

Tervezési megfontolások állandó mágneses villamos gépek optimális irányítása esetén

Design considerations for optimal control of permanent magnet electric machines

NAGY Vanda Orsolya hallgató¹, Dr. BUDAI Csaba egyetemi docens¹

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

Abstract

A wide range of different methods is available for the control of permanent magnet electric machines. This study deals with the investigation of a modern, optimal control method, the so-called linear quadratic regulator (LQR). The aim is to determine the appropriate parameters of the given control method analytically, therefore reducing the computational demands resulting from the often necessary iterative methods and optimization algorithms. A further aim is to investigate the boundaries of achievable system characteristics.

Keywords: linear quadratic regulator, optimal control, analytical design, electrical machines

Kivonat

Állandó mágneses villamos gépek szabályozása során a különféle szabályozási módszerek széles skálája érhető el. Jelen tanulmány egy modern, optimális irányítási módszer, az ún. lineáris kvadratikus szabályozó (LQR) vizsgálatával foglalkozik. A cél ezen szabályozási módszer megfelelő paramétereinek analitikus meghatározása, így csökkentve a sok esetben szükséges iteratív módszerekből és optimalizációs algoritmusokból adódó számítási igényeket. További cél a megvalósítható minőségi jellemzők határainak feltérképezése is.

Kulcsszavak: lineáris kvadratikus szabályozó, optimális szabályozás, analitikus tervezés, villamos gépek

1. BEVEZETÉS

Villamos gépek szabályozása esetén a klasszikus, műszaki gyakorlatban széles körben alkalmazott eljárások mellett bevett gyakorlat az állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozási sémák használata is. Az állapotvisszacsatolás tervezése során különféle stratégiák alkalmazhatóak, melyek lehetnek optimális, illetve robusztus tervezési stratégiák, mint az LQR [1] vagy a \mathcal{H}_∞ [2, 3] módszerek. Az ún. lineáris kvadratikus szabályozó (LQR, *Linear Quadratic Regulator*) egy gyakran alkalmazott tervezési eljárás lineáris rendszerek esetén. Ezen optimális szabályozási módszer során a cél egy megfelelő költségfüggvény minimalizálása és ezúton a szabályozási paraméterek meghatározása. A módszer képes stabil viselkedést mutatni kisebb bizonytalanságok, modellpontatlanságok esetén is, illetve a különböző súlymátrixok lehetővé teszik az állapotok és a bemenetek közti prioritás rögzítését is. Ennek megfelelően a tervezés során beállítható a bemenet hatásának mértéke, illetve az, hogy egyes állapotok referenciától való eltérése mekkora mértékben kerül büntetésre [4]. Ezen mátrixok paramétereinek meghatározása azonban jelentős kihívást eredményezhet, így sokszor szükségessé válhat további optimalizációs módszerek alkalmazása is [5]. A tervezés nehézségeinek ellenére az LQ szabályozás gyakran felhasználásra kerül villamos hajtások szabályozása esetén [6, 7], vagy akár az űrtechnológiai alkalmazásokban is [8].

A tanulmány során egy állandó mágneses villamos gép optimális irányításának tervezése kerül bemutatásra, az LQR módszer paramétereinek analitikus meghatározásán keresztül. Mivel a villamos hajtások esetén kiemelten fontos a megfelelő minőségi jellemzők beállítása és adott korlátok között tartása, így vizsgálatra kerülnek a megvalósítható minőségi jellemzők is. Feltérképezésre kerülnek ezen paraméterek lehetséges tartományai, illetve a súlymátrixok meghatározása esetén elterjedt ún. Bryson-szabály alkalmazásának korlátai is.

2. AZ LQR STRATÉGIA

Különböző villamos hajtások esetén az ún. lineáris kvadratikus szabályozó (LQR, *Linear Quadratic Regulator*) egy gyakran alkalmazott módja a szabályozás tervezésének. Mivel az LQ szabályozás egy optimális szabályozási stratégia, így a szabályozási törvény meghatározása esetén a cél egy adott költségfüggvény minimalizálása.

A szabályozni kívánt lineáris, időinvariáns rendszerek az alábbi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (1)$$

alakban írható fel, ahol $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ és $\mathbf{u}(t)$ vektorok tartalmazzák az állapotváltozókat, kimeneteket, illetve bemeneteket, \mathbf{A} a rendszermátrix, \mathbf{B} a bemeneti mátrix, illetve \mathbf{C} a kimeneti mátrix. A szabályozás tervezésének feltétele, hogy a rendszer állapotirányítható legyen, melynek kritériumát a Kálmán-féle rangfeltétel adja meg [9], miszerint egy rendszer akkor irányítható, ha az ún. irányíthatósági mátrix rangja megegyezik az n állapotváltozó számával. Felírható a bemenet meghatározó szabályozási törvény

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{N}\mathbf{r}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

ahol $\mathbf{r}(t)$ a referenciajel, \mathbf{K} a szabályozási paramétereket tartalmazó mátrix és \mathbf{N} a statikus alapjelkompenzációt megvalósító mátrix. A szabályozás tervezése során a cél ezen szabályozási törvény olyan módon való meghatározása, hogy egy adott költségfüggvényt minimalizáljon.

Az LQ szabályozás tervezése során alkalmazott, minimalizálni kívánt költségfüggvény számos variációban létezik [10], az ún. végtelen horizontú LQR esetén a költségfüggvény az alábbi

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} dt \quad (3)$$

alakban írható fel [11]. A költségfüggvényben szereplő \mathbf{Q} , illetve \mathbf{R} mátrixok segítségével határozható meg az állapotok és a bemenetek közötti prioritás. A \mathbf{Q} súlymátrix szimmetrikus és pozitív szemidefinit ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \succeq 0$), az állapotváltozók referenciától való eltérését bünteti, tehát ha elemei nagyobbak, kisebb hiba esetén is nagy mértékben nő a költségfüggvény értéke. A \mathbf{Q} mátrix gyakran diagonális, azaz

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (4)$$

ahol n az állapotváltozók száma. Az $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T \succ 0$, szimmetrikus, pozitív definit súlymátrix ezzel szemben a bemeneteket súlyozza, tehát ha \mathbf{R} elemei nagyobbak, akkor a bemenetek hatása csak kisebb mértékben képes érvényesülni [12]. A felírt költségfüggvény átalakításával megkapható a megfelelő szabályozási törvény, az

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (5)$$

alakban. Látható, hogy a szabályozási paraméterek megválasztását követően a szabályozási feladat, mint állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozás valósítható meg, ha a szabályozási paramétereket tartalmazó mátrix

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \quad (6)$$

A $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \succeq 0$ szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix az ún. Riccati egyenlet (CARE, *Continuous-time Algebraic Riccati Equation*)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0. \quad (7)$$

alapján határozható meg.

3. DC MOTOR LQ SZABÁLYOZÁSA

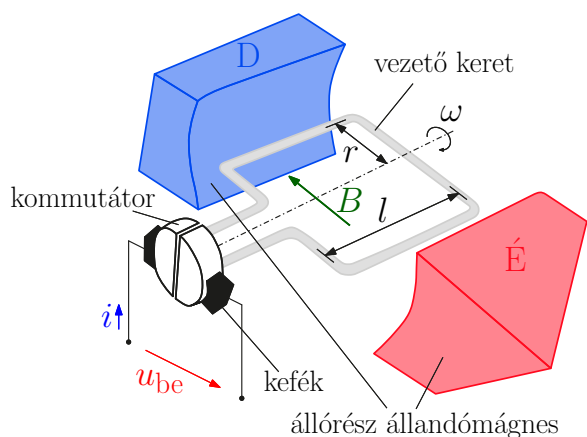
Az egyenáramú (DC, *direct current*) motorok széles körben kerülnek alkalmazásra, mint például az elektromos járművekben, a háztartási készülékekben, a robotika területén, illetve a CNC vezérelt megmunkálási technikák esetén is.

3.1. A DC motor modellje

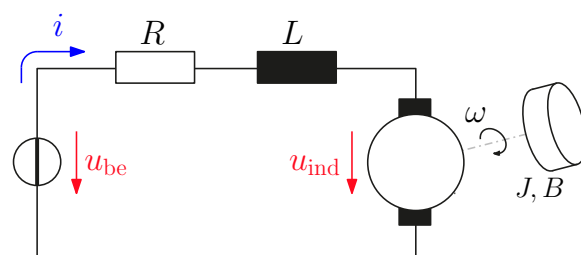
A DC motorok rendszerint egy álló (*stator*) és egy forgó (*rotor*) részből állnak. A szükséges homogén mágneses mezőt az álló részben található állandó mágnes biztosítja, illetve ebben a mezőben helyezkedik el a tekercselt forgórész. Működése szempontjából a motor egy állandó mágneses mezőben forgó vezető keretként modellezhető, melynek elvi felépítését az 1a. ábra szemlélteti.

Az egyenáramú motor működése leírható az 1b. ábrán látható helyettesítő kép segítségével, mely alapján a motor villamos egyenlete

$$u_{be} = Ri + L \frac{di}{dt} + u_{ind}, \quad (8)$$



(a) Egyenáramú villamos gép elvi felépítése



(b) DC motor helyettesítő képe

ahol az R ellenállás és L induktivitás képes modellezni a forgórész tekercselését, a körben i időfüggő áram folyik az u_{be} időben változó feszültség hatására. A mágneses mezőben ω időfüggő szögsebességgel forgó vezető keret $u_{ind} = k_e \omega$, szintén időben változó feszültséget indukál, ahol k_e az ún. elektromos állandó, melynek értéke az állandó mágnes pólusai között létrejövő mágneses indukciótól és a vezető keret keresztmetszetének területétől függ. A hajtás mozgásegyenlete

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_v - B\omega \quad (9)$$

ahol az $M_v = k_m i$ villamos nyomaték felelős a motor gyorsításáért, illetve k_m az ún. nyomatékállandó, melynek értéke k_e -hez hasonlóan az állandó mágnes pólusai között létrejövő mágneses indukciótól és a vezető keret keresztmetszetének területétől függ. A motor tehetetlebségi nyomatéka J és viszkózus csillapítás a B .

Amennyiben a szabályozni kívánt jellemző a szögsebesség, a DC motor állapottér modellje az alábbi formában írható fel

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k_e}{L} \\ \frac{k_m}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{DC}} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{DC}} u_{be} \quad (10)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{DC}} \begin{bmatrix} i \\ \omega \end{bmatrix}.$$

3.2. Az analitikus tervezés lehetősége

Olyan, alacsony komplexitású lineáris rendszerek esetén, mint a DC motorok, lehetséges az LQ szabályozás analitikus módszerekkel történő tervezése is. Az állapottér modellből kiindulva (10) a súlymátrixok

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, q_2) \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = r, \quad (11)$$

mivel az állapotváltozók száma $n = 2$, illetve a rendszer SISO. A (7) Ricatti egyenlet megoldásával meghatározható \mathbf{P} mátrix, majd az állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozáshoz szükséges szabályozási paraméterek is (5),

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{p_{11}}{Lr} & \frac{p_{12}}{Lr} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{N} = \frac{Bp_{11} + k_m p_{12} + L(k_e k_m + BR)r}{Lk_m r} \quad (12)$$

ahol p_{11} és p_{12} a \mathbf{P} mátrix tagjai. A rendszer pólusai meghatározhatóak az ún. karakterisztikus egyenlet, $p(s) = \det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) = 0$ megoldásával, illetve felírhatóak az alábbi

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} i \quad (13)$$

alakban is. A rendszerválaszt leíró paraméterek, a sajátkörfrekvencia (ω_n) és relatív csillapítási tényező (ζ) ennek megfelelően kifejezhetőek az alábbi módon

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{JL} \sqrt{k_m^2 \left(k_e^2 + \frac{q_2}{r} \right) + B \left(B \frac{q_1}{r} + BR^2 + 2k_e k_m R \right)}} \quad (14)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\frac{1}{L} \left(J \frac{q_1}{r} + JR^2 - 2k_e k_m L \right) + \frac{B^2 L}{J}}{\sqrt{k_m^2 \left(k_e^2 + \frac{q_2}{r} \right) + B \left(B \frac{q_1}{r} + BR^2 + 2k_e k_m R \right)}} + 2}.$$

Látható, hogy a rendszer viselkedését a q_1/r és q_2/r arányok határozzák meg. A sajátkörfrekvencia értéke ezen arányok növelésével növekszik, míg a relatív csillapítási tényező értéke q_1/r növelésével nő és q_2/r növelésével csökken. Ennek megfelelően megállapítható a relatív csillapítási tényező (ζ) minimálisan elérhető

$$\zeta_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (15)$$

értéke. Tehát egy $n = 2$ állapotváltozóval rendelkező rendszer esetén az LQ szabályozás tervezése során nem tetszőlegesen, hanem egy adott, minimális értékig választható meg a rendszer relatív csillapítási tényezője.

Amennyiben adott ω_n , illetve ζ értékek megvalósítása a cél, az alábbi tervezési ajánlások vehetők figyelembe

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{r} &= -R^2 + \frac{L}{J^2} (2Jk_e k_m - B^2 L) + 2L^2 \omega_n^2 (2\zeta^2 - 1) \\ \frac{q_2}{r} &= -k_e^2 + \frac{B}{J^2 k_m^2} (B^3 L^2 - 2Jk_e k_m (BL - JR)) + \frac{L^2 \omega_n^2}{k_m^2} (J^2 \omega_n^2 - 2B^2 (2\zeta^2 - 1)) \end{aligned} \quad (16)$$

tehát a q_i/r ($i = 1, 2$) arányokra folyhat a tervezés.

3.3. A szabályozás tervezése a Bryson-szabály által

Az LQ szabályozás tervezése során egy elterjedt módszer az ún. Bryson-szabály alkalmazása. Az ezen módszer segítségével meghatározott súlymátrixok paramétereit gyakran szükséges tovább pontosítani, így kiegészítve a tervezést a paraméterek hangolásával, optimalizálásával [13, 14]. A módszer lényege, hogy a \mathbf{Q} és \mathbf{R} mátrixok, mint diagonális mátrixok kerülnek meghatározásra, melyek főátlóbeli elemeinek értékei az x_i állapotváltozók és u_j bemenetek maximális értékeinek négyzeteinek reciprokával egyeznek meg [15]. Ennek megfelelően

$$q_{ii} = \frac{1}{x_{i,\max}^2} \quad \text{és} \quad r_{jj} = \frac{1}{u_{j,\max}^2}, \quad (17)$$

ahol q_{ii} a \mathbf{Q} mátrix és r_{jj} az \mathbf{R} mátrix főátlójának értékei, illetve $i = 1, 2 \dots n$ és $j = 1, 2 \dots m$ az állapotváltozók, illetve bemenetek számát jelölik. A sajátkörfrekvencia, illetve relatív csillapítási tényező értékei ez esetben az alábbi alakban írhatók fel

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\frac{1}{JL} \sqrt{k_m^2 \left(k_e^2 + \left(\frac{u_{\max}}{\omega_{\max}} \right)^2 \right) + B \left(B \left(\frac{u_{\max}}{i_{\max}} \right)^2 + BR^2 + 2k_e k_m R \right)}} \\ \zeta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\frac{\omega_{\max} i_{\max}}{L} \left(J \left(\frac{u_{\max}}{i_{\max}} \right)^2 + JR^2 - 2k_e k_m L \right) + B^2 \frac{\omega_{\max} i_{\max} L}{J}}{\sqrt{k_m^2 i_{\max}^2 (u_{\max}^2 + k_e^2 \omega_{\max}^2) + B \omega_{\max}^2 (B u_{\max}^2 + i_{\max}^2 (BR^2 + 2k_e k_m R))}}} + 2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Ezen összefüggések esetén is látható ζ minimális értéke (15), azonban egy átlagos DC motor katalógusadatainak nagyságrendjeit figyelembe véve megállapítható, hogy a Bryson-szabály által tervezett LQ szabályozás esetén a szabályozott rendszert nagymértékű csillapítás jellemzi.

A vizsgált, Maxon gyártmányú, RE 25 típusú, 118746 azonosító számú DC motor esetén, a névleges (*nominal*) értékekkel

$$u_n = 24 \text{ V}, \quad \Omega_n = 432,493 \text{ rad/s} \quad \text{és} \quad i_n = 0,652 \text{ A} \quad (19)$$

számolva, ω_n és ζ értékei

$$\omega_n = 430,218 \text{ rad/s} \quad \text{és} \quad \zeta = 52,5422. \quad (20)$$

4. A MEGVALÓSÍTHATÓ MINŐSÉGI JELLEMZŐK VIZSGÁLATA

Villamos hajtások esetén a megfelelő minőségi jellemzők beállítása kiemelten fontos szempontja a szabályozás tervezésének. Ilyen minőségi jellemző lehet a százalékos túllövés

$$\Delta y = e^{\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad (21)$$

illetve a beállási idő

$$t_s = \frac{1}{\zeta \omega_n} \ln \left(\frac{100}{\alpha} \right), \quad (22)$$

5%-os sávot feltételezve az állandósult érték körül ($\alpha = 5$) [16]. Fontos megjegyezni, hogy a százalékos túllövés abban az esetben értelmezhető, ha $\zeta \in [0,1]$ és ennek megfelelően a pólusok, $s_{1,2} \in \mathbb{C}$ komplex konjugált párt alkotnak. A paraméterek kifejezhetőek a motor, illetve a szabályozás paramétereivel,

$$\Delta y = e^{-\pi \sqrt{\frac{2+b}{2-b}}}, \quad t_s = 2 \ln \left(\frac{100}{\alpha} \right) \sqrt{\frac{JL}{a(2+b)}}, \quad (23)$$

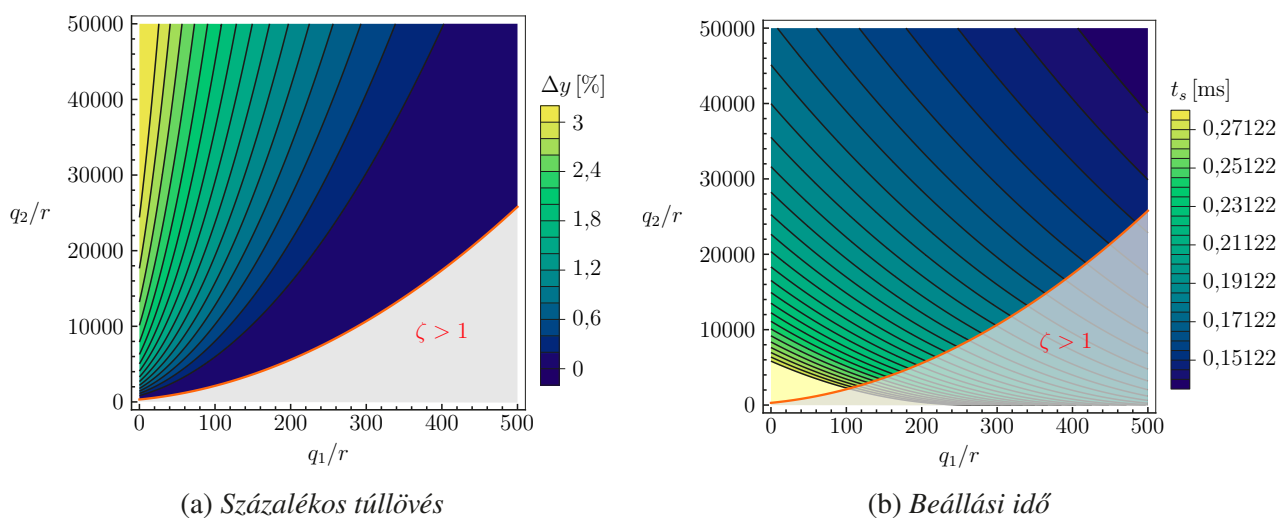
ahol

$$a = \sqrt{k_m^2 \left(k_e^2 + \frac{q_2}{r} \right) + B \left(B \frac{q_1}{r} + BR^2 + 2k_e k_m R \right)} \quad \text{és} \quad b = \frac{\frac{1}{L} \left(J \frac{q_1}{r} + JR^2 - 2k_e k_m L \right) + \frac{B^2 L}{J}}{a}. \quad (24)$$

Ez esetben is a q_i/r ($i = 1,2$) arányok határozzák meg a paraméterek értékeit, q_1/r növelésével a százalékos túllövés és a beállási idő értéke csökken, míg q_2/r növelésével a százalékos túllövés értéke nő, a beállási idő értéke viszont csökken. Meghatározható ennek megfelelően a maximális túllövés és a maximális beállási idő értéke, melyek

$$\Delta y_{\max} = e^{-\pi} \quad \text{és} \quad t_{s,\min} = \ln \left(\frac{100}{\alpha} \right) \sqrt{\frac{2JL}{\frac{1}{L} (JR^2 - 2k_e k_m L) + \frac{B^2 L}{J}}}. \quad (25)$$

A minőségi jellemzők és a szabályozási paraméterek kapcsolatát a 2. ábra szemlélteti, ahol a narancssárga görbe mentén $\zeta = 1$, azaz a minőségi jellemzők értelmezhetőségének határát szemlélteti.



2. ábra. A minőségi jellemzők és a szabályozási paraméterek közti kapcsolat

Adott minőségi jellemzők eléréséhez az alábbi tervezési ajánlások vehetők figyelembe

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{r} &= -R^2 + \frac{L}{J^2} \left(2Jk_e k_m - B^2 L \right) + 2L^2 \frac{\ln^2 \left(\frac{100}{\alpha} \right)}{t_s^2 \ln^2 (\Delta y)} \left(\ln^2 (\Delta y) - \pi^2 \right) \\ \frac{q_2}{r} &= -k_e^2 + \frac{B}{J^2 k_m^2} \left(B^3 L^2 - 2Jk_e k_m (BL - JR) \right) \\ &+ \frac{L^2 \ln^2 \left(\frac{100}{\alpha} \right)}{k_m^2 t_s^4 \ln^4 (\Delta y)} \left(2B^2 t_s^2 \ln^2 (\Delta y) \left(\pi^2 - \ln^2 (\Delta y) \right) + J^2 \ln^2 \left(\frac{100}{\alpha} \right) \left(\pi^2 + \ln^2 (\Delta y) \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (26)$$

a tervezés ez esetben is a q_i/r ($i = 1,2$) arányokra folyhat.

5. KONKLÚZIÓ

A tanulmány során bemutatásra került a lineáris kvadratikus szabályozási (LQR) stratégia elméleti háttere és annak analitikus tervezési folyamata egyenáramú (DC) motorok esetén. A vizsgálat fő célja a szabályozási paraméterek közvetlen, zárt alakú egyenletek általi meghatározása volt, amivel jelentősen csökkenthetőek az iteratív módszerekből vagy a különböző optimalizációs algoritmusokból adódó számítási nehézségek.

A tervezés során vizsgálatra kerültek a rendszerválaszt leíró sajátkőrfrekvencia (ω_n), relatív csillapítási tényező (ζ) paraméterek, illetve a százalékos túllövés (Δy) és beállási idő (t_s) minőségi jellemzők is. Feltérképezésre kerültek ezen felül a megvalósítható paraméterek elméleti határai is. A vizsgálatok alapján megállapítható, hogy LQ szabályozás tervezése esetén a rendszer lehetséges viselkedése korlátozott, a módszer alsó határt szab a csillapítottság mértékének.

Mindezen felül vizsgálatra kerültek a gyakran alkalmazott Bryson-szabály korlátai is, a módszer villamos hajtások esetén kiemelkedően magas csillapítást eredményez. Végül olyan tervezési ajánlások kerültek megfogalmazásra, amelyek segítségével megtervezhető az optimális szabályozás, illetve meghatározhatóak a paraméterek arányaira vonatkozó feltételek, a kívánt minőségi jellemzők elérése érdekében.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] S. J. Chacko and R. J. Abraham, „On LQR controller design for an inverted pendulum stabilization,” *International Journal of Dynamics and Control*, vol. 11, no. 4, pp. 1584–1592, Nov. 2022. doi:10.1007/s40435-022-01079-0
- [2] A. Umar, S. H. Haruna, A. Y. Zubairu, S. Yusuf, D. Musbahu, and I. Abdulwahab, „Performance evaluation of the DC motor using robust H-Infinity and H2 controllers,” in *2024 IEEE 5th International Conference on Electro-Computing Technologies for Humanity (NIGERCON)*. IEEE, Nov. 2024. doi:10.1109/nigercon62786.2024.10927334 pp. 1–6.
- [3] Y. A. Shafeek and H. I. Ali, „Attaining robust stability and performance for triple inverted pendulum using H-infinity control,” *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, vol. 12, no. 2, pp. 512–522, Feb. 2025. doi:10.18280/mmepp.120216
- [4] D. S. Naidu, *Optimal control systems*, 2003, ch. Linear Quadratic Optimal Control Systems I, pp. 101–151. ISBN 0-8493-0892-5
- [5] S. J. Chacko, N. P.C., and R. J. Abraham, „Optimizing LQR controllers: A comparative study,” *Results in Control and Optimization*, vol. 14, p. 100387, Mar. 2024. doi:10.1016/j.rico.2024.100387
- [6] D. Ivanova and N. Valov, „LQR-based PID control of DC motor speed,” in *2024 9th International Conference on Energy Efficiency and Agricultural Engineering (EE&AE)*. IEEE, Jun. 2024. doi:10.1109/eeae60309.2024.10600621 pp. 1–5.
- [7] M. Nicola and C.-I. Nicola, „Improved performance for PMSM control system based on LQR controller and computational intelligence,” in *2021 International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET)*. IEEE, Dec. 2021. doi:10.1109/icecet52533.2021.9698758 pp. 1–6.
- [8] L. Guarnaccia, R. Bevilacqua, and S. P. Pastorelli, „Suboptimal LQR-based spacecraft full motion control: Theory and experimentation,” *Acta Astronautica*, vol. 122, pp. 114–136, May 2016. doi:10.1016/j.actaastro.2016.01.016
- [9] B. Lantos, *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I*. Akadémiai Kiadó, 2016. ISBN 978-963-059-848-4
- [10] R. Tedrake, *Underactuated Robotics*, 2023, ch. Linear Quadratic Regulators. [Online]. Available: <https://underactuated.csail.mit.edu/lqr.html>
- [11] J. P. Hespanha, *Linear systems theory*, second edition ed. Princeton: Princeton University Press, 2018, ch. LQR/LQG Optimal Control. ISBN 9780691179575 Includes bibliographical references and index.
- [12] S. Khatoon, D. Gupta, and L. K. Das, „PID & LQR control for a quadrotor: Modeling and simulation,” in *2014 International Conference on Advances in Computing, Communications and Informatics (ICACCI)*. IEEE, Sep. 2014. doi:10.1109/icaccci.2014.6968232
- [13] B. Károly, „Aktív belépőél felü megcsapolás dinamikai modellje centrifugálkompresszorok pompázs-szabályozására,” *Repüléstudományi Közlemények*, 2013. [Online]. Available: https://www.repulestudomany.hu/kulonszamok/2013_cikkek/2013-2-13-Beneda_Karoly.pdf
- [14] E. Okyere, A. Bousbaine, G. T. Poyi, A. K. Joseph, and J. M. Andrade, „LQR controller design for quad-rotor helicopters,” *The Journal of Engineering*, vol. 2019, no. 17, pp. 4003–4007, Jun. 2019. doi:10.1049/joe.2018.8126
- [15] Q.-R. Hong, P.-I. Chan, W.-K. Sou, C. Gong, and C.-S. Lam, „Linear quadratic regulator optimal control with integral action (LQRIC) for LC-coupling hybrid active power filter,” *Applied Sciences*, vol. 12, no. 19, p. 9772, Sep. 2022. doi:10.3390/app12199772
- [16] C. Budai, T. Tóth-Katona, and P. Stumpf, „Novel design method for cascade control structure of electric drives: Closed-form expressions for control gains via pole placement,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 18, no. 17, pp. 2448–2467, Oct. 2024. doi:10.1049/cth2.12747