

Inverz anyagmodell illesztés gumiütközőre

Inverse material model calibration for rubber bumper

Dr. HURI Dávid, Dr. MANKOVITS Tamás

Debreceni Egyetem, Műszaki Kar, Gépészmérnöki Tanszék, 4028 Debrecen, Ótmető utca 2-4.,
huri.david@eng.unideb.hu, tamas.mankovits@eng.unideb.hu,
<https://mecheng.unideb.hu/>

Abstract

The available hyperelastic material models (Mooney-Rivlin, Yeoh, Gent, Arruda-Boyce, and Ogden) are capable of describing the highly nonlinear material behaviour of rubber. However, due to the custom rubber compounding, laboratory tests are always necessary to determine the material parameters. In order to fit these parameters, it is imperative to ascertain the stress-strain characteristics of rubber under uniaxial, biaxial, and pure shear loading. It should be noted that these loading methods constitute non-standard measurement procedures, thus necessitating the utilisation of specialised tools and test specimens. The objective of this study is to determine the material parameters of a finished product by conducting a laboratory compression test and implementing an inverse material model fitting procedure. As a preliminary step, a finite element model of the tested rubber bumper was prepared, discretised with axisymmetric elements. The material model parameters were calibrated using a surrogate model-based optimisation procedure. The applicability of the procedure was verified by comparing the stress-strain data estimated by the material model with the data measured on cylindrical compression test specimens.

Keywords: finite element analysis; Yeoh hyperelastic model; curve fitting; surrogate model, optimization

Kivonat

Az elérhető hiperelasztikus anyagmodellek (Mooney-Rivlin, Yeoh, Gent, Arruda-Boyce és Ogden) képesek leírni a gumik nagymértékű nemlineáris anyagi viselkedését, de a gumi keverékek egyedi igények szerinti készítése miatt az anyagparaméterek meghatározásához minden esetben laboratóriumi vizsgálatok szükségesek. A paraméterek illesztéséhez szükséges a gumi egytengelyű továbbá a nem szabványos mérési eljárások közé tartozó kéttengelyű és tiszta nyíró terhelésével meghatározott feszültség-nyúlás karakterisztikák, melyek így egyedi szerszámokat és próbatesteket követelnek meg. Jelen vizsgálat célja egy késztermék laboratóriumi nyomó vizsgálatának segítségével, úgynevezett inverz anyagmodell illesztési eljárást alkalmazva meghatározni az anyagparamétereket. Ennek első lépéseként elkészítettük a vizsgált gumiütköző tengelyszimmetrikus elemekkel diszkrétizált végeelemes modelljét. Az anyagmodell paramétereinek meghatározását helyettesítő modell alapú optimalizálási eljárás segítségével végeztük el. Az ismertetett eljárás alkalmazhatóságát az anyagmodell által becsült és a hengeres nyomó próbatestekre mérésrel felvett feszültség-nyúlás adatainak összehasonlításával végeztük.

Kulcsszavak: végeelem-módszer; Yeoh hiperelasztikus anyagmodell, görbeillesztés, helyettesítő modell, optimalizáció

1. BEVEZETÉS

A mesterséges alapanyagú gumikeverékek elterjedése a gumitermékből készült gépelemek széleskörű felhasználásához vezetett, mint például a tömitések, ütközők és rezgés csillapító elemek. A járműiparban meghatározó szerepük van a motor-, váltó- vagy kabinrögzítésben, futóműalkatrészként, vagy a mozgás utolsó szakaszát korlátozó ütköző elemként. Az elektromobilitás előretörésével ezen elemek jelentős részére továbbra is szükség van a járművek gyártása során, azonban a módosult szerkezeti kialakítások a termékek újratervezését követelik a megváltozott járműössztömegeből adódó terhelések figyelembevételével. Az így adódó piaci igények gyors kielégítése csak olyan innovatív tervezési eljárásokkal lehetséges, melyek a végeelem módszert és optimalizációt alkalmaznak a gumitermék kialakításának meghatározására [1,2].

A gumi az elasztomerek csoportjába tartozik, azaz egy elasztikus és viszkózus tulajdonságokkal rendelkező polimer. A gumitermékek modellezése során meg kell küzdeni az anyagi, a geometriai és az érintkezési hatásokból származó nemlinearitásokkal. A kereskedelmi forgalomban kapható általános célú végeleemes rendszerek rendelkeznek a nemlineáris egyenletrendszereket kezelni képes numerikus megoldókkal. Statikai véges-elemes analízis előkészítése során jól beállított elmozdulás szabadságfokú anyagmodellt kell alkalmazni. A matematikai modell az anyagi választ származtathatja a lokális anyagi viselkedések és interakciók mikromechanikai modellezéséből, vagy fenomenológiai modellezés során a mérhető makroszkopikus mennyiségek, mint a feszültség és alakváltozás közötti kapcsolatból. A gumi nemlineárisan nagymértékű rugalmas izotrop viselkedését hiperelasztikus anyagmodellel lehet leírni, mely az ide vonatkozó kontinuummechanikai háttérrel az alakváltozási energia segítségével írja le a feszültség és deformáció közötti kapcsolatot [3]. Ezen belül több anyagmodell is található, melynek kiválasztása elsősorban a terhelés, az alapanyag, vagy az általános célú végeleemes rendszerben való elérhetőség függvénye [4]. A fenomenológiai modellek közé tartozik a teljesség igénye nélkül a Mooney-Rivlin, az Ogden, a Yeoh [5] és a mikromechanikai modellek közelítéséből létrehozott Arruda-Boyce és Gent anyagmodellek.

A gumi mechanikai viselkedésére a gumikeveréken kívül a gyártástechnológia is hatással van így a valós anyagi viselkedés leírása csak az anyagegyenletekben szereplő paraméterek értékeinek kalibrálásával lehetséges. Ez a folyamat történhet hagyományos (direkt) és inverz eljárással, melyek a kalibráláshoz felhasznált mérési adatokban és a paraméterek becslésére használt módszerben különbözhetnek. Klasszikus eljárás során az energiaalapú modellek pontosságát a mechanikai tesztekre, mint az egy- és kéttengelyű húzó, tiszta nyíró adott válaszokkal lehet vizsgálni. Ezt felhasználva az anyagegyenletekben szereplő paraméterek értékeit úgynevezett görbeillesztési eljárással lehet meghatározni. A direkt eljárás hátránya, hogy a kalibráláshoz használt mechanikai tesztek közül csak az egytengelyű húzó/nyomó vizsgálat tekinthető elterjedt, mindennapi szabványos anyagvizsgálati eljárásnak. A kalibrálás további hátránya, hogy az anyagmodellek pontossága általában romlik, ha az illesztéshez használt mérési soroktól eltérő összetett terhelési állapot alatti viselkedést próbálunk leírni.

Inverz kalibrálási eljárás esetén nem közvetlenül a feszültség-nyúlás görbét illesztjük, hanem a termék működésének szempontjából releváns terheléssel végzett egy vagy több kísérleti eredményt próbáljuk reprodukálni numerikus szimulációval. Az anyagparamétereket addig kell iteratívan módosítani amíg a szimuláció és a mérés közötti különbség minimális. Így lehetséges pontosabban leírni a teljes szerkezeti viselkedést az abból adódó komplex terhelési állapotra. A megvalósítás jóval nehezebb feladat a hagyományoshoz képest, ugyanis szükség van parametrizált numerikus modellre, az iteráció számításköltséges míg az optimalizáció kihívást jelent különösen nagy paraméterszám esetén.

Vizsgálatunk célkitűzése, hogy a hiperelasztikus paraméterek inverz illesztésének optimalizálási módszerére tegyen javaslatot. Az eljárás teszteléséhez szükséges kísérleti adatokat egy korábbi publikációnkban laboratóriumi és numerikus vizsgálatoknak alávetett gumiüttköző szolgáltatja [6]. Ennek megfelelően jelen cikkben nem foglalkozunk részletesen a mérési körülmények és numerikus modellezési megfontolások ismertetésével. Korábbi vizsgálataink alapján a terhelés módját és mértékét figyelembe véve a háromparaméteres Yeoh-modell bizonyult a legalkalmasabbnak [6], ezért ezen modell paramétereinek inverz kalibrálási feltételeit és az elérhető becslési pontosságot vizsgáljuk. Mivel a vizsgált gumikeverékből csak egyetlen termék áll rendelkezésre, az illesztett anyagmodell eltérő terhelési állapotra adott válaszát a termékből kimunkált hengeres próbatestek egytengelyű nyomóvizsgálatával validáljuk.

2. HIPERELASZTIKUS ANYAGMODELLEK KONTINUUMMECHANIKAI HÁTTERE

Amennyiben a gumi viszkózus tulajdonságaitól eltekintünk, akkor annak feszültségi állapota a pillanatnyi állapottól és bármely feszültségi mértéke az \mathbf{F} alakváltozási gradienstől függ. A hiperelasztikus anyagmodell az alakváltozási energia segítségével írja le a feszültség és deformáció közötti kapcsolatot [3]. Amennyiben a kontinuum pontjának elemi környezetében ható feszültségek által végzett alakváltozásból származó munka csak az azonosító és pillanatnyi állapot függvénye, azaz nem függ az alakítási úttól, akkor a gumi nemlineárisan elasztikus tulajdonságát leíró anyagegyenlet

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad (1)$$

ahol \mathbf{P} az I. Piola-Kirchhoff feszültségi tenzor és $\partial W(\mathbf{F})$ az egységnyi térfogatra vonatkoztatott deformációs energiasűrűség. Utóbbit két részre lehet bontani [7]

$$W = W_D(\mathbf{C}) + W_V(J), \quad (2)$$

ahol a $W_V(J)$ térfogatváltozásból származó deformációs energiasűrűség, míg $W_D(\mathbf{C})$ a deviátoros, azaz az alakváltozásból (térfogatállandóság mellett) származó deformációs energiasűrűség.

A deviátoros deformációs energiasűrűsége elérhető polinomiális formulákkal adott fenomenológiai modellek felírhatóak a Cauchy-Green alakváltozási tenzor skalár invariánsaival $W_D(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$ ahogy azt elsőként Rivlin ismertette [8]. Az invariánsokon alapuló polinomiális formulán belül elérhető anyagmodellek a teljesség igénye nélkül a Mooney-Rivlin, a Yeoh, az Arruda-Boyce és a Gent. Az anyagmodellek többsége eredetileg összenyomhatatlan anyagra került meghatározásra így a polinomiális formula általános alakja [4]

$$W_D(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \sum_{i+j=1}^H c_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j, \quad (3)$$

ahol a c_{ij} anyagállandó meghatározása szükséges az anyagmodellben. Számos kutatás bizonyítja, hogy a legtöbb elasztomer esetén - ideértve a gumit is - a deviátoros deformációs energia sokkal kevésbé függ a Cauchy-Green alakváltozási tenzor \bar{I}_2 második skalár invariánsától, mint az \bar{I}_1 -től [5]. Ezen eredményeket figyelembe véve Yeoh a harmadfokú polinomiális formula ($H = 3$) felírásakor csak az \bar{I}_1 első skalár invariánsot vette figyelembe

$$W_{D,Y3}(\bar{I}_1) = W_{D,Y3}(c_{10}, c_{20}, c_{30}) = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + c_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3, \quad (4)$$

ahol a c_{10} az anyag nyírási ellenállását fejezi ki ebből adódóan értéke mindig pozitív. Számos elasztomer esetén bebizonyosodott, hogy a magasabb rendű együtthatók általában két nagyságrenddel kisebbek

$$c_{10} \gg -1 * c_{20} \gg c_{30}. \quad (5)$$

A gumi vulkanizátumok a keverék adalékainak köszönhetően közel összenyomhatatlan viselkedést mutatnak, ha számolni akarunk a térfogatváltozásból származó deformációs energiasűrűséggel, akkor annak kifejezésére közel összenyomhatatlan anyagra a leggyakrabban használt formula

$$W_V(J) = \frac{\kappa}{2} (J - 1)^2, \quad (6)$$

ahol κ az anyagra jellemző térfogati rugalmassági (*bulk*) modulus. Korábbi vizsgálataink alapján két fémlap között nyomott szabad alakváltozásnak kitett gumiütköző végeeselemes vizsgálata során a $\kappa = 1000$ (MPa) érték felvétele javasolt [9].

3. ANYAGPARAMÉTEREK MEGHATÁROZÁSA INVERZ ILLESZTÉSI ELJÁRÁSSAL

Az anyagmodell paramétereinek inverz illesztési eljárása egy optimalizálási feladat, melyre a célfüggvény a méréssel felvett és a paraméterezett anyagmodellel futtatott numerikus szimulációból meghatározott erő-elmozdulás karakterisztika közötti különbségként számítható. Legyen \mathbf{C} a változtatható anyagparaméterek \mathbf{c} vektorainak halmaza, továbbá az i -edik deformációs állapotra a mért nyomóerő $F_{i,e}$, míg az anyagmodellel futtatott numerikus szimulációból meghatározott reakcióerő $F(\mathbf{c})_{i,r}$. Az optimális anyagparaméterek vektorának \mathbf{c}_{opt} meghatározásának egyik lehetősége a relatív hibák átlagának minimalizálása

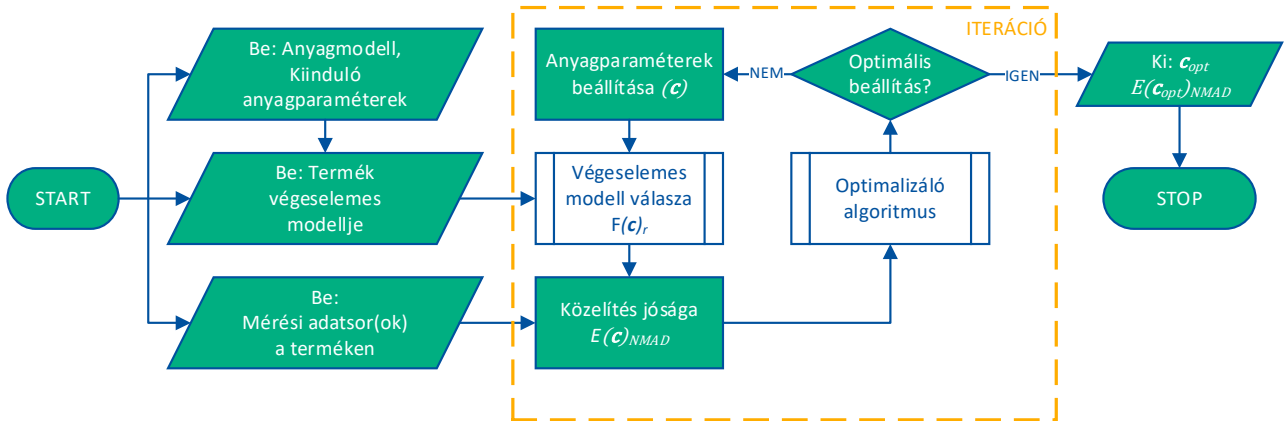
$$E(\mathbf{c}_{opt})_{NMAD} = \min_{\mathbf{c} \in \mathbf{C}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{F(\mathbf{c})_{i,r} - F_{i,e}}{F_{i,e}} \right| 100 (\%), \quad (7)$$

mely esetben az erő-elmozdulás adathalmaz minden pontpárja azonos súllyal kerül figyelembevételre a célfüggvényen belül. A \mathbf{c} vektor a (4)-es összefüggésben ismertett Yeoh hiperelasztikus anyagmodell esetén

három dimenziós, azonban figyelembe véve az (5)-ös összefüggést, az optimalizálási feladat visszavezethető egyváltozós feladatra és gyakorlati tapasztalat alapján gumira becsülhető értékkészlete is

$$0,1 \text{ (MPa)} \leq c_{10} \leq 4 \text{ (MPa)} . \quad (8)$$

A (4)-es összefüggésben ismertetett Yeoh háromváltozós hiperelasztikus anyagmodell paramétereinek inverz illesztését az 1. ábrán látható folyamat alapján végeztük. Az eljárás elején szükséges megadni a kísérleti adatokat, amire egy korábbi publikációnkban laboratóriumi vizsgálatoknak alvettett gumiütköző nyomó karakterisztikáját választottuk [6]. Ebben ismertettük azokat a modellezési megfontolásokat, amik a kísérlet végeleges modelljének elő- és utófeldolgozásához szükségesek. Végül elvégeztük a (7-8) összefüggésekkel felírt paraméter optimalizálási feladatot, melyre a számítási költségek csökkentése miatt, helyettesítő modell alapú optimum becslési módszert alkalmaztunk.



1. ábra. A hiperelasztikus anyagmodell inverz paraméter illesztési folyamata

A helyettesítő modell alapú optimalizáláshoz elvégeztük a mintavételezést a c_{10} hiperelasztikus anyagparaméterek mentén a 1. táblázatban található öt értékre. A gumiütköző nyomóvizsgálatának végeleges modelljével kiértékeljük a rugókarakterisztikát és meghatároztuk az anyagmodell közelítési hibáját $E(\mathbf{c})_{NMAD}$. A paraméter és hiba értékek közötti kapcsolatot másodfokú polinommal közelítettük, így helyettesítve a számítási igényes numerikus szimulációt.

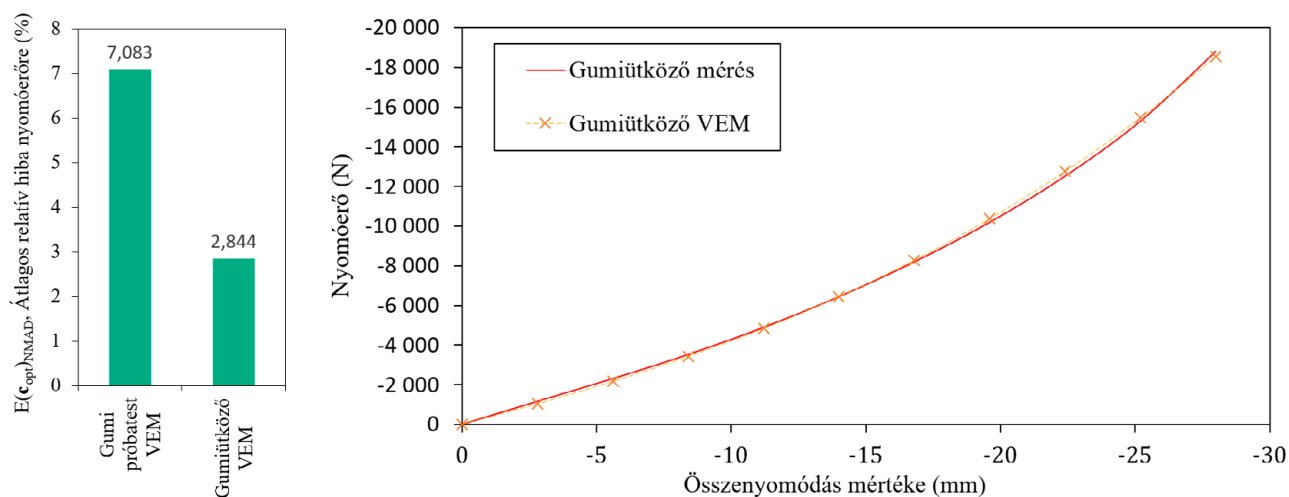
A mintavételezett anyagparaméterekkel futtatott végeleges modell becslési pontossága

1. táblázat

Minta sorszám	1	2	3	4	5
c_{10} (MPa)	0,1	1,075	2,05	3,025	4
$E(\mathbf{c})_{NMAD}$ (%)	93,423	29,414	34,426	98,097	161,595

Mivel a célfüggvényt másodfokú polinommal közelítettük annak optimumát, azaz a becsült optimális anyagparaméter beállítást lokális kereső eljárással határoztuk meg. Ezen anyagparaméterekre a helyettesítő modell által adott közelítési hiba értéke $E(\mathbf{c}_{opt})_{NMAD,SM} = 2,84414$ (%), ami két tizedesjegyig ad pontos becslést a végeleges futtatással kapott hibaértékre $E(\mathbf{c}_{opt})_{NMAD} = 2,84388$ (%).

Ahhoz hogy megvizsgáljuk a kalibrált anyagmodell eltérő terhelési állapotra adott választát, hengeres próbatesten végeztünk nyomóvizsgálatot numerikusan és laboratóriumi körülmények között. A szimulált és mért nyomóerő közötti átlagos relatív hiba mértéke a 2. ábrának megfelelően növekedett, de jelentősen 10% alatt maradt a nemlineáris anyagi viselkedés és eltérő terhelési állapot ellenére is.



2. ábra. A kalibrált Yeoh anyagmodellel futtatott numerikus szimulációból meghatározott karakterisztika és a nyomóerő átlagos relatív hibája a gumiüttköző vizsgálati eredményeihez képest.

4. KÖVETKEZTETÉSEK

A helyettesítő modellen kalibrált háromváltozós Yeoh anyagmodell az általánosan elfogadott 5%-os hibán belül képes közelíteni a gumiüttköző karakterisztikáját annak nagymértékű deformációja és az érintkezési feltételek következtében kialakuló többtengelyű feszültségi állapota alatt. Ezen eredmény alapján megállapítható, hogy a vizsgált geometria és terhelési mérték esetén, célszerű az anyagparaméterek közötti tapasztalati összefüggést alkalmazva egyváltozós feladatra redukálni az optimalizálási feladatot. A célfüggvény ebben az esetben öt különböző anyagparaméter értékre adott válasz alapján jól közelíthető másodfokú polinommal. A kalibrált anyagmodell eltérő geometriára és terhelési állapotra adott válaszát hengeres próbatestek egytengelyű nyomóvizsgálatával vizsgáltuk, a közelítési hiba több mint kétszeresére változott. Ezért a jövőben érdemes lehet olyan optimalizálási eljárást kidolgozni, amiben a további anyagparaméterek is változtatásra kerülnek és a célfüggvény meghatározása több terhelési kísérlet alapján történik.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Palička, P.; Huňady, R.; Hagara, M.; Lengvarský, P. Optimization of Apex Shape for Mounting to the Bead Bundle Using FEM. *Materials (Basel)*. **2022**, *16*, 377, doi:10.3390/ma16010377.
- [2] Jin, L.; Li, S.; Cheng, Y.; Liu, J. A Time-Dependent Yeoh Model to Predict the Corrosion Effect of Supercritical CO₂ on the HNBR Sealing Rubber. *J. Mech. Sci. Technol.* **2022**, *36*, 2461–2470, doi:10.1007/s12206-022-0428-8.
- [3] Kozák, I. *Kontinuummechanika*; Miskolci Egyetemi Kiadó: Miskolc, Hungary, 1995;
- [4] Bergström, J. *Mechanics of Solid Polymers*; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 2015; ISBN 9780323311502.
- [5] Yeoh, O.H. Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber. *Rubber Chem. Technol.* **1993**, *66*, 754–771, doi:10.5254/1.3538343.
- [6] Huri, D. Prediction Accuracy of Hyperelastic Material Models for Rubber Bumper under Compressive Load. *Polymers (Basel)*. **2024**, *16*, 2534, doi:10.3390/polym16172534.
- [7] Bonet, J.; Wood, R.D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*; 2nd ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2008; ISBN 978-0-511-39468-3.
- [8] Rivlin, R.S. Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. I. Fundamental Concepts. *Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A, Math. Phys. Sci.* **1948**, *240*, 459–490, doi:10.1098/rsta.1948.0002.
- [9] Huri, D. Incompressibility and Mesh Sensitivity Analysis in Finite Element Simulation of Rubbers. *Int. Rev. Appl. Sci. Eng.* **2016**, *7*, 7–12, doi:10.1556/1848.2016.7.1.2.