

Gerjesztett folyadéklengések modellezése ürülő tartályokban

Modelling of Sloshing in Emptying Containers under Excitation

MAKOVSKY Mihály Miklós, KALMÁR-NAGY Tamás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Áramlástan Tanszék
H-1111 Budapest, Bertalan Lajos u. 4-6. Telefon: +36-1-463-4072, Fax: +36-1-463-3464
Honlap: www.ara.bme.hu, E-mail: mihalmakovsky2000@gmail.com, kalmar.nagy.tamas@gpk.bme.hu

Abstract

In our paper, we analyze the sloshing dynamics inside an emptying container, using a time-dependent mass-spring model. We divide the fluid into two parts: impulsive and convective zones. The equation of motion is given as an equivalent mechanical model. Due to the variable mass, additional terms occur in the equation of motion. Nondimensionalizing and simplifying the equation of motion, we derive a second order ODE with time-dependent parameters. We analyze the change of sloshing frequency as a function of the liquid height and the system's response to different excitations. Using the Liouville-transformation and the Bellman-approximation, we provide a closed-form, analytic approximation for the time-varying amplitude and phase of the oscillations. The results are validated with numerical simulation.

Keywords: Sloshing dynamics, mass-spring model, emptying container, variable-coefficient ODE, resonance passage

Kivonat

Cikkünkben hengeres tartályokban fellépő folyadék-lengések, lötyögés (sloshing) tömeg-rugó-csillapítás modelljét tárgyaljuk ürülés során, figyelembe véve a tartályra ható külső gerjesztéseket, különös figyelmet fordítva a rakétákra ható terhelésekre. A folyadékot impulzív és konvektív zónákra osztjuk. A mozgásegyenletet egy ekvivalens mechanikai rendszer egyenleteként adjuk meg, ahol a tömeg és a rugóállandók időben változnak az ürülő folyadék miatt. A változó tömeg következményeként az egyenletben csillapítás-szerű tagok jelennek meg. Az egyenletrendszer dimenziótlanításával és a magasabb módusok elhanyagolásával egy másodrendű, időben változó együtthatójú közönséges differenciálegyenlethez jutunk. Analizáljuk a sajátfrekvencia-folyadékmagasság parameter síkon a rendszer viselkedését, és a rendszer különböző gerjesztésekre adott válaszát. A Liouville-transzformáció és a Bellman-féle aszimptotikus alak segítségével zárt alakú, analitikus közelítést adunk az időben változó amplitudóra és fázisra. Az eredményeket numerikus szimulációkkal összevetve demonstráljuk a közelítés pontosságát közepes-és magas telítettségű tartályokra.

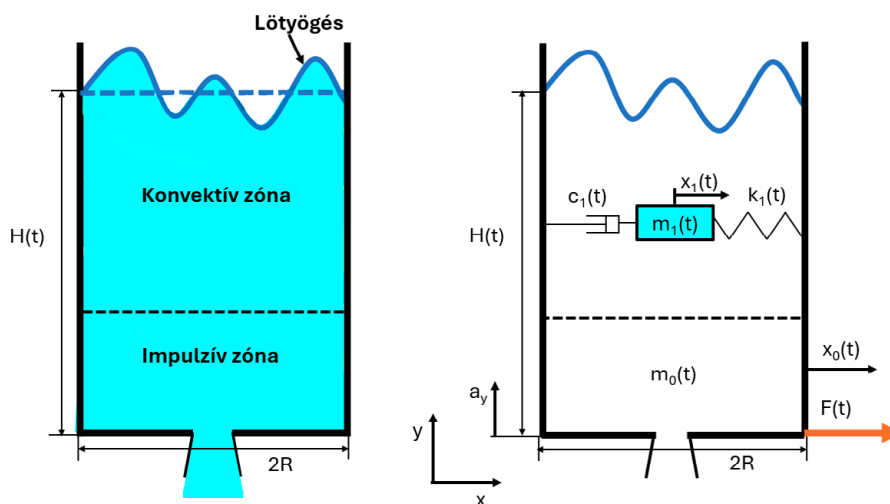
Kulcsszavak: Lötyögés, tömeg-rugó modell, ürülő tartály, változó együtthatójú közönséges differenciálegyenlet, rezonanciaátmenet

1. BEVEZETÉS

A folyadék-lötyögés tartályokban egy gyakori jelenség, ami számos mérnöki problémában megjelenik, mint például tartályhajók, tartálykocsik, futószalagon szállított folyadékok, vagy rakéták esetén. A folyadéklengések frekvenciájának, amplitudójának, csillapításának az ismerete elengedhetetlen az ilyen rendszerek tervezéséhez, vezérléséhez. Ibrahim könyvében [1] részletes összefoglaló található a lötyögés modellezési lehetőségeiről. A modellek két fő csoportra oszthatók: az elosztott paraméterű és a koncentrált paraméterű modellekre.

Az elosztott paraméterű modellek a folyadékot kontinuumként írják le. Az így kapott parciális differenciálegyenletek leggyakoribb megoldásai módszere a numerikus, CFD szimuláció. Ezek a módszerek bár nagy pontosságúak, a számítások erőforrásigényesek. A koncentrált paraméterű modellek ekvivalens mechanikai modellek használnak. Az így kapott közönséges differenciálegyenletek erőforrásigénye jóval alacsonyabb, pontosságuk sok alkalmazáshoz megfelelő, és az elosztott paraméterű modellekkel ellentétben a rendszer viselkedésébe is nagyobb betekintést nyújtanak.

Konferenciánkban egy tömeg-rugó-csillapítás modellt szeretnénk bemutatni a lötyögés leírására.



1. ábra. A folyadékok lengésének tömeg-rugó modellje

Cikkünket elsősorban a rakéta üzemanyagtartályokban fellépő lengések leírása motiválta, ahol a tartályok a rakéta mozgása során folyamatosan ürülnek. Így a modellünk figyelembe veszi a folyadékoszlop magasságának változását is, egy időben változó együtthatójú közönséges differenciálegyenletet kapunk. Itt ezt a mozgásegyenletet elemezzük, vizsgáljuk a különböző gerjesztésekre adott válaszát, illetve egy közelítő, analitikus megoldást is bemutatunk.

2. A LÖTYÖGÉS TÖMEG-RUGÓ MODELLJE

Csak hengeres tartályokkal foglalkozunk. A tartály geometriája a 1. ábrán látható. A tartály ürülése miatt a folyadékoszlop magasságát leíró $H(t)$ függvény időfüggő.

A tartály egy vízszintes irányban ható erővel van gerjesztve, a függőleges gyorsulása a_y . A tartályban lévő folyadék két részre osztható. Az alsó, impulzív zóna nem vesz részt a löttyögésben, a tartállyal együtt mozog, ennek tömege $m_0(t)$. A folyadék, általában nagyobb felső része a konvektív zóna, ahol a folyadék lengések kialakulnak. Az egyes lengési módusokat leíró tömegek egy rugóállandóval és egy csillapítással csatlakoznak a tartályhoz. Jelen cikkünkben csak az első módust vesszük figyelembe. A tartály alján lévő nyíláson át ürül a folyadék. A kiáramló folyadék az impulzív zonához képest nem rendelkezik relatív vízszintes sebességkomponenssel.

A folyadék teljes tömege:

$$m_{tot}(t) = m_0(t) + m_1(t). \quad (1)$$

Az impulzív tömeg $m_0(t)$ vízszintes elmozdulása $x_0(t)$, míg $x_1(t)$ az $m_1(t)$ konvektív tömeg vízszintes elmozdulása.

Az (1)-es ábrán látható rendszer mozgásegyenlete az alábbi módon írható fel (lásd [1], 299. oldal, 5.5a és 5.5b egyenletek):

$$\begin{aligned} m_0(t)\ddot{x}_0(t) + \dot{m}_1(t)(\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)) + c_1(t)(\dot{x}_0(t) - \dot{x}_1(t)) + k_1(t)(x_0(t) - x_1(t)) &= F(t), \\ m_1(t)\ddot{x}_1(t) + c_1(t)(\dot{x}_1(t) - \dot{x}_0(t)) + k_1(t)(x_1(t) - x_0(t)) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

A kezdeti feltételek: $x_1(0) = x_{1,0}$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{1,0}$, ahol $x_{1,0}$, $\dot{x}_{1,0}$ a kezdeti pozíció és sebesség. Legyen

$$\omega_1^2(t) = \frac{k_1(t)}{m_1(t)}, \quad \nu_1^2(t) = \frac{k_1(t)}{m_0(t)}, \quad (3)$$

a csillapítási tényező

$$\zeta_1(t) = \frac{c_1(t)}{2m_1(t)\omega_1(t)}, \quad (4)$$

és

$$f(t) = \frac{F(t)}{m_0(t)}. \quad (5)$$

A 2. egyenlet két egyenletét $m_0(t)$ -vel, illetve $m_1(t)$ -vel leosztva és egymásból kivonva, bevezetve $z_1(t)$ -t:

$$z_1(t) = x_0(t) - x_1(t), \quad (6)$$

és felhasználva az $\omega_1(t)$, $\nu_1(t)$, $\zeta_1(t)$ és $f(t)$ változókat, a (2)-es egyenlet az alábbi alakban írható fel:

$$\ddot{z}_1(t) + 2\zeta_1(t)\omega_1(t)\dot{z}_1(t) + \omega_1^2(t)z_1(t) + \left(2\zeta_1(t)\omega_1(t)\frac{m_1(t)}{m_0(t)} - \frac{\dot{m}_1(t)}{m_0(t)}\right)\dot{z}_1(t) + \nu_1^2(t)z_1(t) = f(t), \quad (7)$$

az alábbi kezdeti feltételekkel: $z_1(0) = z_{1,0} = x_{0,0} - x_{1,0}$, $\dot{z}_1(0) = v_{1,0} = \dot{x}_{0,0} - \dot{x}_{1,0}$, ahol $z_{1,0}$ a kezdeti relatív kitérés és $v_{1,0}$ a kezdeti relatív sebesség.

A konvektív tömeg és a hozzá tartozó rugóállandó az alábbi képletekkel adható meg hengeres tartályok esetén (lásd [1], 299. oldal, 5.1d és 5.15a egyenlete):

$$m_1(t) = \frac{2R \tanh\left(\xi_{11} \frac{H(t)}{R}\right)}{H(t)\xi_{11}(\xi_{11}^2 - 1)} m_{tot}(t), \quad (8)$$

$$k_1(t) = \frac{2g_{eff} \tanh^2\left(\xi_{11} \frac{H(t)}{R}\right)}{H(t)(\xi_{11}^2 - 1)} m_{tot}(t), \quad (9)$$

ahol az effektív gravitációs gyorsulás

$$g_{eff} = g + a_y. \quad (10)$$

ξ_{11} az elsőfajú, elsőrendű Bessel-függvény első gyöke:

$$\xi_{11} = 1.84. \quad (11)$$

A (7)-es egyenlet dimenziótlanítható az alábbi dimenziótlan idő (\hat{t}) és dimenziótlan elmozdulás \hat{z}_1 bevezetésével:

$$t = T\hat{t}, \quad z_1 = X\hat{z}_1, \quad (12)$$

ahol

$$T = \sqrt{\frac{R}{g_{eff}\xi_{11}}}, \quad X = \frac{R}{\xi_{11}} \quad (13)$$

az új idő-és elmozdulás skálák skálafaktorai. Jelöljük a \hat{t} szerinti deriválást a következő módon: $\hat{\cdot} = \frac{d}{d\hat{t}} = \frac{1}{T} \frac{d}{dt}$, továbbá vezessük be a dimenziótlan folyadék magasságot:

$$h(\hat{t}) = \frac{H(\hat{t})}{X} = \xi_{11} \frac{H(\hat{t})}{R}, \quad (14)$$

illetve az alábbi dimenziótlan mennyiségeket:

$$\omega_1^2(\hat{t}) = \frac{k_1(\hat{t})}{m_1(\hat{t})} T^2 = \frac{g_{eff}\xi_{11}}{R} T^2 \tanh\left(\xi_{11} \frac{H(\hat{t})}{R}\right), \quad (15)$$

$$\nu_1(\hat{t})^2 = \frac{k_1(\hat{t})}{m_0(\hat{t})} T^2 = \omega_1(\hat{t})^2 \frac{m_1(\hat{t})}{m_0(\hat{t})}, \quad (16)$$

$$f(\hat{t}) = \frac{1}{m_0(\hat{t})} \frac{T^2}{X} F(\hat{t}), \quad (17)$$

ahol $f(\hat{t})$ a dimenziótlan gerjesztő erő. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a dimenziótlan időt t -vel, a dimenziótlan elmozdulást pedig z_1 -vel fogjuk jelölni. Vezessük be az effektív csillapítási tényezőt:

$$\zeta_{eff}(t) = \left(1 + \frac{m_1(t)}{m_0(t)}\right) \zeta_1(t) - \sqrt{\frac{g_{eff}\xi_{11}}{R} \frac{1}{2\omega_1(t)} \frac{m_1'(t)}{m_0(t)}}. \quad (18)$$

Vezessük be a pillanatnyi körfrekvenciát:

$$\Omega^2(h(t)) = \omega_1^2(t) + \nu_1^2(t) = \frac{\tanh h(t)}{1 - \alpha \frac{\tanh h(t)}{h(t)}}, \quad (19)$$

ahol

$$\alpha = \frac{2}{\xi_{11}^2 - 1}. \quad (20)$$

Az $\Omega(h(t))$ függvénynek a $h^* = 0.734$ helyen maximum helye van, itt $\Omega(h^*) = 1.48$. Nagy $h(t)$ esetén $\Omega(h(t))$ aszimptotikusan tart 1-hez. A (7)-es egyenlet így az alábbi egyszerűsített, dimenziótlan alakban írható fel (az egyszerűség kedvéért a $_1$ indexet elhagyva):

$$z''(t) + 2\zeta_{eff}\omega(t)z'(t) + \Omega^2(h(t))z(t) = f(t). \quad (21)$$

A kezdeti feltételek: $z_1(0) = z_0$, $z_1'(0) = v_0$. A (21)-es egyenlet egy inhomogén, másodrendű, közönséges differenciál-egyenlet időben változó együtthatókkal.

3. A MOZGÁSEGYENLET MEGOLDÁSA

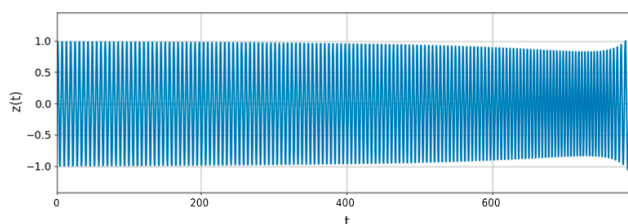
A tartály ürítését a $h(t)$ függvény írja le, ahol $h(t)$ (i) szigorúan pozitív, (ii) monoton csökkenő (ürülő tartály), (iii) folytonosan deriválható. Homogén esetben a mozgásegyenlet:

$$z''(t) + 2\zeta_{eff}\omega(t)z'(t) + \Omega^2(h(t))z(t) = 0. \quad (22)$$

A negyedfokú Runge-Kutta numerikus megoldáshoz az alábbi $h(t)$ függvényt és paramétereket használunk:

$$h(t) = h(0) - ct, \quad z(0) = 1, \quad z'(0) = 0, \quad h(0) = 8, \quad c = 0.01, \quad \zeta_{eff} = 0.0001. \quad (23)$$

A 2. ábra $z(t)$ -t mutatja $\Omega(t) = \sqrt{\frac{\tanh h(t)}{1 - \alpha \frac{\tanh h(t)}{h(t)}}}$ mellett.



2. ábra. A homogén mozgásegyenlet $z(t)$ megoldása.

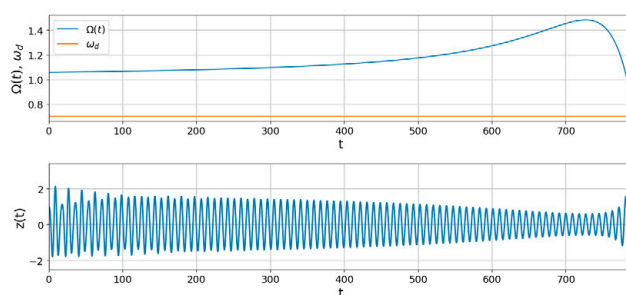
A 2. ábrán látható, hogy az ürülés során a folyadékklengés frekvenciája lassan emelkedik, majd a $\Omega(h^*)$ maximum értéket elérve elkezd gyorsan csökkenni. Az amplitudó fordítva változik: $\Omega(h^*)$ -nál éri el a minimumát, majd a mozgás végén hirtelen megemelkedik.

Az inhomogén, gerjesztett mozgásegyenlet megoldásához legyen

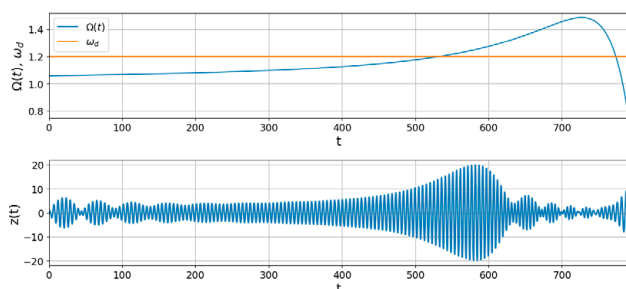
$$f(t) = B \cos(\omega_d t), \quad (24)$$

ahol B a gerjesztés amplitúdója, míg ω_d a gerjesztés körfrekvenciája. Két különböző gerjesztést vizsgálunk: nem-rezonáns gerjesztés, ha $\omega_d \geq \max \Omega(h(t))$, és rezonáns gerjesztés, ha $\omega_d \leq \max \Omega(h(t))$.

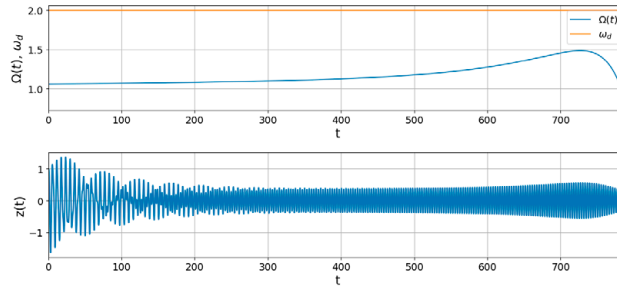
A 3., 4. és 5. ábrák $z(t)$ -t mutatják nem-rezonáns és rezonanciaátmenettel rendelkező gerjesztések esetén. A gerjesztés amplitúdója mindhárom esetben $B = 1$, míg a gerjesztő frekvencia: $\omega_d = 0.7$ (egyetlen rezonanciaátmenet), $\omega_d = 1.2$ (két rezonanciaátmenet) és $\omega_d = 2$ (nem-rezonáns). A megoldáshoz $\zeta_{eff} = 0.01$ -et használtunk.



3. ábra. $z(t)$ egyetlen rezonanciaátmenet esetén, $\omega_d = 0.7$



4. ábra. $z(t)$ rezonanciaátmenet esetén, $\omega_d = 1.2$


 5. ábra. $z(t)$ nem-rezonáns gerjesztés esetén, $\omega_d = 2$

A 3., 4. és 5. a különböző gerjesztések hatását mutatják. Hasonlóan, egyetlen rezonanciaátmenet $\omega_d = 0.7$ esetén csak minimálisan növeli a lengések amplitudóját, mert az átmenet a lengések frekvenciájához képest gyors. $\omega_d = 1.2$ esetén két rezonanciaátmenet is történik. Az első rezonanciaátmenet lassan történik, így a lengések amplitudója erősen megnő. A második, gyors rezonanciaátmenet már nem változtatja meg érdemben az amplitudót.

4. $z(t)$ KÖZELÍTÉSE

Adott az alábbi dimenzióatlan differenciál-egyenlet:

$$z''(t) + 2\zeta_{eff}\omega(t)z'(t) + \Omega^2(h(t))z(t) = f(t), \quad (25)$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = v_0. \quad (26)$$

A Liouville-transzformáció segítségével a (25)-ös egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$y''(t) + A^2(t)y(t) = f(t). \quad (27)$$

A mi esetünkben $A(t)$ nem adható meg analitikusan $\Omega(h(t))$ bonyolult alakja miatt. Így az együtthatók variációjának módszerét és a Bellman-féle approximációt alkalmazzuk egy közelítő, analitikus megoldás megadására (lásd [2], 88. oldal.) A levezetés hosszassága miatt itt azt nem közöljük, lásd [3]. A végső közelítő, analitikus megoldás:

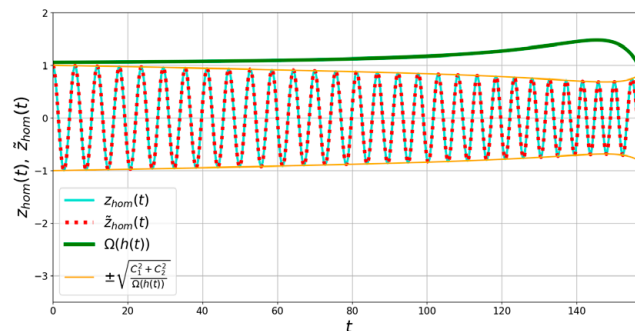
$$z(t) \simeq \tilde{z}(t) := e^{-\int_0^t \Gamma(s) ds} \frac{\cos \theta(t)}{\sqrt{A(t)}} \left(y_0 \sqrt{A(0)} - \int_0^t \frac{\sin \theta(\tau)}{\sqrt{A(\tau)}} e^{\int_0^\tau \Gamma(s) ds} f(\tau) d\tau \right) + e^{-\int_0^t \Gamma(s) ds} \frac{\sin \theta(t)}{\sqrt{A(t)}} \left(\frac{y'_0 + y_0 A'(0)}{\sqrt{A(0)}} + \int_0^t \frac{\cos \theta(\tau)}{\sqrt{A(\tau)}} e^{\int_0^\tau \Gamma(s) ds} f(\tau) d\tau \right), \quad (28)$$

ahol

$$\Gamma(t) = \zeta_{eff}\omega(t), \quad A(t) = \sqrt{\Omega^2(h(t)) - \Gamma^2(t) - \Gamma'(t)}. \quad (29)$$

A 6. ábra a homogén megoldást, $z_{hom}(t)$ -t mutatja 4-ed fokú Runge-Kutta megoldóval számolva (ezt feltételezzük a pontos megoldásnak), illetve a (28)-as egyenletben felírt Bellman közelítést használva ($\tilde{z}_{hom}(t)$), a paraméterek:

$$z_0 = 1, \quad z'_0 = 0, \quad h(t) = h_0 - ct = 10 - 0.1t, \quad \zeta_{eff} = 0.001. \quad (30)$$



6. ábra. $z_{hom}(t)$ 4-ed fokú Runge-Kutta megoldása és a Bellman-approximáció $\tilde{z}_{hom}(t)$, illetve $\Omega(h(t))$ és a burkológörbe $\pm \sqrt{\frac{C_1^2 + C_2^2}{\Omega(h(t))}}$

A 6. ábra mutatja, hogy a Bellman-approximáció nagyon pontosan közelíti a numerikus megoldást. A Bellman-approximációval közelítés adható az amplitudó változásra is, amely a $\frac{1}{\sqrt{\Omega(h(t))}}$ kifejezéssel fordítottan arányosan változik. Ezt a burkológörbét is feltüntettük a 6. ábrán. Mielőtt $\Omega(h(t))$ h^* -nál eléri a maximumát, a Bellman-approximáció hibája 2.5%-on belül marad. A maximum elérése után azonban a hiba gyorsan nő. Kijelenthető tehát, hogy a Bellman-approximáció $h > h^*$ esetén jól használható $z(t)$ közelítésére.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A cikkben bemutatott hengeres tartályokban fellépő folyadék lengések (lötyögés) egy tömeg-rugó modelljét, figyelembe véve a tartály ürülését időfüggő együtthatókkal és a tartály gerjesztését. Az időben változó tömegek fontos következménye további tagok megjelenése a mozgásegyenletben. A mozgásegyenletet dimenziótlanítva és egyszerűsítve bevezettük a lengések pillanatnyi körfrekvenciáját leíró $\Omega(h(t))$ függvényt. Vizsgáltuk a mozgásegyenlet megoldásait és a különböző gerjesztések hatását. A Liouville-transzformáció és a Bellman-közelítés segítségével a mozgásegyenlet megoldására bemutattunk egy analitikus közelítést, amely nagyfokú egyezést mutat a pontos, numerikus megoldással magasabb folyadékoszlopok esetén.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Ibrahim RA (2005) *Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [2] Bellman RE (2003) *Perturbation Techniques in Mathematics, Engineering and Physics*. Dover Publications.
- [3] Makovsky M, Kalmár-Nagy T (2026) *Time-Varying Mass-Spring Model of Sloshing in Emptying Containers under Excitation, under review in Journal of Vibration and Control*.