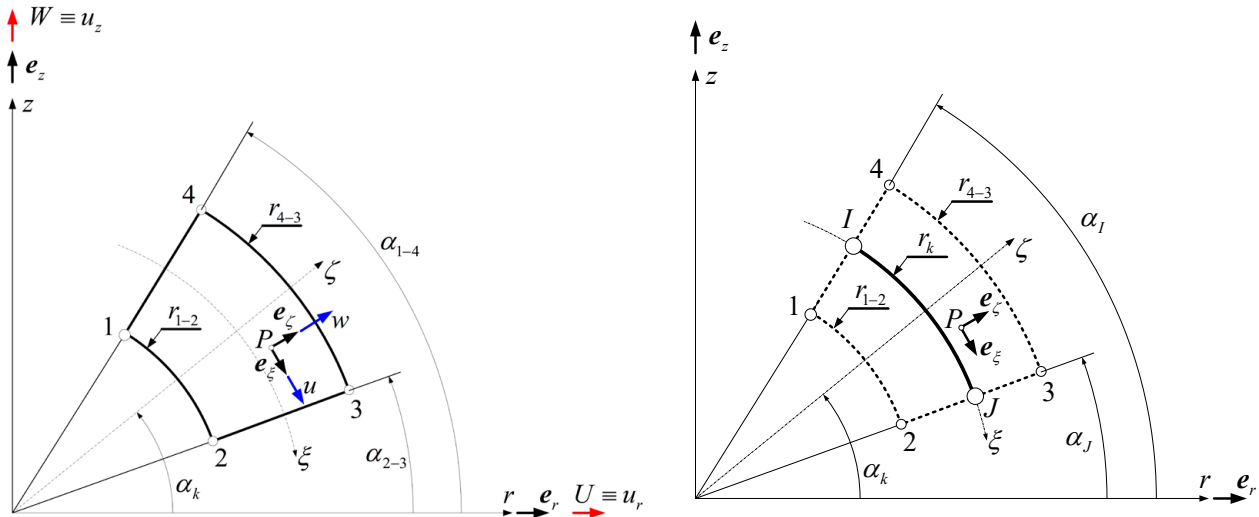
ahol  $\mathbf{U}(x, y)$  a Pascal háromszög szerint rendezett hatványfüggvényeket (irányfüggvénynek nevezzük) tartalmazó mátrix,  $\boldsymbol{\Psi}(s)$  a  $p$ -verziós végelem technika szerint közelített ún. *mezőfüggvényeket* tartalmazó vektor. A modelleket a potenciális energia minimuma elv feltételéből vezettük le. A modellt az  $(x, y, s)$  görbevonalú koordinátarendszerben definiáljuk. Az  $x$  és az  $y$  tengelyek a keresztmetszet fő tengelyeivel esnek egybe,  $s$  a középvonal mentén mért ívhossz. Itt  $\mathbf{G}(s)$ ,  $\boldsymbol{\Phi}(s)$  approximációs mátrixok,  $\mathbf{q}$  a csomóponti általánosított elmozdulásvektor,  $\mathbf{a}$  a pótlólagos állandók vektora. Az  $\mathbf{U}(x, y)$ -ba foglalt polinomok számától függően különböző hierarchiájú modellt lehetett képezni.

Forgáshéjakra vonatkozóan [3] munkában találunk részletes leírást a hierarchikus modell felépítésére, számos példán bemutatva annak hatékonyságát. A jelen cikk további példát közöl a kialakított modellre, azok pontosságát körültekintően elemezve.

## 2. GÖRBE PEREMŰ VÉGESELEMEK LEKÉPEZÉSE, MEREVSÉGI MÁTRIX ELŐÁLLÍTÁSÁNAK FŐBB LÉPÉSEI

Mivel  $p$ -verziójú [4,5] elemeket fogunk használni, a vizsgált testek geometriájának precíz leképezése rendkívül fontos. Vizsgáljuk az 1. ábrán vázolt forgásszimmetrikus test meridiánjának egy végelemét, aminek az első és a harmadik oldala körív alakú. A körök sugarai  $r_{1-2}$  és  $r_{4-3}$ . Bevezetve az alábbi jelöléseket:  $\alpha_k = (\alpha_{1-4} + \alpha_{2-3})/2$ ,  $\alpha_d = (\alpha_{1-4} - \alpha_{2-3})/2$ , a helyi görbevonalú  $\xi, \zeta$  és a globális  $r, z$  koordinátarendszer közötti leképezés az alábbi [4]:

$$r = (r_{1-2} \frac{1-\zeta}{2} + r_{4-3} \frac{1+\zeta}{2}) \cos(\alpha_k - \xi\alpha_d), z = (r_{1-2} \frac{1-\zeta}{2} + r_{4-3} \frac{1+\zeta}{2}) \sin(\alpha_k - \xi\alpha_d) \quad (2)$$



1. ábra. Héjelem: a) leképezés; b) héjvégelem IJ csomópontok között

Legyen a globális koordináta-rendszerbeli elmozdulás  $\mathbf{u}_G = U\mathbf{e}_x + W\mathbf{e}_z$ , míg a helyi  $\mathbf{u}_L = u\mathbf{e}_\xi + w\mathbf{e}_\zeta$ .

A helyi rendszerbeli elmozdulást az alábbi alakban közelítjük

$$\mathbf{u}_L = u\mathbf{e}_\xi + w\mathbf{e}_\zeta \Rightarrow \mathbf{u}_L = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{MM} \mathbf{U}_m(\xi) F_m(\zeta) \quad (3)$$

ahol  $\mathbf{U}_m(\xi)$  mennyiségben a szokásos alakfüggvények szerepelnek, az  $F_m(\zeta) = (\zeta)^{m-1}$  (ipolt=1) tag pedig a héj vastagsága menti elmozdulás megoszlásával kapcsolatos. Számításainkban még felhasználtuk a Legendre polinomokat (ipolt=0, illetve azok kombinációját ún.  $\Phi(\zeta)$  függvényeket (ipolt=-1) [4,5].  $MM$  paraméter választásától függően különböző szintű hierarchikus modellekhez jutunk, vagyis különböző típusú héj, lemez elmélet eredményeit tudjuk elérni, illetve meghaladni.  $MM$  a vastagság mentén a közelítendő polinom fokszámát határozza meg. Az  $MM = 2$  értéknél a *Naghdi*-féle héjelmélet feltételei szerint végezzük el a számítást. A  $p$ -verziós végelem-módszert alkalmazva, a (3) alatti elmozdulás az alábbi alakfüggvények és mátrixok bevezetésével

$$N_1 = 0.5(1 - \xi) = N_J, \quad N_2 = 0.5(1 + \xi) = N_I, \quad N_{p+1} = (0.5(1 + \xi))^p - 0.5(1 + \xi), \quad p = 2, 3, \dots, np, \quad \mathbf{N}_I = \begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix}, \quad I \rightarrow J, \quad \hat{\mathbf{N}}_{p-1} = \begin{bmatrix} N_{p+1} & 0 \\ 0 & N_{p+1} \end{bmatrix}, \quad p = 2, 3, \dots, np \quad (4)$$

a csomóponti elmozdulásokon és a pótlólagos állandókon keresztül közelíthető:

$$\mathbf{u}_L = u\mathbf{e}_\xi + w\mathbf{e}_\zeta \Rightarrow \mathbf{u}_L = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{MM} \mathbf{U}_m(\xi) F_m(\zeta) = \sum_{m=1}^{MM} F_m \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_I & \mathbf{N}_J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I^m \\ \mathbf{q}_J^m \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{np-1} \hat{\mathbf{N}}_j \hat{\mathbf{a}}_j^m \right\} = \sum_{m=1}^{MM} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_I^m & \mathbf{G}_J^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I^m \\ \mathbf{q}_J^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}_1^m & \hat{\mathbf{G}}_2^m & \dots & \hat{\mathbf{G}}_{np-1}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1^m \\ \hat{\mathbf{a}}_2^m \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{a}}_{np-1}^m \end{bmatrix} \right\} \quad (5)$$

ahol hosszirányban  $np$ -ed fokú polinomokkal történik a közelítés, az elem csomópontjait  $I, J$  (lásd 1b. ábra) jelöli. Az összegzést mátrix szorzásokkal helyettesítve végezzük el a teljes elmozdulás a vizsgált végelem helyi koordináta-rendszerében

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_L(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_I^L(\xi, \zeta) & \mathbf{G}_J^L(\xi, \zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I^L \\ \mathbf{q}_J^L \end{bmatrix} + \hat{\mathbf{G}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}}, \quad \begin{matrix} (2,2MM) & (2,2MM) & (4MM,1) \\ & & (2,2(np-1)MM) & (2(np-1)MM,1) \end{matrix}$$

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{u}_L(\xi, \zeta) = \mathbf{G}_L^L(\xi, \zeta) \mathbf{q}_L^L + \hat{\mathbf{G}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}}. \quad (6)$$

alakban írható fel, ahol

$$\mathbf{G}^L = \mathbf{G}^L(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_I^L(\xi, \zeta) & \mathbf{G}_J^L(\xi, \zeta) \\ (2,2MM) & (2,2MM) \end{bmatrix}, \mathbf{q}^{L,T} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I^{L,T} & \mathbf{q}_J^{L,T} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_I^L(\xi, \zeta) &= \begin{bmatrix} N_I F_1 0 & N_I F_2 0 & N_I F_3 0 & N_I F_4 0 & \dots & N_I F_{MM} 0 \\ 0 & N_I F_1 & 0 & N_I F_2 & \dots & 0 & N_I F_{MM} \end{bmatrix} = \\ &= [\mathbf{N}_I(\xi) F_1 \mathbf{N}_I(\xi) F_2, \dots, \mathbf{N}_I(\xi) F_i, \dots, \mathbf{N}_I(\xi) F_{MM}] \\ &= [\mathbf{G}_1^I(\xi, \zeta) \mathbf{G}_2^I(\xi, \zeta), \dots, \mathbf{G}_i^I(\xi, \zeta), \dots, \mathbf{G}_{MM}^I(\xi, \zeta)], I \rightarrow J \end{aligned} \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_m(\xi, \zeta) = \begin{bmatrix} N_3 F_m 0 & N_4 F_m 0 & \dots & N_{np} F_m 0 & N_{np+1} F_m 0 \\ 0 & N_3 F_m & 0 & N_4 F_m & \dots & 0 & N_{np} F_m & 0 & N_{np+1} F_m \end{bmatrix}, m = 1, \dots, MM, \quad (9)$$

továbbá az ismeretlen elmozdulási paraméterek

$$\mathbf{q}_I^{L,T} = [u^{m=1}, w^{m=1}; u^{m=2}, w^{m=2}; \dots; u^{m=i}, w^{m=i}; \dots; u^{m=MM}, w^{m=MM}]_I, \quad I \rightarrow J, \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(1,2(np-1))}^{m,T} = [a_{1r}, a_{1z}; a_{2r}, a_{2z}; \dots; a_{ir}, a_{iz}; \dots; a_{np-1,r}, a_{np-1,z}]^m, \quad m = 1, \dots, MM,$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(1,2(np-1)MM)}^T = [\hat{\mathbf{a}}^{m=1,T} \hat{\mathbf{a}}^{m=2,T}; \dots; \hat{\mathbf{a}}^{m=i,T}; \dots; \hat{\mathbf{a}}^{m=MM,T}] \quad (11)$$

A (4) alatti alakfüggvényekből látszik, hogy a (6) alatti első tag az elem hossza mentén az elmozdulás lineáris, a második tag pedig az  $np$ -ed fokú változást írja le. Keresztirányban (a héj falvastagsága mentén) az  $MM$ -ed fokú a változás.  $MM$  növelésével a megoldás a 3D-s megoldás felé konvergál. A koordináta-rendszerek közötti transzformáció mátrixát jelölje  $\mathbf{T}^{LG}$  (globális rendszerből helyi koordináta-rendszerbe),

$\mathbf{T}^{GL} = (\mathbf{T}^{LG})^{-1}$  (lokálisból globálisba). Ennek felhasználásával a globális rendszerbeli elmozdulás

$$\mathbf{u}_G = \begin{bmatrix} U(\xi, \zeta) \\ W(\xi, \zeta) \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \mathbf{u}_L(\xi, \zeta) \quad (12)$$

ezért a helyi rendszerbeli deriváltak

$$\frac{\partial \mathbf{u}_G(\xi, \zeta)}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta)}{\partial \xi} \mathbf{u}_L(\xi, \zeta) + \mathbf{T}^{GL}(\xi, \zeta) \frac{\partial \mathbf{u}_L(\xi, \zeta)}{\partial \xi}, \quad \xi \Rightarrow \zeta, \quad (13)$$

míg a globális koordináta-rendszerben

$$\begin{bmatrix} U_{,x} \\ U_{,z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} U_{,\xi} \\ U_{,\zeta} \end{bmatrix} \quad (14)$$

a Jacobi mátrixszal számolhatók [3]  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$ .

Hivatkozva [3,5] munkákra, a forgásszimmetrikus kis alakváltozásnál az alakváltozási vektor és a feszültségi vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{,r} \\ W_{,z} \\ U/r \\ U_{,z} + W_{,r} \end{bmatrix} = \mathbf{B}(\xi, \zeta) \mathbf{q}^G + \hat{\mathbf{B}}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{a}}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

alakban írható fel, míg homogén, izotrop anyagnál az anyagállandók mátrixa:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

Itt  $E$  - Young modulus,  $\nu$  - Poisson tényező, illetve a merevségi mátrix az alábbi formula szerinti

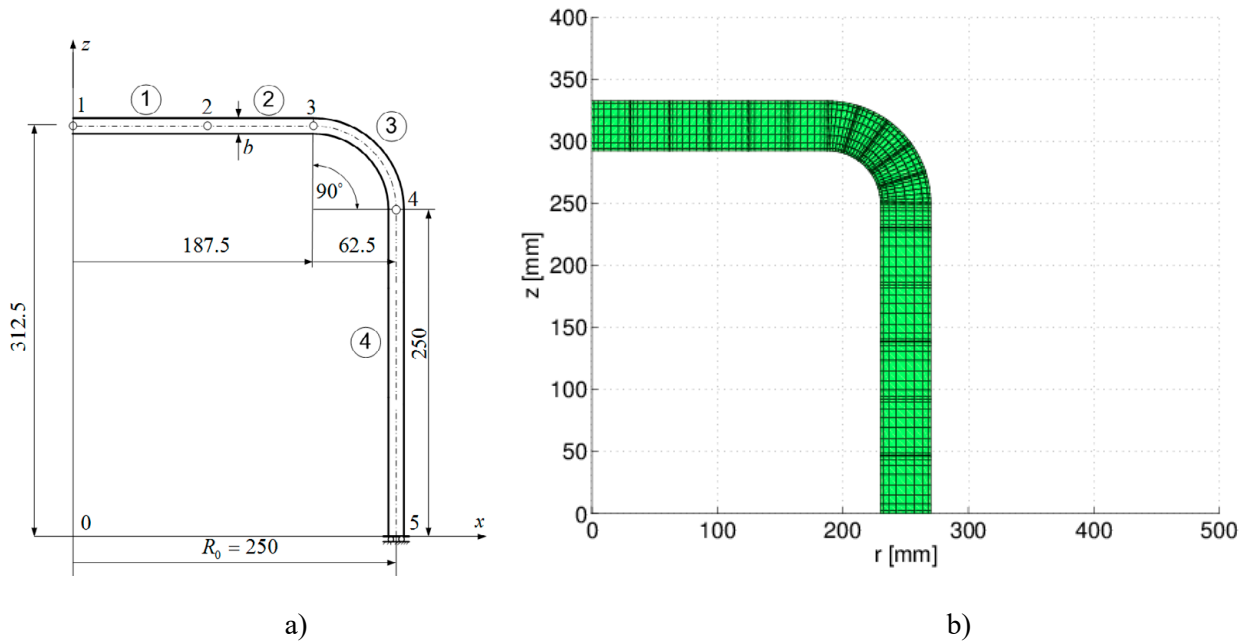
$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{B}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{B}}(\xi, \zeta))^T \mathbf{D} (\mathbf{B}(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{B}}(\xi, \zeta)) \det \mathbf{J} d\xi d\zeta \quad (17)$$

Az  $r_{1-2}$  sugarú felületen a  $p_o$  intenzitású nyomásból

$$\mathbf{f} = \int_{-1}^{+1} (\mathbf{G}^G(\xi, \zeta) \hat{\mathbf{G}}^G(\xi, \zeta))^T \mathbf{p}^G 2\pi r \det \mathbf{J}_\Gamma d\xi \quad (18)$$

redukált terhelési vektor számolható. Itt  $\det \mathbf{J}_\Gamma = r_{1-2} \alpha_d$ ,  $\mathbf{p}^{GT} = p_o [\cos \alpha \quad \sin \alpha]$ ,  $r = r_{1-2} \cos \alpha$ .

### 3. FORGÁSHÉJRA VONATKOZÓ SZÁMPÉLDA

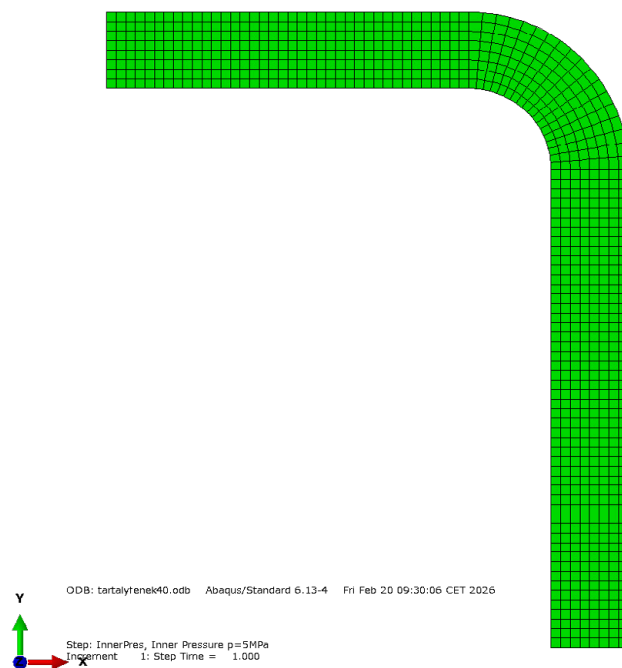


2. ábra. Hengeres tartály lezáró része: a) geometria ( $b=40\text{mm}$ ); b) végeelemes felosztás

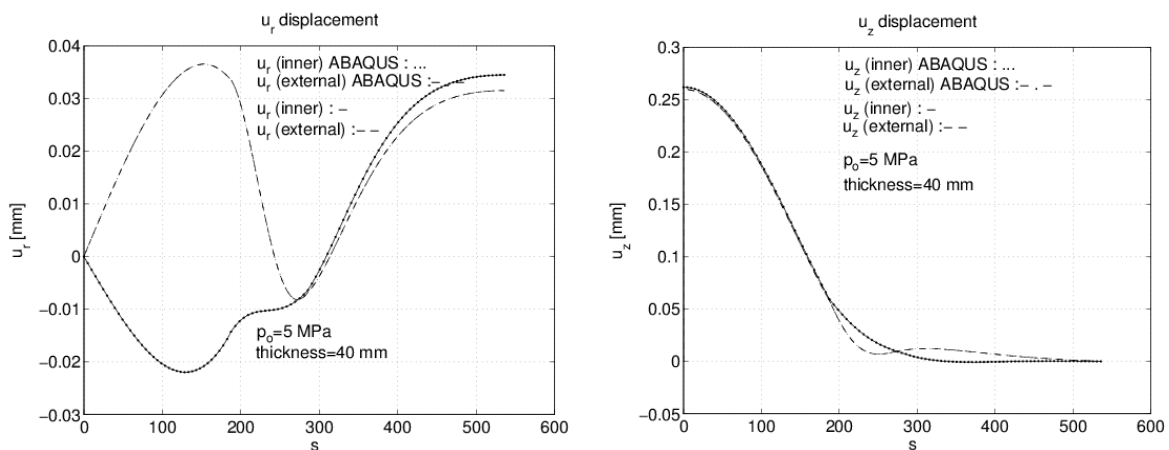
Vizsgáljuk a 2. ábrán vázolt rugalmas hengeres tartály felső részét, ami vastagfalú héjnak tekinthető. Rugalmassági tényező:  $E = 210\text{GPa}$ , Poisson tényező  $\nu = 0,3$ . Terhelés  $\tilde{p} = p_o = 5,0\text{MPa}$  belső nyomás. A tartály alsó felületén a  $z$  tengelyirányú elmozdulás zérus. Hasonló szerkezetek vizsgálata található meg

vékonyháj elméletet használva a [5,6] cikkekben  $p$  verziós számítással. Jelen tanulmányban 17 db hierarchikus végelemmel végeztük el a számításokat (lásd 2b. ábra),  $ipolt=0$  választással. Jelenleg, csak az  $np=6$ ,  $MM=8$  paraméterek melletti konvergencia feltételeket kielégítő eredményeket közöljük a 4-7 ábrákon lévő elmozdulások és feszültségek megoszlásait ábrázolva a héj belső és külső felületén lévő, a *Lobatto* integrálási pontokban kiszámoltak segítségével. Jól látszik, hogy a feszültségi peremfeltételek kielégülnek (lásd 5 és a 6.  $\sigma_z, \sigma_r$  ábráit). A kettős o pontok között a tóruszon (lekerekítésen) ébredő feszültségek erőteljes változása figyelhető meg. A redukált feszültség maximuma is a tóruszon van. Az ABAQUS programrendszerben [7] is modelleztük a feladatot *SAX8* elemtípust használva, mely 8 csomópontú tengelyszimmetrikus elemet jelent. A felvett elemek száma 848, ismeretlenek száma: 5546. A kereskedelmi szoftverben alkalmazott  $h$ -verziós felosztást a 3. ábra mutatja meg. A kapott eredmények az 4-7. ábrákon láthatók '...' ill. '-.-' szimbólummal jelölt görbék révén.

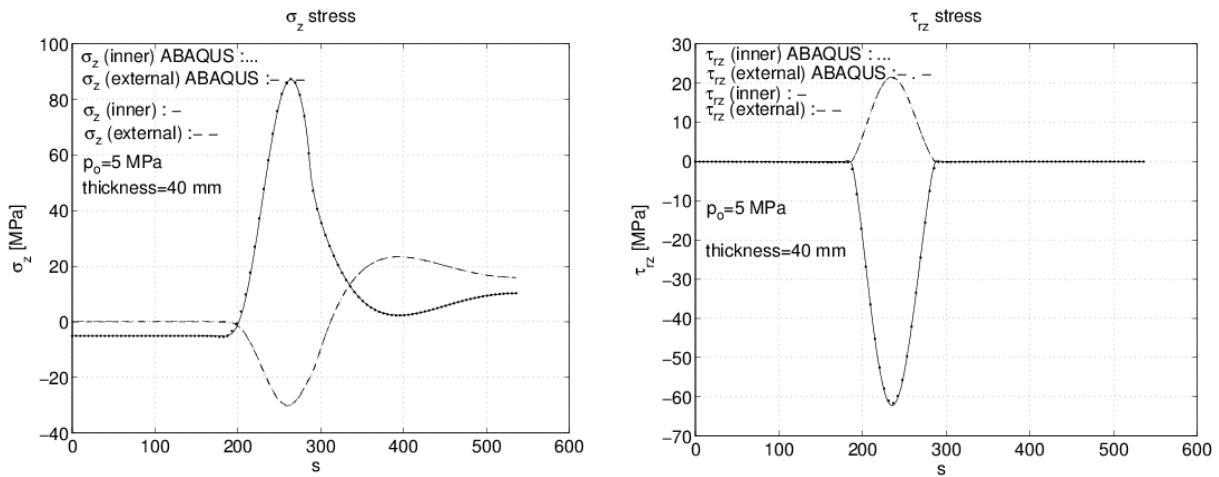
Az általunk használt hierarchikus végelem-modellünkben  $np=6$ ,  $MM=8$  esetén, 17 elem és 18 csomópont felvételével 1640 ismeretlen van a feladatban, azaz harmad részelt kevesebb ismeretlennel is konvergens megoldást tudunk biztosítani.



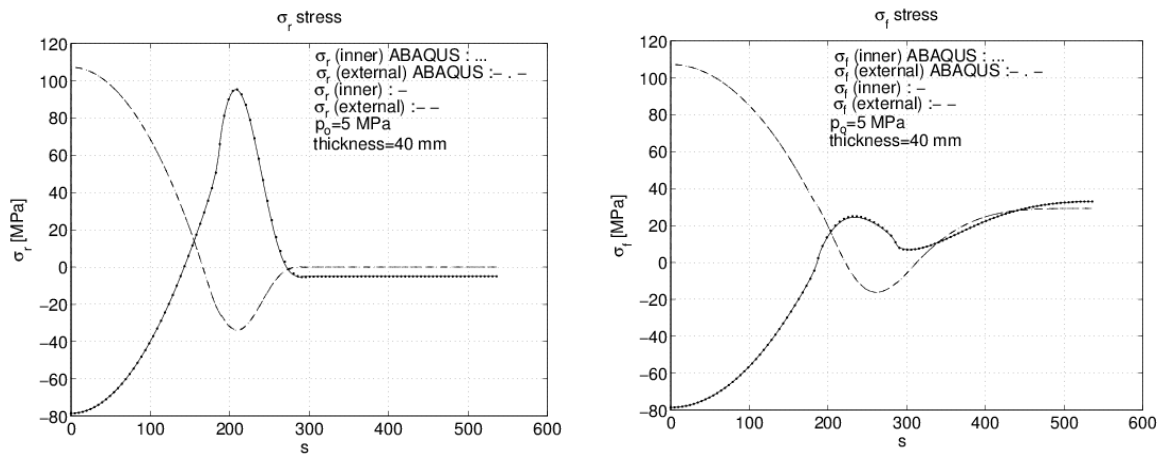
3. ábra. ABAQUS programmal történő számítás végelemes felosztási hálója



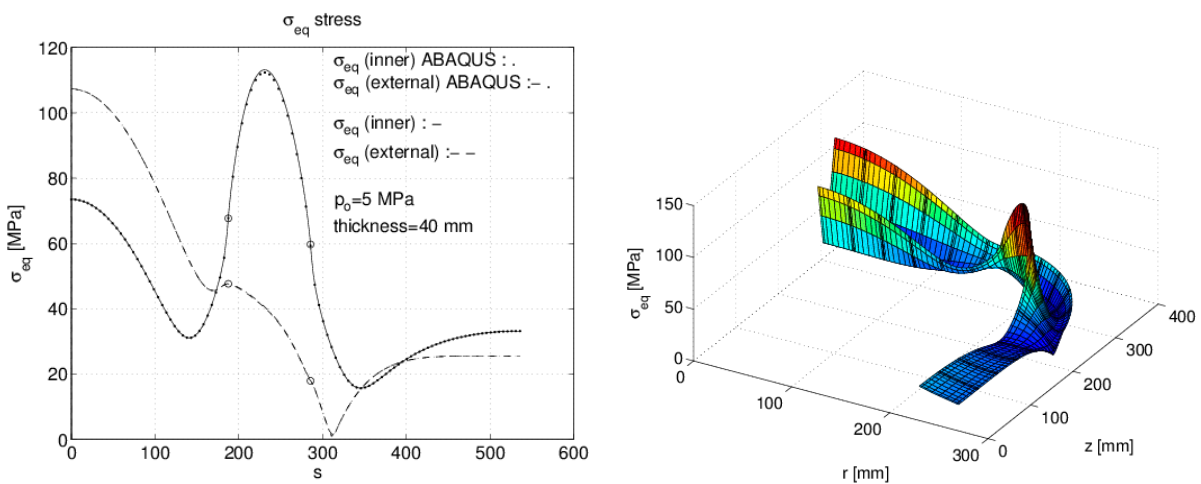
4. ábra. Radiális és függőleges elmozdulás a héj belső és külső felületén,  $s$  a középvonalon mért ívhossz



5. ábra.  $\sigma_z$  és  $\tau_{rz}$  feszültség megoszlása a héj belső és külső felületén



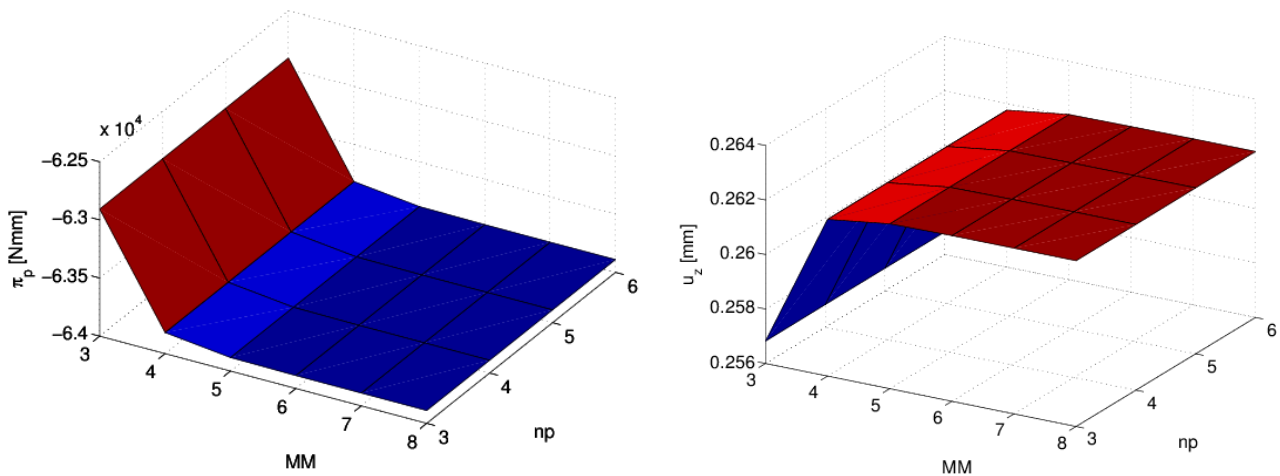
6. ábra.  $\sigma_r$  és  $\sigma_\phi$  feszültség megoszlása a héj belső és külső felületén



7. ábra.  $\sigma_{eq}$  redukált feszültség megoszlása

Konvergencia vizsgálatokat elvégezve, a potenciális energia és az  $r=0$  helyen a héj alsó pontjának függőleges elmozdulását vizsgálva a 8. ábra az  $np$ , illetve az  $MM$  paraméter függvényében mutatja a változást. Jól látszik, hogy  $MM > 4$ , és  $np > 3$  által meghatározott hierarchikus szintnél az értékek alig

változnak, pl.  $np=4$ ,  $MM=5$  nál  $\Pi_p = -63884$  Nmm,  $u_z = 0,262058$  mm a kapott érték, míg  $np=6$ ,  $MM=8$  nál  $\Pi_p = -63890$  Nmm,  $u_z = 0,262086$  mm.



8. ábra. Konvergencia felületek  
 a) potenciális energia, b)  $u_z = u_z(r = 0, z = 292,5)$   
 függőleges elmozdulás számára

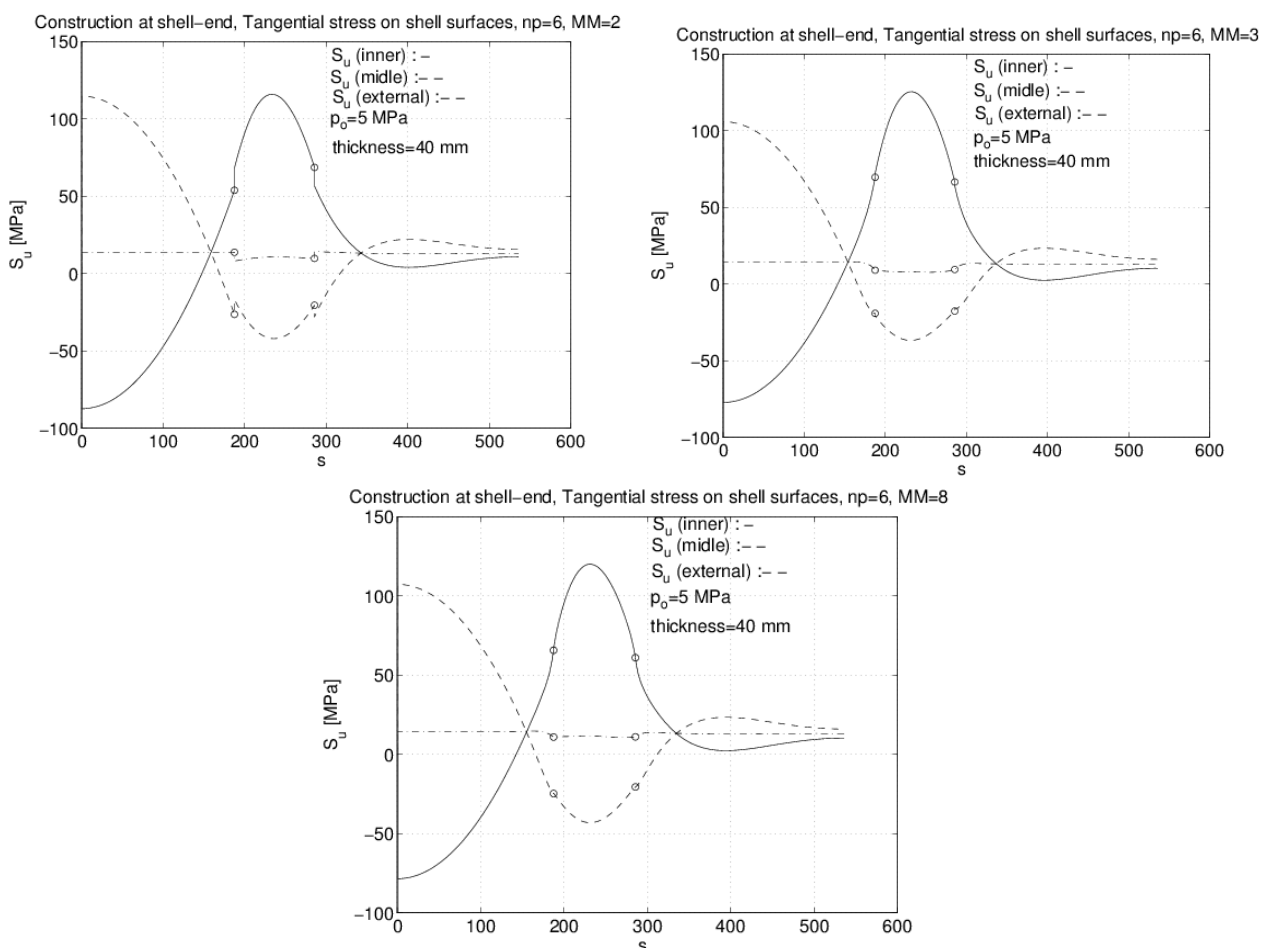
A számítás jóságát az is hangsúlyozza, hogy a hengeres részben a  $\sigma_z$  feszültség eredője meg kell, hogy egyezzen a tartály belső részén ható  $p_o$  nyomásból származó  $F_o = p_o(R_o - b/2)^2 \pi = 830951,2799$  N függőleges eredő erővel. A 15. elemnél számított érték  $F_{sz}(np = 6, MM = 8) = 830951,2964$  N gyakorlatilag azonos. Az is egy fontos eredmény, hogy  $MM=2,3$ -nál kapott a héjban ébredő hosszirányú  $\sigma_u \equiv S_u$  feszültségek, alig különböznek az  $MM=8$  nál kapottakkal összehasonlítva (lásd 9. ábra). Ez azt is alátámasztja, hogy az ismert héjelméletek jól közelítik a héjszerkezet mechanikai állapotának főbb jellemzőit. Konkrétan  $MM=2,3,4,8$  sorrendjének megfelelően  $\sigma_u = -87,4341; -77,2451; -78,9747; -78,5528$  MPa. Mivel  $MM=2$  nél a falvastagság mentén az elmozdulás változása lineáris, és a jelen héjnál (a hengeres szakaszt nézve  $b/R_o = 0.16$ , azaz nem tekinthető vékonyknak), a jobb eredmény csak az  $MM=3$  értéktől kezdődően érzékelhető, amit a 9. ábra is mutat. A hengeres szakasz végén  $\sigma_\phi$  feszültségeket szemlélve az alacsony szintű modellek nagyon jól közelítik az  $MM=8$  szinten kapott eredményeket (10. ábra). Mivel közel vagyunk a membrán állapothoz a kazánformula is jó közelítést szolgáltat  $\sigma_\phi(kazán) = R_o p_o / b = 31,25$  MPa.

Körirányú feszültségek MPa-ban a henger  $z=0$  metszetében

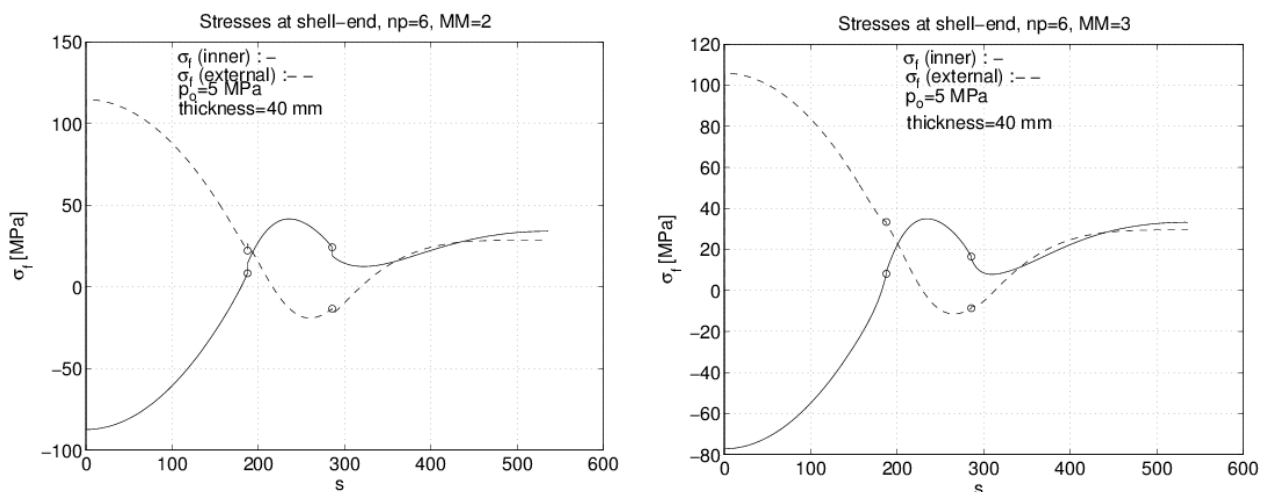
1. táblázat

MM	$\sigma_\phi(r = R_o - b/2, z = 0)$	$\sigma_\phi(r = R_o, z = 0)$	$\sigma_\phi(r = R_o + b/2, z = 0)$
2	34,081	30,909	28,485
3	33,242	30,904	29,502
4	33,124	30,927	29,278
8	33,077	30,927	29,318

Összevetve eredményeinket az ABAQUS végelem-program eredményeivel, igen jó egyezést találtunk. A héjmodellünk számításánál bizonyítottuk numerikusan, hogy megoldásunk a hierarchikus szint emelésével konvergál. Előnye a használt modellnek, hogy kevés ismeretlennel is megbízható megoldás érhető el. Ha a szerkezet szinguláris feszültséggyűjtő helyekkel rendelkezik, akkor modellünk [3] már nem képes ezeket jól megközelíteni. Ezekben az esetekben a pontosabb eredményekhez a hierarchikus számítás, modellezés helyett célszerűbb a 3D-s végelem, konvergenciát is bizonyító, programok használata.



9. ábra. A héjszerkezetben ébredő hosszirányú feszültségek a héj belső-, közép- és külső felületén MM=2,3,8 esetén



10. ábra. A héjszerkezetben ébredő körirányú feszültségek a héj belső-, külső felületén MM=2,3 esetén

## IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Páczelt I., Szabó B.: *p*-verziós végeelemeket felhasználó hierarchikus rúd modellek, pp. 341-344. In: Csibi Vencel-József; Barabás István (szerk.) OGÉT 2018: XXVI. Nemzetközi Gépészeti Konferencia: 6th International Conference on Mechanical Engineering, Cluj-Napoca, Románia, Kolozsvár, Románia Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság (EMT), 2018 544 p.

- [2] Páczelt I., Szabó B., Baksa A.: *Application of the p-version of FEM to hierarchic rod models with reference to mechanical contact problems*, Journal of Computational and Applied Mechanics, 2023, 18(1), 35-84, DOI: 10.32973/jcam.2023.002
- [3] Páczelt I., Baksa A.: *Forgáshéjak hierarchikus végelemeiről röviden*, Multidiszciplináris tudományok, (nyomtatásban), 2026
- [4] B. Szabó, I. Babuska: *Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification and Validation*, John Wiley and Sons, Ltd, (2011), Chichester, UK
- [5] Páczelt I.: *Végelem-módszer, a mérnöki gyakorlatban, I. kötet*, Miskolci Egyetemi Kiadó, 1999.
- [6] Herpai B., Páczelt I.: *Analysis of axisymmetrically deformed shells by the finite element displacement methods*. Acta Techn. Hung. (1977), 85, 93-122.
- [7] Páczelt I.: *TESZGA végelelemes programrendszer tengelyszimmetrikus geometriájú és alakváltozású szerkezetek szilárdságtani számítására*, Műszaki Tudomány, (1980), 60, 63-78.
- [8] Abaqus on-line documentation, <http://www.abaqus.com>