

Lengőrendszerek stabilizálása digitális PD és act-and-wait stratégiák alkalmazásával

Stabilization of mechanical systems using digital PD and act-and-wait strategies

Kotschy Balázs Levente^{1,2}, Dr. Insperger Tamás^{1,2}

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék
H-1111 Budapest Műegyetem rkp. 5., kotschy@mm.bme.hu, insperger@mm.bme.hu

²HUN-REN-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport, Budapest.

Abstract

In the control of modern mechatronic systems, the application of digital controllers is fundamental; however, time delays resulting from sampling and finite computing time often limit control loop performance or, in critical cases, lead to instability. This work investigates the position control of a mechanical system using a digital proportional-derivative (PD) algorithm and the discrete-time act-and-wait control strategy. By applying the simplest scheme, we determined the parameter regions within which the system remains stable.

Keywords: time-delay, stabilization, act, wait, sampling time

Kivonat

A modern mechatronikai rendszerek irányítása során a digitális vezérlők alkalmazása alapvető, azonban a mintavételezésből és a véges számítási időből adódó időkések gyakran korlátozzák a szabályozási kör teljesítményét, vagy kritikus esetben instabilitáshoz vezethetnek. Jelen munka egy mechanikai rendszer pozíció-szabályozását vizsgálja egy digitális arányos-differenciáló (PD) algoritmus, valamint a diszkrét idejű act-and-wait irányítási stratégia alkalmazásával. A legegyszerűbb séma alkalmazásával meghatároztuk azokat a paramétertartományokat, amelyek mellett a rendszer stabil marad.

Kulcsszavak: időkések, szabályozás, stabilizáció, beavatkozás, várakozás, mintavételezés

1. BEVEZETÉS

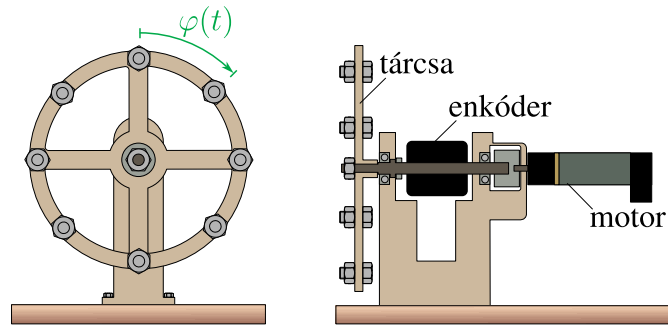
A modern ipari automatizálás és robotika fejlődésével a mechatronikai rendszerek irányítása szinte kizárólagosan digitális mikrokontrollerekre és ipari számítógépekre támaszkodik. Bár a digitális technológia rugalmasságot és komplex algoritmusok futtatását teszi lehetővé, alkalmazása alapvető szabályozástechnikai kihívásokat vet fel. Ezek közül a legkritikusabb a mintavételezésből, az adatfeldolgozásból és a véges számítási időből eredő időkések. Egy hagyományos, folytonos idejű tervezésen alapuló szabályozó digitális környezetben gyakran nem éri el a kívánt teljesítményt, vagy - a mintavételi idő növekedésével - a rendszer elveszítheti stabilitását.

Jelen munka célja egy torziós mechanikai rendszer pozíció-szabályozásának vizsgálata, különös tekintettel a kritikus időkések kezelésére. A dolgozat összehasonlítja a széles körben alkalmazott digitális arányos-differenciáló (PD) szabályozót a speciálisan időkéseleltetett rendszerekre kifejlesztett act-and-wait [1, 2, 3, 4, 5] stratégiával. Ez utóbbi módszer lényege, hogy a beavatkozó jelet időszakosan szünetelteti.

A fejezetek során bemutatjuk a vizsgált mechanikai rendszer dinamikai modelljét, levezetjük a stabilitási kritériumokat mindkét stratégia esetén, majd stabilitási térképek és numerikus szimulációk segítségével igazoljuk, hogy az act-and-wait módszer jelentősen képes kiterjeszteni a stabil működési tartományt és csökkenteni a szabályozási folyamat energiaigényét.

2. MECHANIKAI MODELL

A különböző szabályozási stratégiák teljesítményét és stabilitási tulajdonságait egy torziós, egy szabadsági fokú mechanikai rendszeren keresztül vizsgáljuk, amelynek sematikus vázlatát az 1. ábrán látható.



1. ábra. A mechanikai rendszer sematikus ábrája.

A rendszer dinamikai állapotát a tárcsa $\varphi(t)$ szögpozíciója írja le. A mozgásegyenletet az alábbi másodrendű differenciálegyenlet határozza meg:

$$\Theta\ddot{\varphi}(t) + c\dot{\varphi}(t) = bu(t) + Q_F(\dot{\varphi}), \quad (1)$$

ahol a rendszer paraméterei a következők:

- $\Theta = 0,000614 \text{ kg m}^2$ a tárcsa tehetetlenségi nyomatéka,
- $c = 0,0003625 \text{ Nms/rad}$ a motor visszaható elektromos erejéből és a csapágyak viszkózus súrlódásából származó csillapítási tényező,
- $b = 0,00603 \text{ Nm/V}$ a motorállandó,
- $Q_F(\dot{\varphi})$ a nemlineáris súrlódást leíró tag:

$$Q_F(\dot{\varphi}) = \begin{cases} \in [-F_s, F_s], & \text{ha } \dot{\varphi} = 0, \\ F_d \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}), & \text{ha } \dot{\varphi} \neq 0, \end{cases} \quad (2)$$

és $F_s = 0,011 \text{ Nm}$, $F_d = 0,0011 \text{ Nm}$.

A szabályozó tervezéséhez és a stabilitásvizsgálathoz a rendszer állapotegyenletét vizsgáljuk. Az állapothatározóknak a szögpozíciót és a szögsebességet választva ($x_1 := \varphi, x_2 := \dot{\varphi} = \dot{x}_1$) a rendszer dinamikája a következő elsőrendű differenciálegyenlettel adható meg:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -c/\Theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ b/\Theta \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} u + \begin{pmatrix} 0 \\ Q_F/\Theta \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Mivel a kutatás fókusza a lineáris szabályozási elméletek alkalmazásán és a digitális időzés hatásain van, a szabályozó tervezése során a nemlineáris súrlódási tagokat elhanyagoljuk. Ez lehetővé teszi a rendszer linearizált modelljének használatát, amely az állapotér-reprezentáció általános alakjára egyszerűsödik:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u. \quad (4)$$

3. ARÁNYOS-DIFFERENCIÁLÓ SZABÁLYOZÁS

A hagyományos szabályozási stratégiák közül az egyik legelterjedtebb megoldás a digitális arányos-differenciáló (PD) szabályozó. Ebben az esetben a mintavételezési időközök alatt a beavatkozó jel értéke állandó, és azt a korábban mintavételezett állapotértékek határozzák meg:

$$u_j = P\varphi_{j-1} + D\dot{\varphi}_{j-1}, \quad t \in [j\Delta t, (j+1)\Delta t), \quad (5)$$

ahol Δt [s] a mintavételezési idő, j [1] a mintavételezés futóindexe és P [V/rad], D [Vs/rad] a szabályozó erősítési tényezői. Mivel a mintavételezések között a rendszer dinamikája determinisztikus, így a szabályozás stabilitása meghatározható az egymást követő állapotok közötti diszkrét leképezés alapján [6]

$$\mathbf{x}_{j+1} = e^{\mathbf{A}\Delta t}\mathbf{x}_j + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}s} ds \mathbf{B}u_j. \quad (6)$$

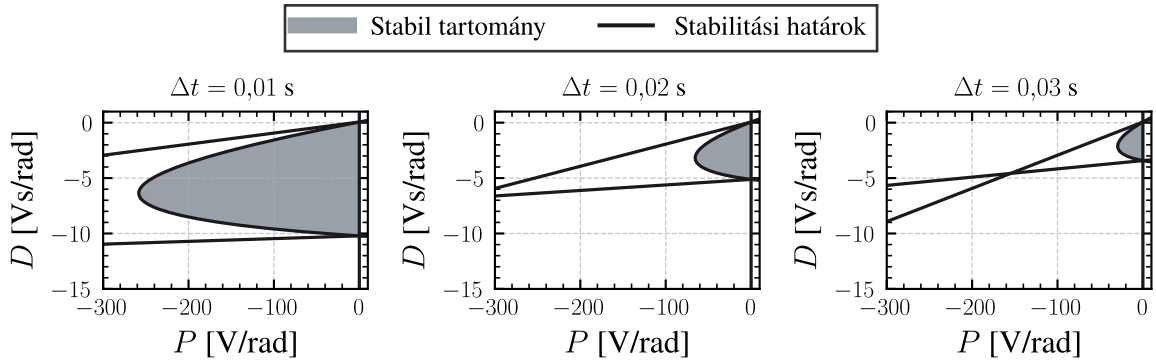
Az időkézés miatt a dinamikai leírást ki kell egészíteni a beavatkozó jellel mint állapotváltozóval. Így a kiterjesztett állapotátviteli mátrix segítségével a diszkrét idejű dinamika az alábbi alakot ölti:

$$\begin{pmatrix} \varphi_{j+1} \\ \dot{\varphi}_{j+1} \\ u_{j+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{\Theta}{c} - \frac{\Theta e^{-\frac{c\Delta t}{\Theta}}}{c} & -\frac{\Theta b}{c^2} + \frac{\Theta b e^{-\frac{c\Delta t}{\Theta}}}{c^2} + \frac{b\Delta t}{c} \\ 0 & e^{-\frac{c\Delta t}{\Theta}} & \frac{b}{c} - \frac{b e^{-\frac{c\Delta t}{\Theta}}}{c} \\ P & D & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}} \begin{pmatrix} \varphi_j \\ \dot{\varphi}_j \\ u_j \end{pmatrix} \quad (7)$$

A rendszer aszimptotikus stabilitásának feltétele, hogy a \mathbf{Q} mátrix minden sajátértéke az egységsugarú körön belül helyezkedjen el:

$$\det(\mu\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = 0, \quad |\mu_i| < 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

A stabilitási térképeket a 2. ábra szemlélteti. A stabilitási határok analitikus meghatározásához Möbiustranszformációt és Routh-Hurwitz kritériumot alkalmaztunk. Megfigyelhető, hogy a szabályozás rendkívül érzékeny a mintavételezési időre: a Δt növekedésével a stabil paramétertartomány jelentősen beszűkül.



2. ábra. Arányos-differenciálós szabályozás stabilitási térképe különböző mintavételezések esetén.

4. ACT-AND-WAIT SZABÁLYOZÁS

A következőkben a szabályozási stratégiát oly módon módosítjuk [2], hogy a rendszerbe egy időfüggő kapcsolófüggvényt vezetünk be:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + g(t)\mathbf{B}u, \quad (9)$$

ahol

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \in [2k\Delta t, (2k+1)\Delta t), \\ 1, & \text{ha } t \in [(2k+1)\Delta t, 2(k+1)\Delta t), \end{cases} \quad (10)$$

és $k \in \mathbb{N}$. A kapcsolófüggvény értéke határozza meg, hogy a rendszer éppen a cselekvő (act) vagy a várakozó (wait) fázisban van-e. Ebben a felállásban a szabályozó csak minden második mintavételezési periódusban aktív.

Mivel a beavatkozás periodikus, a rendszer stabilitása a Floquet-elmélet segítségével vizsgálható. Ehhez meghatározzuk a rendszer állapotátviteli mátrixát, amely összeköti a periódus elején és végén mért állapotokat.

Az első és második mintavételezés között nincs beavatkozás, így a rendszer kiszámítható a nyitott szabályozási kör dinamikája alapján:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0), \quad t \in [0, \Delta t). \quad (11)$$

A második szakaszban a szabályozó az első mintavételezési pillanatban rögzített állapotértékek alapján avatkozik be:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t - \Delta t}\mathbf{x}(\Delta t) + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}s} ds \mathbf{B}u(0), \quad t \in [\Delta t, 2\Delta t), \quad (12)$$

ahol

$$u(0) = \underbrace{\tilde{P}\varphi(0) + \tilde{D}\dot{\varphi}(0)}_{\mathbf{L}} = \mathbf{L}\mathbf{x}(0). \quad (13)$$

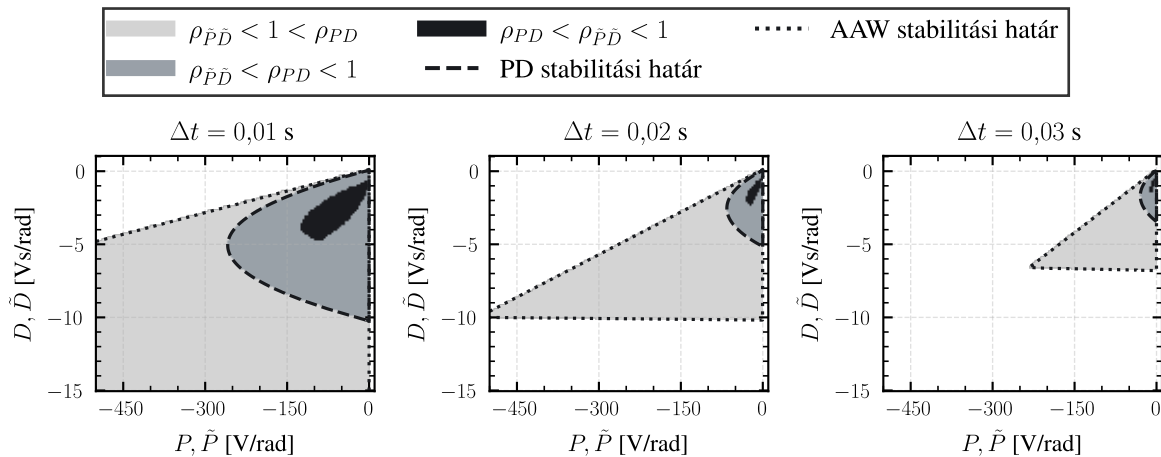
A teljes periódusra vonatkozó állapotátviteli mátrixot a két szakasz dinamikájának összekapcsolásával kapjuk meg.

$$\tilde{\mathbf{Q}} = e^{2\mathbf{A}\Delta t} + \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}s} ds \mathbf{B}\mathbf{L}, \quad (14)$$

ami jelen esetben

$$\mathbf{x}(2\Delta t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\Theta\tilde{P}b}{c^2} + \frac{\Theta\tilde{P}be^{-\frac{\Delta tc}{\Theta}}}{c^2} + \frac{\tilde{P}\Delta tb}{c} + 1 & -\frac{\Theta\tilde{D}b}{c^2} + \frac{\Theta\tilde{D}be^{-\frac{\Delta tc}{\Theta}}}{c^2} + \frac{\Theta}{c} - \frac{\Theta e^{-\frac{2\Delta tc}{\Theta}}}{c} + \frac{\tilde{D}\Delta tb}{c} \\ \frac{\tilde{P}b}{c} - \frac{\tilde{P}be^{-\frac{\Delta tc}{\Theta}}}{c} & \frac{\tilde{D}b}{c} - \frac{\tilde{D}be^{-\frac{\Delta tc}{\Theta}}}{c} + e^{-\frac{2\Delta tc}{\Theta}} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \mathbf{x}(0). \quad (15)$$

A rendszer aszimptotikus stabilitásának feltétele, hogy az így kapott mátrix spektrális sugara (vagyis a legnagyobb abszolút értékű sajátértéke) egynél kisebb legyen.



3. ábra. Act-and-wait és arányos-differenciáló szabályozás stabilitási térképeinek összehasonlítása különböző mintavételezés esetén.

A két szabályozási stratégiát összevetve, a 3. ábrán látható stabilitási térképek alapján megállapítható, hogy az act-and-wait módszer stabilitási tartománya szignifikánsan nagyobb a hagyományos digitális PD szabályozóénál. Megfigyelhető, hogy a mintavételezési idő növelésével mindkét tartomány zsugorodik, azonban az act-and-wait stratégia robusztusabbnak bizonyul, és minden vizsgált esetben kiterjedtebb stabilitási tartományt biztosít.

Emellett fontos eredmény, hogy a PD szabályozó stabilitási tartományán belül is léteznek olyan paraméterpárok, amelyek mellett az act-and-wait módszer spektrális sugara ($\rho_{\tilde{P}\tilde{D}}$) kisebb. Ez azt jelenti, hogy azonos szabályozási paraméterek mellett az act-and-wait stratégia gyorsabb konvergenciát és kedvezőbb dinamikai válaszfüggvényt eredményez.

5. NUMERIKUS SZIMULÁCIÓK

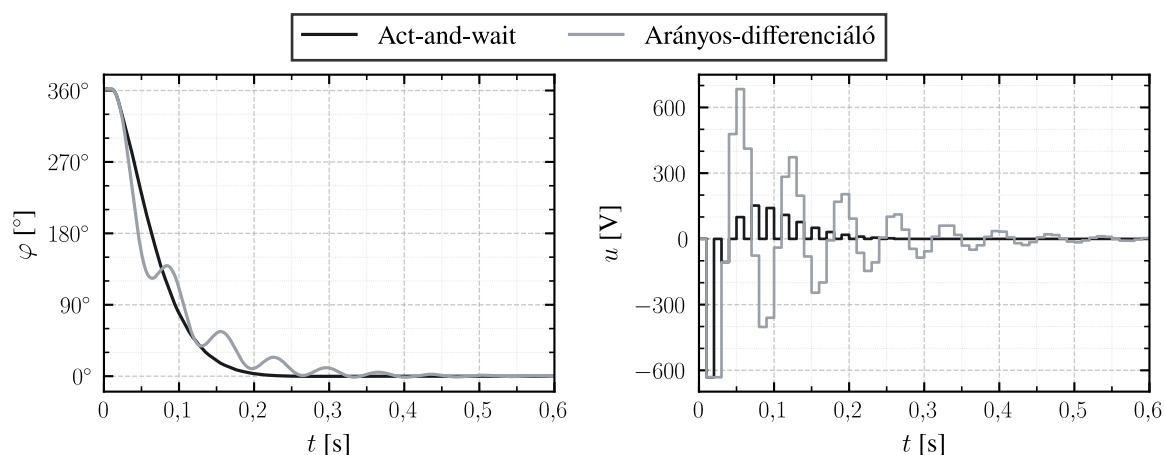
Az elméleti eredmények validálása érdekében numerikus szimulációkat végeztünk mindkét szabályozási stratégia alkalmazásával. A vizsgálat során azonos paraméterkészletet határoztunk meg: a mintavételezési idő $\Delta t = 0,01$ s, a kezdeti kitérés $\varphi(0) = 360^\circ$, a szabályozási erősítések pedig $P = \tilde{P} = -100$ V/rad és $D = \tilde{D} = -8$ Vs/rad voltak.

A dinamikai egyenletek megoldásához negyedrendű Runge-Kutta numerikus integráló sémát alkalmaztunk. A szimulációs eredményeket, amelyek összehasonlítják az arányos-differenciáló szabályozó és az act-and-wait stratégia válaszfüggvényeit, a 4. ábra szemlélteti.

Megfigyelhető, hogy az act-and-wait stratégiával a rendszer beállási ideje rövidebb, miközben a beavatkozási energiaigénye is jelentősen alacsonyabb. A szabályozási energiát az alábbi módon jellemezhetjük:

$$E = \int_0^T u^2(t) dt, \quad (16)$$

ahol $u(t)$ a beavatkozó jel időfüggvénye. A 4. ábrán bemutatott eredmények alapján a két stratégia energiaigényének aránya 1 : 5. Eszerint jelen esetben a hagyományos PD szabályozó ötször annyi energiát igényel a szabályozási folyamat során, miközben lassabb konvergenciát mutat a kívánt egyensúlyi helyzet felé.



4. ábra. A rendszer válaszfüggvényének numerikus szimulációja $P = \tilde{P} = -100 \text{ V/rad}$ és $D = \tilde{D} = -8 \text{ Vs/rad}$ erősítési tényezővel, valamint $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ mintavételezési idő mellett.

6. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen munka egy egyszabadságfokú torziós mechanikai rendszer pozíció-szabályozását vizsgálta, különös tekintettel a digitális implementációból fakadó időkésések hatásaira. A gyakorlati megvalósítás során az időkésés mellett más hatások is befolyásolhatják a szabályozás minőségét, például a digitális mintavételezésből adódó időbeli és térbeli kvantálás, a motorszaturáció, illetve a mozgó elemek közötti súrlódás hatása. A kutatás során összehasonlítottuk a hagyományos digitális arányos-differenciáló szabályozót és az act-and-wait irányítási stratégiát.

A stabilitási térképek analitikus meghatározása és a spektrális sugár vizsgálata során bebizonyosodott, hogy az act-and-wait módszer szignifikánsan nagyobb stabilitási tartományt biztosít a szabályozási paraméterek síkján. Ez a robusztusság lehetővé teszi a rendszer stabil működését olyan alacsony mintavételezési frekvenciák mellett is, ahol a hagyományos PD szabályozó a fellépő fáziskésés miatt már instabillá válna. A numerikus szimulációk eredményei alátámasztották, hogy az act-and-wait stratégia alacsonyabb energiafelhasználás mellett gyorsabb konvergenciát biztosít a közös stabilitási tartomány jelentős részén.

Összességében megállapítható, hogy az act-and-wait stratégia hatékony megoldást kínál olyan mechatronikai alkalmazásokban, ahol a mintavételezési idő kritikus korlátot jelent, és a cél a stabil, energiahatékony pozíció-szabályozás megvalósítása.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretnénk köszönetet mondani Dr. Vizi Máté Benjámintól részére a kutatás során nyújtott szakmai segítségéért.

A projektet a HUN-REN Hungarian Research Network és az NKFIH 2024-1.2.8-TÉT-IPARI-CN-2025-00003 számú projektje támogatta.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Insperger T., & Stépán G. (2007). *Act-and-wait control concept for discrete-time systems with feedback delay*. IET Control Theory & Applications, 1(3), 553-557. doi:10.1049/iet-cta:20060051
- [2] Zhou B., Michiels W., & Chen J. (2022). *Fixed-Time Stabilization of Linear Delay Systems by Smooth Periodic Delayed Feedback*. IEEE Transactions on Automatic Control, 67(2), 557-573. doi:10.1109/TAC.2021.3051262
- [3] Insperger T., Kovács L. L., Galambos P., & Stépán, G. (2009). *Act-and-Wait Control Concept for a Force Control Process with Delayed Feedback*. In: Ulbrich, H., Ginzinger, L. (eds) Motion and Vibration Control. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9438-5_14
- [4] Zhou B., & Michiels W. (2020). *On the fixed-time stabilization of input delay systems using act-and-wait control*. Systems & Control Letters, 146, 104807. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2020.104807>
- [5] Zhang Z., Zhou B., Michiels W., Yang X. (2021). *A novel act-and-wait control scheme for fixed-time stabilization of input-delay systems and assignment of the monodromy matrix*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 32(2), 987-1003. <https://doi.org/10.1002/rnc.5866>
- [6] Franklin G. F., Powell J. D., & Workman M. (1998). *Digital Control of Dynamic Systems*. Ellis-Kagle Press.