

Színdiszkriminációs ellipszisek illesztésének optimalizációja

Optimization of Colour Discrimination Ellipse Fitting

KÁRPÁTI Anna Eszter, BSc hallgató, Dr. URBIN Ágnes, adjunktus

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
Gépészmérnöki Kar,
Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék,
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3
karpatianna9@gmail.com, urbin@mogi.bme.hu

Abstract

The Cambridge Colour Test (CCT) is an established benchmark for diagnosing colour vision deficiencies. However, evaluating discrimination threshold for normal trichromats present a significant computational challenge. This study investigates possible options for optimizing the procedure, how to fit ellipses to increase the resolution of chromatic threshold data, while simultaneously reducing test duration to minimize visual fatigue and its impact on measurement error.

Keywords: chromatic discrimination, ellipses, Cambridge Colour Test, optimization, Levenberg-Marquardt Algorithm

Kivonat

A Cambridge Colour Test (CCT) a szintévesztés diagnosztizálásának elismert etalonja. Ugyanakkor a normál trikromátok finomabb színmegkülönböztetési küszöbeinek meghatározása jelentős számítási kihívást jelent. Jelen tanulmány a eljárási optimalizálási lehetőségeit vizsgálja, fókuszba helyezve az ellipszis illesztési módszereket az érzékelési küszöb adatok felbontásának növelése érdekében. A kutatás célja továbbá a vizsgálati idő lerövidítése, minimalizálva ezzel a szem fáradását és annak a mérési hibára gyakorolt hatását.

Kulcsszavak: színdiszkrimináció, ellipszisek, Cambridge Colour Test, optimalizálás, Levenberg-Marquardt Algoritmus

1. BEVEZETÉS

Jelen kutatás célja bemutatni egy színdiszkriminációs küszöbértékek mérését célzó kísérleti terv optimalizálását. A projektnek, melynek kereteiben ez a kutatás is készült, célja egy átfogó adaptációs modell készítése. A Cambridge Colour Test (CCT) a klinikai és kutatási gyakorlatban egyaránt elterjedt digitális pszeudoizokromatikus tesztrendszer, amely sokoldalú mérési konfigurációt kínál a szintévesztés diagnosztikájára [1], [2], [3].

Noha a rendszer hatékony a defektusok azonosításában, az épszínlátók finomabb színmegkülönböztetési tartományokkal rendelkeznek, ennek a nagy felbontású, kvantitatív feltérképezése jelentős módszertani kihívást jelentett [4], [5].

Jelen kutatás korábbi fázisában igazolásra került, hogy a geometriai alapú ellipszis illesztési egyenletek robosztusabb eredményt szolgáltatnak a vizsgált tartományban, mint az alapértelmezett algebrai felírás. Egy, az adatok feldolgozására és vizualizációjára készült szoftverkörnyezetben mérési irányok elhagyását szimuláltuk egy korábbi ellipszis adathalmazból. Az ott tapasztaltak jelentős geometriai illesztési különbségekről adtak tanúbizonyságot.

A mérés folyamatának rövidítése érdekében, feltételezve azt, hogy a pontosság nem áldozható fel az idő oltárán, a következő kísérletet terveztük: két trivektor teszt végrehajtása, a semleges fehér (a CIE 1976 UCS színdiagramban [6] definiált $u'=0.2024$, $v'=0.4689$) referencia pontból a konfúziós vonalak, illetve azok szögfelezői mentén mérve. A megközelítőleg öt perc hosszúságú mérés eredményeül 3-3 vektort kapunk, melyek segítségével küszöbérték ellipsziseket rajzolhatunk ki.

2. ELLIPSZIS ILLESZTÉS

A színdiszkriminációs mérések során a mérési pontok (küszöbértékek) meghatározása után a legkritikusabb lépés az eredményeket összefoglaló ellipszis paramétereinek meghatározása. A CCT natív illesztési módszere a hagyományos legkisebb négyzetek módszerét alkalmazza, az ellipszis általános kvadratikus egyenletétől vett algebrai távolság minimalizálását célozva [7].

Az algebrai illesztés során az alábbi egyenlet hibatagját minimalizáljuk:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

Bár ez a módszer számításilag rendkívül gyors (lineáris legkisebb négyzetek problémájára vezethető vissza), komoly hátránya, hogy nem közvetlenül a pont és az ív közötti fizikai távolságot minimalizálja. Emiatt zajos adatok vagy kevés mérési pont esetén az illesztett görbe hajlamos „ellaposodni” vagy irreálisan nagy excentricitást felvenni. Hipotézisünk szerint a kísérleti pontosság növelhető, ha az ellipszis trigonometrikus (parametrikus) egyenletére támaszkodunk, és a valódi geometriai távolságokat vesszük alapul. Ebben a modellben az ellipszis pontjait az alábbiak szerint definiáljuk:

$$x = x_0 + a \cos \Theta \cos \alpha - b \sin \Theta \sin \alpha \quad (2)$$

$$y = y_0 + a \cos \Theta \sin \alpha + b \sin \Theta \cos \alpha \quad (3)$$

Ahol:

- x_0, y_0 : az ellipszis középpontja.
- a, b : a fél-tengelyek hossza.
- α : az elforgatási szög.
- Θ : a paraméter.

Az algebrai illesztési eljárásokkal szemben a geometriai megközelítés számos kritikus előnnyel bír a színdiszkriminációs küszöbértékek meghatározásakor. Mivel a Trivektor teszt mindössze néhány specifikus irányban gyűjt adatot, a hagyományos algebrai minimalizálás gyakran instabillá válik, aminek következtében a megoldás irreális formák, jellemzően nyitott görbék (hiperbolák vagy parabolák) felé torzulhat. Ezzel szemben a geometriai kényszer alkalmazása matematikai garanciát nyújt arra, hogy a kimenet minden esetben egy zárt ellipszis maradjon, ami alacsony mérési pontszám esetén is kiemelkedő stabilitást biztosít az elemzés során.

Továbbá az algebrai modellek hibásúlozása gyakran aszimmetrikus: a távoli mérési pontokat aránytalanul, a vizuális távolságokkal nem lineáris összefüggésben bünteti. Ezt a torzítást a geometriai – a görbétől vett ortogonális vagy sugárirányú – távolság minimalizálása sikeresen feloldja, így az illesztett modell sokkal organikusabban simul a pszichofizikai mérések valós természetéhez. Ez a matematikai stratégia egyben tökéletes összhangot teremt a Cambridge Colour Test (CCT) mérési módszertanával is. Mivel a geometriai illesztés az ellipszis középpontjától vett sugárirányú távolságok eltéréseinek négyzetösszegét minimalizálja, pontosan azokban a tengelyekben ad hangsúlyt a hibáknak, ahogyan maga az adatgyűjtés történik, hiszen a teszrendszer a küszöbértékeket eleve a referenciapontból kiinduló, adott irányvektorok mentén határozza meg.

Ezen elméleti megfontolások gyakorlati átültetésére a kutatás keretében egy dedikált szoftveres kiértékelő rendszert is fejlesztettünk. A natív szoftverkörnyezetekben gyakran tapasztalható algebrai torzítások kiküszöbölése érdekében az új implementáció az iteratív Levenberg–Marquardt-algoritmust (LMA) alkalmazza. Ez a fejlett nemlineáris optimalizációs eljárás kellően robusztus a geometriai távolságok négyzetösszegének minimalizálására, biztosítva ezáltal az emberi látórendszer finom színmegkülönböztető képességének nagy felbontású és precíz leképezését.

3. OPTIMALIZÁLÁS

A mérés hatékonyságát két fő irányból közelítettük meg, melyek az időigény csökkentése és a mintavételi stratégia finomítása voltak. A hagyományos CCT ellipszis tesztje akár 10-15 percet is igénybe vehet, ami a páciens elfáradásához és a figyelem lankadásához vezet, rontva az adatok megbízhatóságát. Az optimalizált eljárás során a Trivektor-alapú megközelítést terjesztettük ki.

A mérést két szakaszra bontottuk:

1. Konfúziós irányok: A Protan, Deutan és Tritan konfúziós vonalak mentén végzett mérések az öröklött színtévesztés esetében legfontosabb tengelyek érzékenységét mérik.
2. Emellett megvizsgáltuk a konfúziós irányoktól legtávolabbi, a szögfelezők mentén mért küszöbértékeket.

A kutatás kulcsfontosságú eleme a mérési stratégia és a matematikai feldolgozás szinergiája. Az optimalizálás két lépcsőben valósul meg: a mintavételezés sűrítésében és a numerikus megoldás finomításában.

3.1. A Levenberg-Marquardt Algoritmus (LMA) szerepe

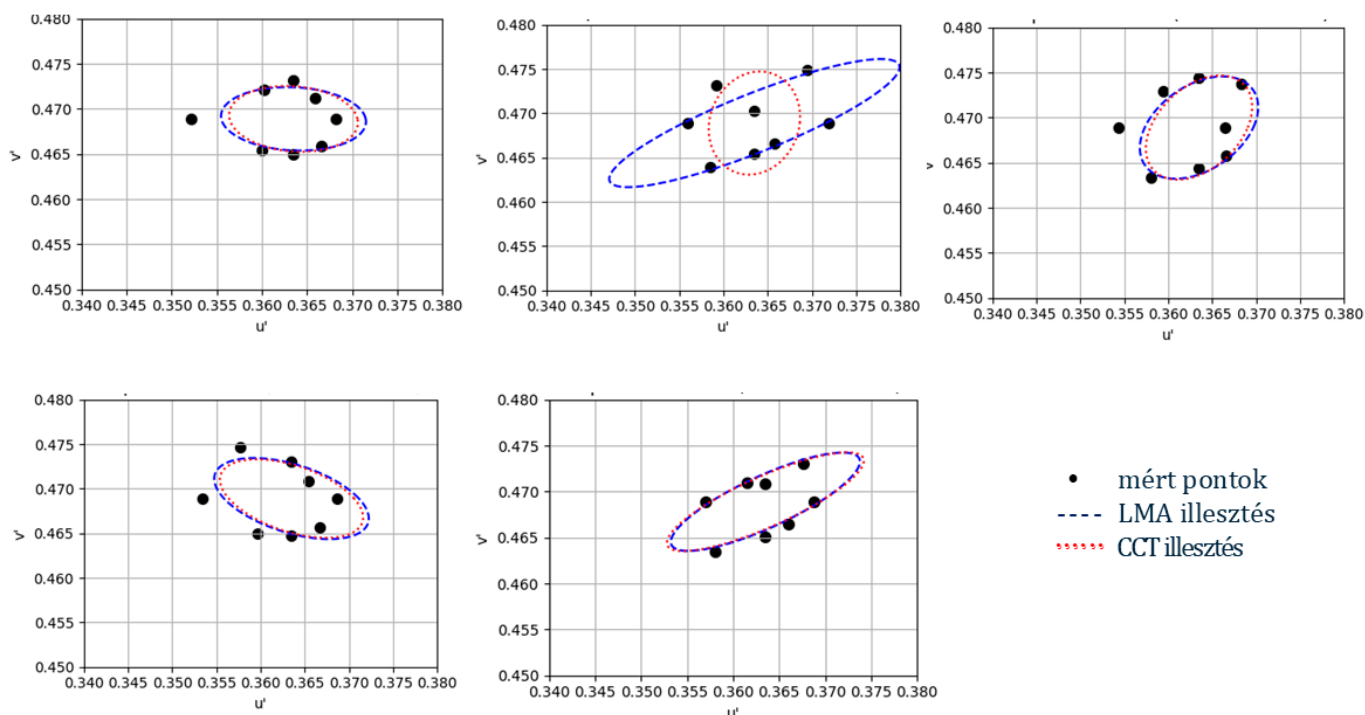
Mivel a geometriai távolság minimalizálása egy nemlineáris legkisebb négyzetek (Non-linear Least Squares) probléma, megoldásához robusztus iteratív eljárásra van szükség. Erre a célra a Levenberg-Marquardt algoritmust (LMA) alkalmaztuk. Az LMA ötvözi a Gauss-Newton módszer gyorsaságát és a gradiens-módszer (gradient descent) stabilitását.

Az algoritmus iteratív módon frissíti az ellipszis paramétereit (fél-tengelyek, elforgatás, középpont), egy csillapítási tényező (lambda) segítségével kontrollálva a lépésközt: Ha a közelítés jól halad, az LMA a Gauss-Newton irányba vált a kvadratikus konvergencia érdekében. Ha a hiba nő, az algoritmus a gradiens irányba mozdul el, biztosítva a globális optimum felé való haladást. [8], [9]

4. EREDMÉNYEK

4.1. CCT és LMA illesztések összehasonlítása

Az illesztési módszerek összehasonlítását 26 különböző referencia pontban végzett ellipszis tesztek adataival végeztük. A méréseken 4 fő vett részt, életkoruk 22 és 32 év között változott. Az ellipszis tesztek mind 8 mérési irányban készültek, referencia pontonként 5 ismétléssel. A résztvevők épszínlátó személyek voltak. Az 1. ábra az LMA és CCT módszerekkel illesztett ellipsziseket ábrázolja egy referencia pontban végzett 5 ismétlés esetében.



1. ábra. LMA és CCT módszerekkel illesztett ellipszisek egy referencia pontban végzett 5 ismétlés esetében

A CCT és az LMA módszerrel illesztett ellipszisek és a mérési pontok közötti eltérés négyzetösszegeket összevetve az LMA illesztési módszerrel a sugáriányú eltérések négyzetösszege az esetek 62%-ban kisebb, mint a CCT natív módszere esetén.

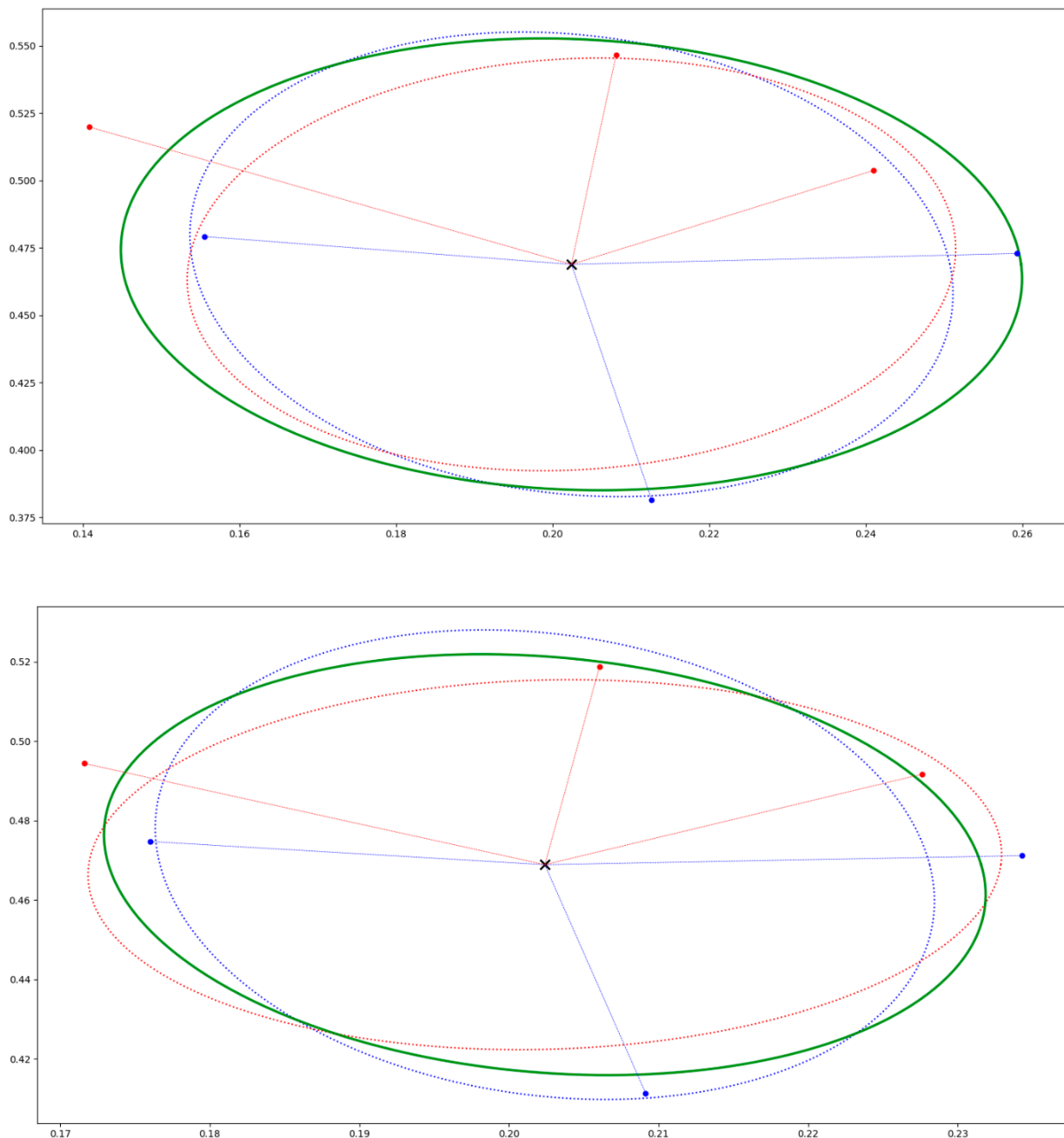
Vizsgáltuk az ellipszisek területének változékonyságát is az azonos referencia pontokban végzett ismétlések között. A 26 referencia pontra illesztett ellipszisek területeinek szórása a vizsgált halmaz 66%-ában

bizonyult kisebbnek LMA illesztéssel, tehát 15 esetben biztosan kevesebbet ingott a területek nagysága, mint a CCT által illesztett ellipsziseké.

4.2. Mérési irányok hatásának összehasonlítása

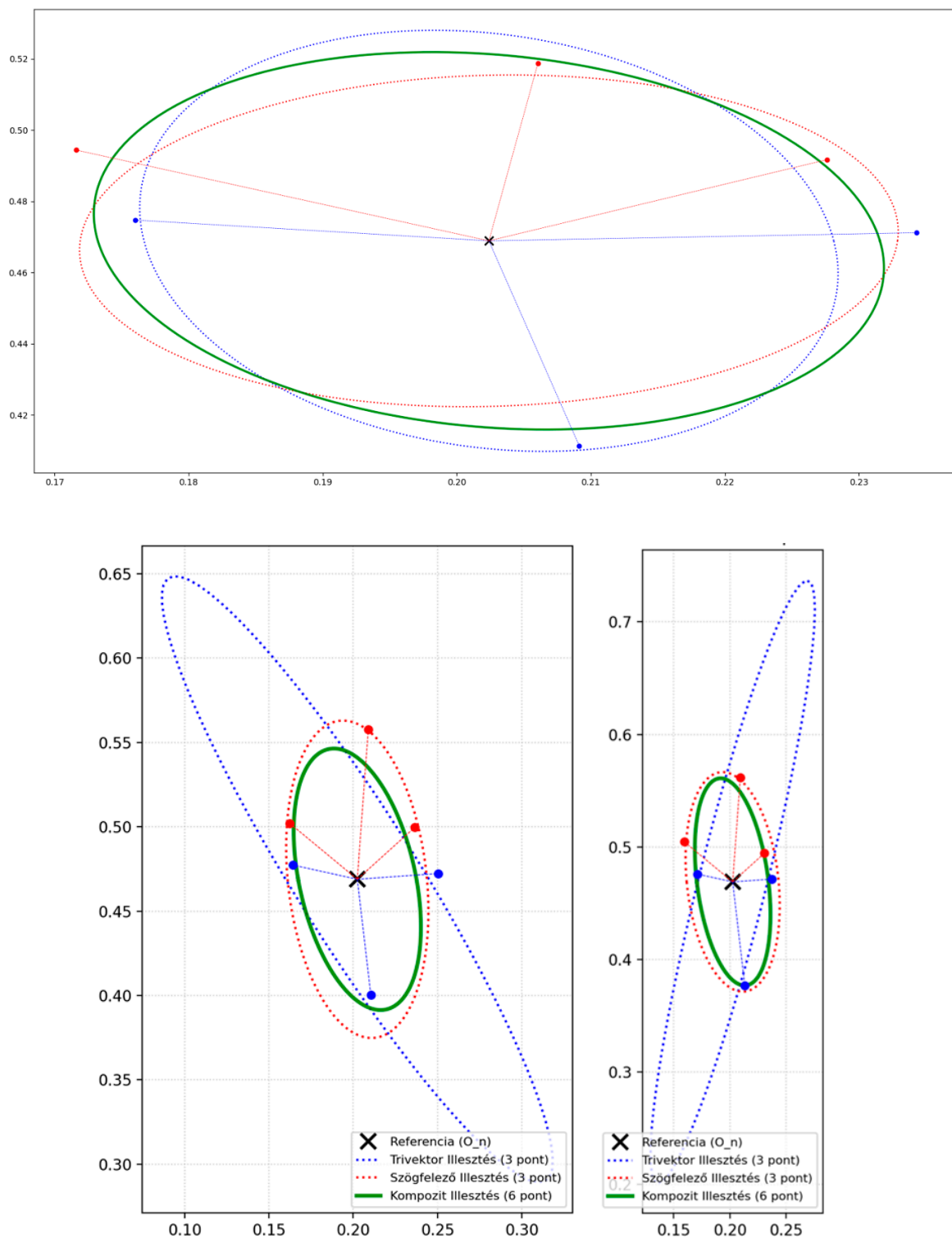
A mérési irányok hatását 35 személyen végzett mérésekből adódó mintán végeztük. A résztvevők életkora 20-25 év között változott, 31 férfi és 4 nő vett részt a méréseken. A referencia pont minden esetben változatlan volt ($u'=0.2024$, $v'=0.4689$). A kiértékelés során azt vizsgáltuk, hogy az adott referencia pontban a három konfúziós irány mentén, valamint azok szögfelezői mentén végzett mérések eredményeire illesztett ellipszisek hogyan viszonyulnak mind a hat fenti mérési adatara illesztett ellipsziszhez.

A 2. ábra olyan ellipsziseket mutat, ahol a trivektor (kék görbe), a szögfelező (vörös görbe) és az egyesített 6 mérési pontra (zöld görbe) illesztett ellipszisek között nem látható nagy különbség.



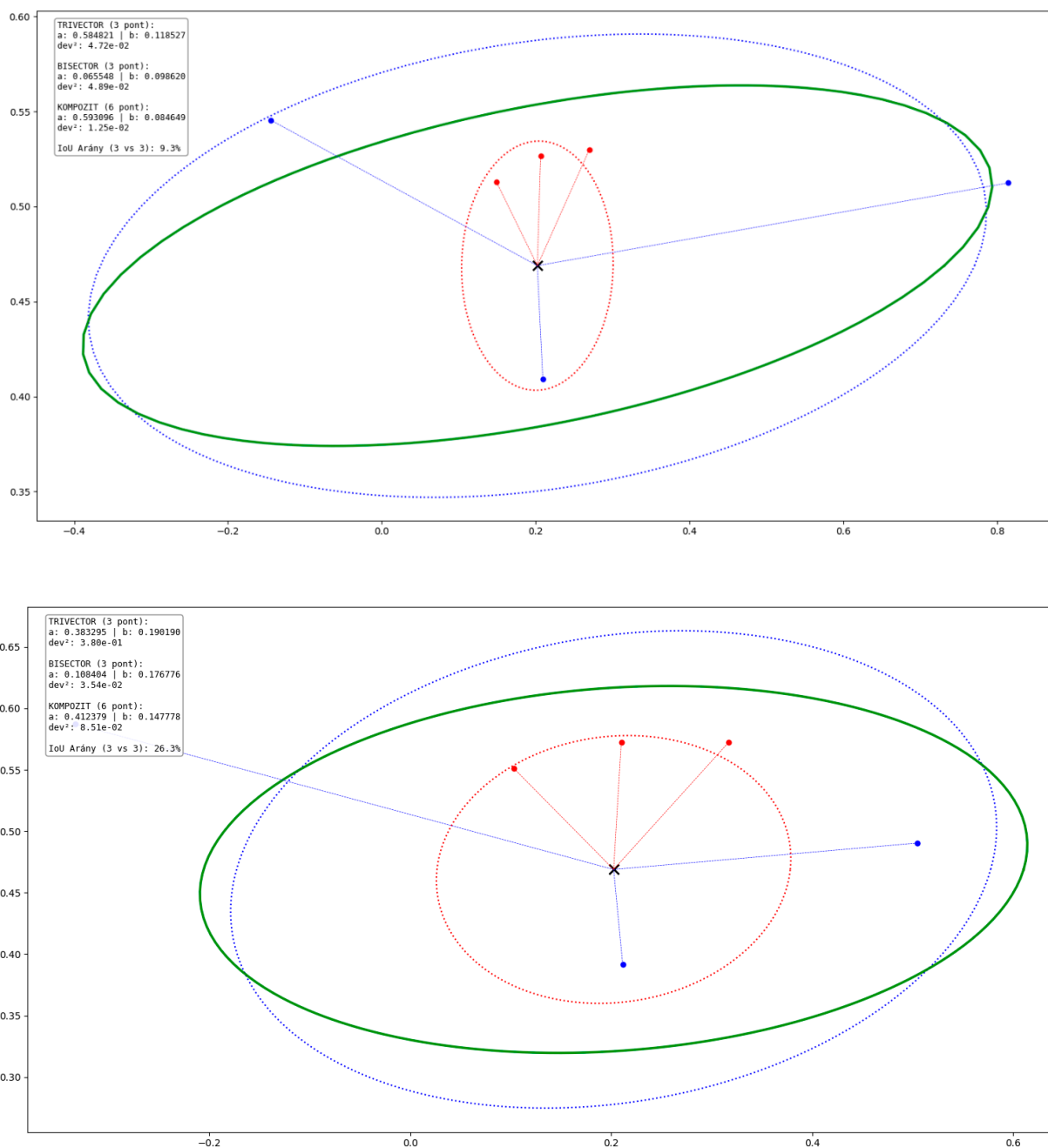
2. ábra. Épszínlátó ellipszisek, ahol a trivektor (kék görbe), a szögfelező (vörös görbe) és az egyesített 6 mérési pontra (zöld görbe) illesztett ellipszisek között nem látható nagy különbség.

A 3. ábra olyan ellipsziseket mutat, ahol a trivektor (kék görbe) és a szögfelező (vörös görbe) között nagy különbség látható. Ezekben az esetekben az egyesített 6 mérési pontra (zöld görbe) illesztett ellipszisek a szögfelezők mentén végzett mérésekre illesztett ellipszisekkel mutatnak hasonlóságot.



3. ábra. Épszínlátó ellipszisek, ahol a trivektor (kék görbe) és a szögfelező (vörös görbe) mérési pontokra illesztett ellipszisek között nagy különbség látható.

A méréseket 2 szintévesztő személlyel is elvégeztük, az ő eredményeik a 3. ábra mintázatának az ellenkezőjét mutatják (ld. 4. ábra): a trivektor (kék görbe) és a szögfelező (vörös görbe) között nagy különbség látható, azonban az egyesített 6 mérési pontra (zöld görbe) illesztett ellipszisek a konfúziós vonalak mentén végzett mérésekre illesztett ellipszisekkel mutatnak hasonlóságot.



4. ábra. Szintévesztő ellipszisek, ahol a trivektor (kék görbe) és a szögfelező (vörös görbe) mérési pontokra illesztett ellipszisek között nagy különbség látható.

5. KONKLÚZIÓ

Eredményeink alapján elmondható, hogy a CCT natív illesztési módszerét a geometriai egyenletre történő optimalizálással csökkenthető az eltérések átlagos négyzetösszege.

A mérési irányok tekintetében megkülönböztetendők a szintévesztő és az épszínlátó személyek: szintévesztő személyek esetében a konfúziós irányok mentén végzett mérések – a szakirodalomban megtalálható eredményekkel összhangban – jó alapot szolgálnak ellipszis becslésekre. Épszínlátó személyek esetében azonban eredményeink alapján célszerű a konfúziós vonalaktól minél függetlenebb – esetünkben azok szögfelezői – mentén méréseket végezni, és ez alapján becsülni az ellipsziseket.

Eredményeink leíró jellegűek, további mérések és vizsgálatok elvégzése szükséges reprezentatív mintán.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Készült az Egyetemi Kutatói Ösztöndíj Program, a Kulturális és Innovációs Minisztérium, valamint a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap támogatásával (EKÖP-25-4-II-BME-331).

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] J. D. Mollon and B. C. Regan, “Handbook of the Cambridge Colour Test,” London, UK, UK, 2000.
- [2] B. C. Regan, J. P. Reffin, and J. D. Mollon, “Luminance Noise and the Rapid-Determination of Discrimination Ellipses in Color Deficiency,” *Vision Res.*, vol. 34, no. 10, pp. 1279–1299, 1994, doi: 10.1016/0042-6989(94)90203-8.
- [3] J. D. Mollon, S. Astell, and J. P. Reffin, “A minimalist test of colour vision,” pp. 59–67, 1991, doi: 10.1007/978-94-011-3774-4_8.
- [4] D. F. Ventura *et al.*, “Preliminary Norms for the Cambridge Colour Test,” in *Normal and Defective Colour Vision*, J. D. Mollon, J. Pokorny, and K. Knoblauch, Eds., Oxford, 2010, ch. Preliminar. doi: 10.1093/acprof:oso/9780198525301.003.0034.
- [5] T. P. Fernandes, N. A. Santos, and G. V. Paramei, “Cambridge Colour Test: reproducibility in normal trichromats,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 37, no. 4, p. A70, 2020, doi: 10.1364/josaa.380306.
- [6] J. Schanda, Ed., *Colorimetry: Understanding the CIE System*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2007. doi: 10.1002/9780470175637.
- [7] A. W. Fitzgibbon, M. Pilu, and R. B. Fisher, “Direct least squares fitting of ellipses,” *Proceedings - International Conference on Pattern Recognition*, vol. 1, pp. 253–257, 1996, doi: 10.1109/ICPR.1996.546029.
- [8] H. P. Gavin, “The Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least squares curve-fitting problems,” 2024.
- [9] KENNETH LEVENBERG, “A METHOD FOR THE SOLUTION OF CERTAIN NON-LINEAR PROBLEMS IN LEAST SQUARES,” *Q. Appl. Math.*, vol. 2, no. 2, pp. 164–168, Jul. 1944.