

Többszenzoros rendszer dinamikájának kísérleti vizsgálata

Experimental investigation of the dynamics of a multisensory system

Endrész Balázs^{*,1}, Stépán Gábor¹

¹Műszaki Mechanikai Tanszék, Gépészmérnöki Kar, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Magyarország, Budapest H-1521 Tel.: +36 1 463 1369, fax.: +36 1 463 3471

*Elérhetőség: balazs.endresz@mm.bme.hu

Abstract

Intelligent machines and autonomous systems, such as robots and self-driving vehicles, have now reached a level of development where they can leave the laboratory, transitioning from a well-controlled setting into a continuously changing and uncertain environment. Consequently, a fundamental prerequisite for successful operation is that our robots are capable of acquiring information through multiple sensors, thereby compensating for the emerging uncertainties. The process of performing state estimation by combining signals from multiple sensors of different modalities is known as sensor fusion. In this study, the impact of components with different sampling times on the control system is demonstrated through a classical control problem, the Furuta pendulum.

Keywords: digital sampling, state estimation, sensorfusion, stability, dynamics

Kivonat

Az intelligens gépek és autonóm rendszerek, mint robotok vagy önvezető járművek a mai napra már elérték azt a fejlettségi szintet, hogy elhagyhatják a laboratóriumi környezetet, ezzel pedig egy jól ellenőrzött környezet helyett egy folyamatosan változó, bizonytalan környezetbe kerülnek. A sikeres működés alapfeltételévé vált, hogy több érzékelő segítségével is képesek legyenek robotjaink információhoz jutni, ezzel ellensúlyozva a fellépő bizonytalanságot. A folyamatot, amely során több, eltérő érzékelőből származó jelek kombinálásával hajtjuk végre az állapotbecslést, szenzorfüziónak nevezzük. A dolgozatban eltérő mintavételezési idővel rendelkező tagok szabályozásra gyakorolt hatása kerül bemutatásra egy klasszikus szabályozási feladaton, a Furuta-inga példáján keresztül.

Kulcsszavak: mintavételezés, állapotbecslés, szenzorfüzión, stabilitás, dinamika

1. BEVEZETÉS

A több érzékszerv együttes használata nem új keletű elgondolás. A különböző forrásokból származó információk integrálásának előnyeit a biológiai evolúció már évezredekkel ezelőtt igazolta. Mozgáskoordinációknak biztosítása során nem csupán a proprioceptív érzékelésünkre támaszkodunk, hanem testünk sikeres irányításához egyidejűleg használjuk a látásunkat és a vestibuláris rendszerünket is. Az emberi egyensúlyérzéssel kapcsolatos korábbi vizsgálatok kimutatták, hogy bármelyik érzékszervünk kiesése bizonytalanságot eredményez, és még a hiányhoz való tartós alkalmazkodás után is megnöveli a test imbolygását az egy helyben történő állás során [1].

A mozgásszabályozás mellett az eltérő érzékszervek egyesítésének előnyei a mindennapi tevékenységekben, például az étkezés során is megmutatkoznak. Táplálkozás közben egyidejűleg hagyatkozunk a látásunkra, a szaglásunkra és az ízlelésünkre annak megítélésében, hogy az étel alkalmas-e fogyasztásra [2].

A több szenzor egyidejű jelenléte nem csupán az egyedek viselkedése szempontjából bír kiemelt jelentőséggel, hanem a csoportos működést is alapvetően meghatározza. Ahogy a komplex mérnöki problémák megoldása specializált szakemberek együttműködését igényli, úgy a gépi rendszereknél is jelentős előnyt biztosíthat egy olyan heterogén eszköztár kialakítása, amelyben az egyes komponensek eltérő erősségekkel rendelkeznek. Míg ez bizonyos esetekben tudatos mérnöki tervezési döntés eredménye, máskor elkerülhetetlen adottság. A jövő önvezető autói például a közlekedés során folyamatosan kommunikálni fognak mind egymással, mind az infrastruktúrával [3]. Ezek az adatforrások és környezeti berendezések azonban eltérő tulajdonságokkal rendelkeznek: különbségek léphetnek fel a mintavételezési frekvenciában, a fázisban, vagy éppen a jelminőségben

felbontóképesség és zajszint tekintetében. Ezek az eltérések pedig a hálózatos kommunikáción keresztül nemcsak az egyes járművek dinamikájára, hanem a teljes forgalomra is kihatnak.

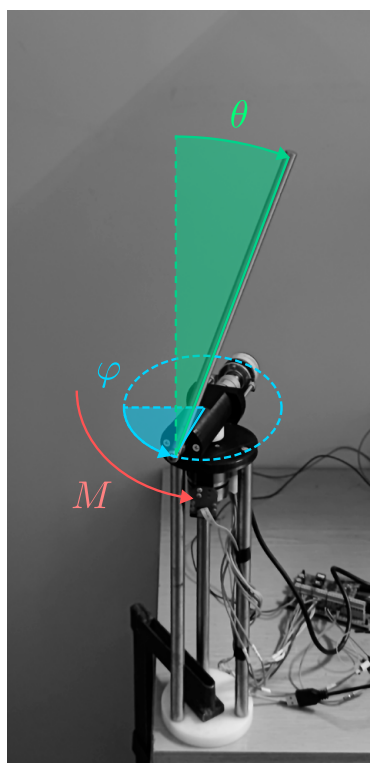
Jelen munka egy klasszikus irányítástechnikai alapeladaton, a forgó inverz inga, közismertebb nevén a Furuta-inga, példáján keresztül mutatja be, hogy a mintavételezési frekvenciákban fellépő eltérések miként befolyásolják a szabályozás egyik legfontosabb minőségi mutatóját: a rendszer stabilitását a szabályozó paraméterterében.

2. MÉRÉSI ELRENDEZÉS ÉS SZABÁLYOZÁSI MEGOLDÁSOK

Az elméleti eredmények mérésekkel is alátámasztásra kerültek, amelyeket a Furuta-inga példáján keresztül demonstrálunk. A méréseket megelőzően analitikus számítások segítségével került felírásra egy olyan linerizált matematikai modell, ami jól közelíti az inga felső helyzete körül a rendszer dinamikáját.

2.1. A Furuta-inga

A vizsgált konstrukció a klasszikus szabályozásemélet egyik alappéldája. Az inga egy alulaktuált, két szabadsági fokkal rendelkező eszköz. A szerkezet két részét ingának és (vízszintes) karnak nevezzük a továbbiakban. A használt inga konstrukció egy korábbi kutatás részeként ([4]) került elkészítésre (lásd 1. ábra), amelynek állapotát az ingára és a karra elhelyezett enkóderek segítségével lehet mérni, illetve a szabályozó jelet egy STM32 mikrokontroller segítségével tudjuk biztosítani. A mérés eredményei ezt követően egy számítógépre kerülnek, ahonnan a felhasználó a vezérlő parancsokat meg tudja adni.



1. ábra. Mérési eszköz: Furuta-inga

Az inga mozgását leíró mozgásegyenleteket másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével lehet levezetni [5] amelyek az alábbi alakban írhatóak fel:

$$\begin{aligned} (J_a + J_p \sin^2 \theta) \ddot{\varphi} + 2J_p \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{\varphi} + (mrl \cos \theta) \ddot{\theta} - (mrl \sin \theta) \dot{\theta}^2 + b_1 \dot{\varphi} &= NU - K \dot{\varphi} \\ J_p \ddot{\theta} + mrl \cos(\theta) \ddot{\varphi} - J_p \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\varphi}^2 + b_2 \dot{\theta} + mgl \sin(\theta) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

ahol J_a a kar tehetelenségi nyomatéka a motor tengelyére vonatkoztatva, J_p az inga tehetelenségi nyomatéka a kar tengelyére, m az inga tömege, l az inga félhosszúsága, r az inga távolsága a motor tengelyétől számítva, b_1 a motorban mért viszkózus súrlódási tényező, b_2 az inga és a kar között mért viszkózus súrlódási tényező, N a motor tényező, míg K a elektromotoros visszaható erő paramétere. A fizikai paraméterek [5] alapján lettek meghatározva.

Érdeemes megjegyezni, hogy a modellezés során a lineáris dinamikában részt vevő nemlineáris jelenségek leírására fókuszáltunk, így a modelltől kimaradtak olyan nemlineáris tagok, amelyek a mérésekben hatást gyakorolnak az eredményre, de a lineáris modell nem tartalmazná azokat. Ilyen a tengelyeken megjelenő szárazsúrlódás, a motor kotyogása és a mintavételezést végző szenzorok mintavételezési felbontása, illetve a mikorkontroller számábrázolásból eredő kerekítés hibája. Az utóbb említett szenzorra vonatkozó problémák, illetve a digitális hatások miatt a rendszer valóságban nem lesz sosem aszimptotikusan stabil, hanem a felső egyensúlyi pont körüli attraktorban végez mikrokaotikus mozgást, sikeres szabályozás esetén is [6, 7].

2.2. PD szabályozó modell

Mivel az inga rendelkezik egy ciklikus koordinátával, a kar pozíciójával, így az állapotter modell felírható csupán 3 állapotváltozó segítségével:

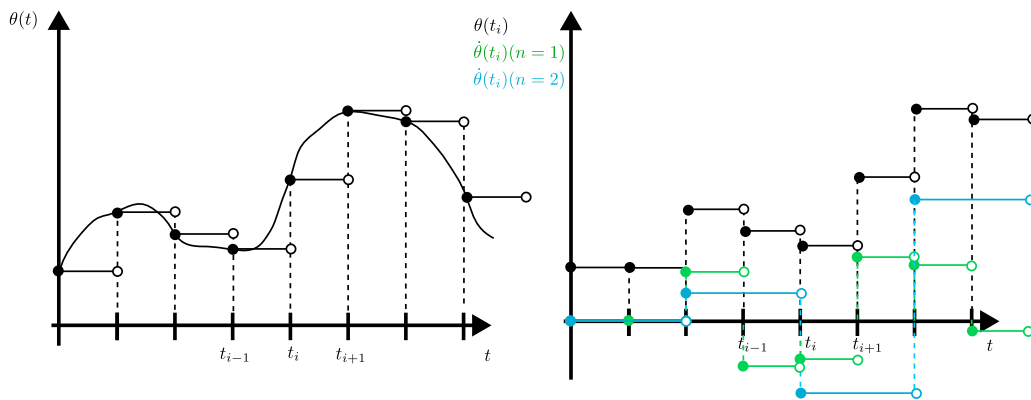
$$\mathbf{x}_i = [\theta_i \quad \dot{\theta}_i \quad \dot{\varphi}_i]^T, \quad (2)$$

ahol i a szenzor mintavételezési időpillanatát adja meg. Az ingán elhelyezkedő enkóderek viszont csupán szöghelyzeteket tudnak mérni, így a sebességek véges differencia módszer segítségével a mintavételezett értékekből kerülnek előállításra, mint

$$\dot{\theta}_i = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta t}, \quad (3)$$

ahol Δt a mintavételezési idő. A mintavételezési időpillanatokkal és szabályozó jellel kibővített állapotter modell ekkor az alábbi tagokból áll

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = [\theta_i \quad \dot{\theta}_i \quad \dot{\varphi}_i \quad \varphi_i \quad \theta_{i-1} \quad \varphi_{i-1} \quad U_i]^T. \quad (4)$$



2. ábra. Mintavételezés folyamata (bal ábra) és nulladrendű tartóval előállított szögpozíció és szögsebesség jelek a klasszikus ($n = 1$) és eltérő mintavételi sebességű ($n = 2$) esetben (jobb ábra).

A szabályozó jel U_i állapota a modellben külön állapotként lett feltüntetve, mivel a nulladrendű tartó modellje alapján egy mintavétel időhosszával később adjuk ki a jeleket a motornak, ezzel biztosítva, hogy a jelek elértek a mikrokontrollerhez és a számításokat végre tudjuk hajtani (lásd 2. ábra):

$$U_i = -P_1\theta_i - D_1\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\Delta t} + D_2\frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\Delta t}, \quad t \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \quad (5)$$

ahol P_1 , D_1 és D_2 paraméterek a teljes állapotvisszacsatolás hibával és annak deriváltjával arányos szabályozó paramétereit mutatják, mint a szabályozó saját, szabadon választható erősítési tényezői. A rendszer dinamikáját leíró diszkrét leképezés így felírható [4], mint

$$\tilde{\mathbf{x}}_{i+1} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}_i, \quad (6)$$

ahol $\tilde{\mathbf{A}}$ dinamikát leíró mátrix meghatározható, mint

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}\Delta t} \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ B_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

ahol \mathbf{A} , \mathbf{A}_3 , \mathbf{B}_1 és B_3 paraméterek alapján az inga szabad mozgását és bemenettel való csatolását írják le (lásd [4]), az alábbi újra definiált szabályozó paraméterek megválasztása mellett:

$$K_1 = -P_1 - D_1/\Delta t, \quad K_2 = D_2/\Delta t, \quad K_3 = D_1/\Delta t, \quad K_4 = -D_2/\Delta t. \quad (8)$$

2.3. Szenzorfüziós PD szabályozó

A szenzorfüziós modell esetében két, a dinamikához hozzájáruló leképezést kell bevezetni: a gyors mintavételezéshez tartozó \mathbf{A}_1 , valamint a lassú mintavételezéshez tartozó, az állapotok között váltó \mathbf{A}_2 mátrixot. A mintavételezési idők arányát jelölje n , amely a vizsgálat során egy természetes szám ($n \in \mathbb{N}$). Továbbá feltételezzük, hogy a pozíció- és sebesség-mintavételezési pontok egybeesnek. A vizsgálatok során arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy gyors pozíció-mintavételezés és egy ahhoz képest lassabb sebességbecslés együttesen miképp változtatja meg a rendszer stabilitását. Ekkor a szabályozó jel az alábbi módon kerül számításra:

$$U_i = -P_1\theta_{i-1} - D_1\frac{\theta_{j-1} - \theta_{j-2}}{n\Delta t} + D_2\frac{\varphi_{j-1} - \varphi_{j-2}}{n\Delta t}, \quad \square_i = \square(i\Delta t), \quad \square_j = \square(jn\Delta t), \quad (9)$$

ahol j a lassabb mintavételezési pontokat jelöli. A modell felírásához a diszkrét dinamikai rendszer általános, $n \in \mathbb{N}$ arányú esetben felírható, mint:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{j+1} = \tilde{\mathbf{A}}_1^n \tilde{\mathbf{A}}_2 \tilde{\mathbf{x}}_j = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{x}}_j, \quad (10)$$

ahol

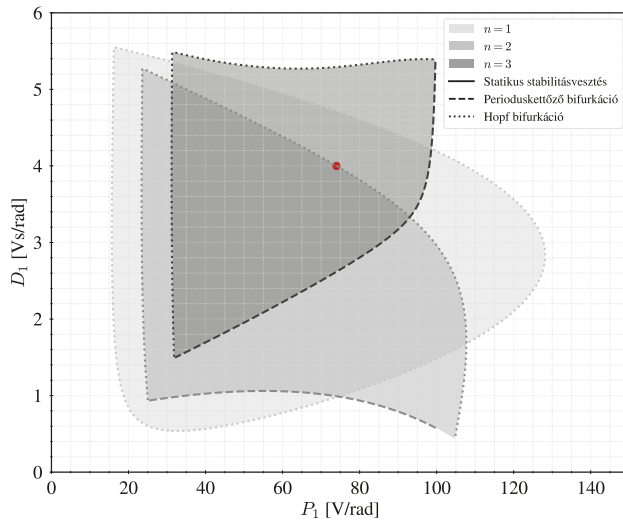
$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \theta_i & \dot{\theta}_i & \dot{\varphi}_i & \varphi_i & \theta_j & \theta_{j-1} & \theta_{j-2} & \varphi_j & \varphi_{j-1} & \varphi_{j-2} & U_i \end{bmatrix}^T. \quad (11)$$

A felírt állapotok szerint meghatározható az \mathbf{A}_1 és \mathbf{A}_2 leképezések, amelyek a tárolt dinamika alapján számolja a mintavételezett rendszer működését:

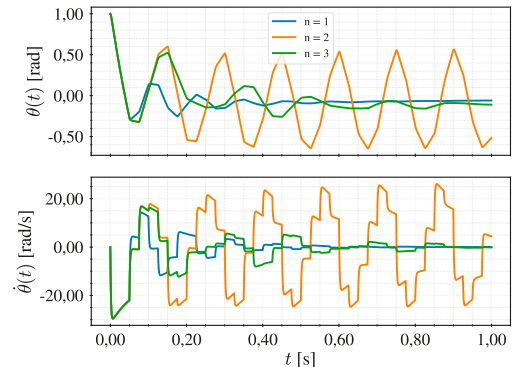
$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}\Delta t} \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ B_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{D_1}{n\Delta t} & \frac{D_1}{n\Delta t} & 0 & \frac{D_2}{n\Delta t} & -\frac{D_2}{n\Delta t} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

A felírt leképezés sajátértékeinek (más néven karakterisztikus multiplikátorainak) segítségével a rendszer stabilitása jól vizsgálható. A rendszert stabilnak nevezük, amennyiben minden karakterisztikus multiplikátor abszolút értéke kisebb egynél (azaz a komplex egységkörön belül helyezkednek el). A stabilitási határokon a stabilitásvesztésnek több, eltérő típusát is definiálhatjuk aszerint, hogy a mértékadó sajátérték hol metszi az egységkört. Statikus stabilitásvesztésről beszélünk, ha a határ mentén egy valós sajátérték a +1-es ponton halad át; fizikai értelemben az inga ekkor eldőli. Amennyiben a stabilitásvesztést a -1-es ponton áthaladó valós gyök okozza, perióduskettőző bifurkációról beszélünk. Végül, ha az egységkört egy komplex konjugált sajátértékpár lépi át (tehát a határon áthaladó gyöknek valós és képzetes része is van), azt diszkrét Hopf-bifurkációnak nevezük, ezekben az esetekben az inga oszcillál stabilitásvesztés közben. A felírt leképezés alapján a dinamikát jellemző \mathbf{A} mátrix sajátértékeit kiszámítottuk $n \in \{1, 2, 3\}$ esetén. Az így előálló stabilitási diagramokat mutatja 3. ábra és a kijelölt pont esetében dinamikai szimulációk, eltérő mintavételezési arányok mellett 4. ábra.

Az elméleti eredményeket a Furuta-inga konstrukcióval mérés segítségével is alátámasztottuk. A kapott kísérleti stabilitásdiagramokat mutatja az 5. ábra.



3. ábra. Szenzorfüziós PD szabályozott Furuta-inga stabilitás diagramjai ($D_2 = 1.5$ [Vs/rad], $\Delta t = 25$ [ms]) eltérő mintavételezési arányok esetén. Barna ponttal a szimulációhoz tartozó ($P_1 = 74$ [V/rad], $D_1 = 4$ [Vs/rad]) pont.



4. ábra. Numerikus szimuláció az inga koordinátájának viselkedéséről eltérő mintavételezési arányok esetén.

3. EREDMÉNYEK

A stabilitást meghatározó karakterisztikus multiplikátorok numerikus vizsgálata során bemutattuk, hogy a szakirodalomban ismert ([4]) $P_1 - D_1$ szabályozási paramétertérben megjelenő stabilitási tartomány jelentősen torzul az eltérő mintavételezési arányok következtében. A stabilitásvesztés módja az n paraméter növelésével megváltozik, és a Hopf-határ mellett egy perióduskettőző bifurkációs határ is megjelenik.

Bár az n növelésének hatására a stabilitási tartomány területe jellemzően szűkül, bizonyos, korábban instabil, paraméterkombinációk stabilá válhatnak. Ezzel párhuzamosan eredetileg stabil paraméterek instabilá válhatnak, majd n további növelésével ismét visszanyerhetik stabilitásukat, amely jelenségre a 4. ábra is példát ad. Az ilyenfajta viselkedés a gyakorlatban különösen veszélyes lehet, mivel nem egyértelmű, hogy az n értékének megváltoztatásával stabilizált vagy destabilizált rendszer megőrzi-e ezt a tulajdonságát más mintavételezési arányok alkalmazása esetén is.

Az elméleti eredményeket kísérleti úton is alátámasztottuk, amelyeket az 5. ábra szemléltet. Látható, hogy bár a paraméterillesztés a korábban említett modellezetlen nemlinearitások és paraméterbizonytalanságok miatt nem mutat tökéletes egyezést, az elméleti modell jó becslést ad a valós rendszer stabil tartományainak elhelyezkedésére. A mérések igazolják, hogy a fizikai rendszer minőségileg a várakozásoknak megfelelően viselkedik, és a stabilitási tartomány alakja az analitikus eredményekkel összhangban változik.

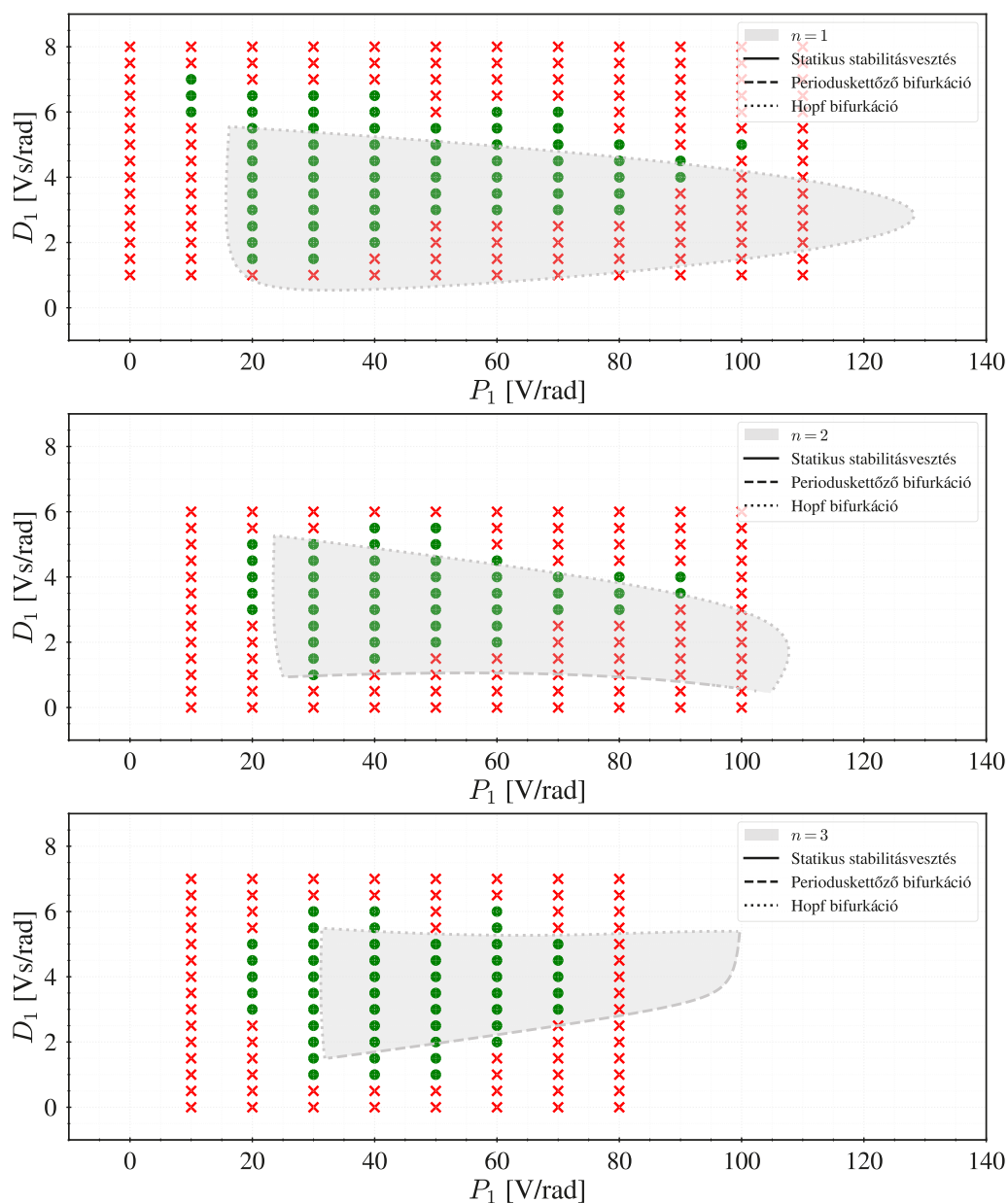
4. KONKLÚZIÓ

A dolgozatban a Furuta-inga példáján keresztül vizsgáltuk meg, hogy egy alulaktuált, instabil rendszerre milyen hatást gyakorol a szabályozóban vagy a szenzorokban fellépő mintavételezési frekvenciák arányának eltérése. Az elméleti számítások igazolták, hogy a stabilitási határok formája és kiterjedése nagymértékben függ a mintavételezési arányok változtatásától. A stabilitási diagramok alakulását ezt követően mérésekkel is alátámasztottuk, amelyek alapján az elméleti stabilitási térkép megbízható becslésnek bizonyult.

A munka rávilágított annak jelentőségére, hogy több szenzor együttes alkalmazása esetén nem csupán az időkésekkel, hanem a mintavételezési idő arányával is érdemes kiemelten foglalkozni. Ez a paraméter önmagában is képes bizonyos szabályozási paraméterkombinációkat stabilizálni vagy destabilizálni, ami alapvetően befolyásolhatja a teljes irányítási rendszer teljesítőképességét és megbízhatóságát.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás az Egyetemi Kutatói Ösztöndíj Program (EKÖP-25-2-BME-137) által támogatott a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott, valamint a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem támogatása alapján valósult meg.



5. ábra. Mért stabilitási tartományok összevetése az elméleti eredményekkel $n = 1, 2, 3$ esetén.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Assländer L. *Analysis of the visual contribution to human reactive balancing*. Dissz. Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2015
- [2] Liggins II M., Hall D., Llinas J. *Handbook of multisensor data fusion: theory and practice*, CRC press, 2017.
- [3] Orosz G., Molnár T. G. *Dynamics and control of connected vehicles*, Springer Nature, 2025.
- [4] Vizi M. B., Stepan G. *Digital stability of the Furuta pendulum based on angle detection*. Journal of Vibration and Control. SAGE Publications Sage UK: London, England, 2024, 30(3-4), 588–597.
- [5] Vizi M. B. *Balancing in Cyclic and Nonholonomic Systems*. Dissz. Budapest University of Technology és Economics (Hungary), 2024
- [6] Gyebrószki G., Csernák G. *The hybrid micro-chaos map: digitally controlled inverted pendulum with dry friction*. Periodica Polytechnica Mechanical Engineering, 2019, 63(2), 148–155.
- [7] Haller G., Stépán G. *Micro-chaos in digital control*. Journal of Nonlinear Science. Springer, 1996, 6(5), 415–448.