

A Newton-féle lehülési törvény képletének új alakja – A tárgyak hűlési sebességének értelmezése

New form of Newton's law of cooling formula – Interpretation of the cooling rate of objects

Dr. habil. ÁRPÁD István Walter

egyetemi docens, Debreceni Egyetem, Műszaki Kar, Gépészmérnöki Tanszék,
4028 Debrecen, Ótemető utca 2-4.;
arpad.istvan@eng.unideb.hu, ORCID: 0000-0002-5052-852X

Abstract

Different objects that are warmer or colder than their surroundings do not cool down or warm up to the ambient temperature at the same rate. The physical law describing the speed of this phenomenon is now known in science as Newton's law of cooling. The formulas used today give a non-linear relationship for the temperature change of a cooling object over the time, which has evolved step by step over the past 300 years with the development of thermodynamics. This article is essentially the next step in this scientific process, as it provides a new form of the law of cooling formula, which makes the process of cooling and heating easier to understand and clarifies the parameters that influence the rate of temperature change in an object. Based on the new law, it has become possible to group objects of different geometries and sizes made of the same material according to their cooling behaviour. This article thus further develops and supplements the scientific descriptions found in the relevant literature and textbooks.

Keywords: Newton's law of cooling, volume-specific surface area, cooling and heating rate of objects, critical thinking

Kivonat

A különböző, környezetüknél melegebb, vagy hidegebb tárgyak a környezeti hőmérsékletre hűlése vagy melegezése nem egyforma idő alatt zajlik le. A jelenség sebességét leíró fizikai törvényt ma Newton-féle lehülési törvénynek nevezi a tudomány. A ma használatos képletek a kihűlő tárgy hőmérséklet-változása és az idő-változása között egy nem lineáris összefüggést adnak meg, amely az elmúlt több, mint 300 év alatt a termodinamika fejlődésével együtt lépésről lépésre alakult ki. A cikk tulajdonképpen ennek a tudományos folyamatnak egy újabb lépése, mivel a hűlési törvény képletének egy új alakját adja meg, ami érthetőbbé teszi a hűlés, melegezés folyamatát, érthetőbbé teszi milyen paraméterek befolyásolják a tárgy hőmérséklet-változásának sebességét. Az új alakú képlet alapján pedig lehetőség adódott arra, hogy az azonos anyagból készült különböző geometriájú és méretű tárgyakat a hűlési viselkedésük alapján csoportosítsuk. Ezzel a cikk továbbfejleszti ebben a témában az eddigi szakirodalmi és tankönyvi leírásokat.

Kulcsszavak: Newton-féle lehülési törvény, térfogat-fajlagos felület, tárgyak hűlési és melegezési sebessége, kritikus gondolkodás

JELÖLÉSEK JEGYZÉKE

A	felület, $[m^2]$	c_p^V	a tárgy térfogat-fajlagos hőkapacitása
Bi	Biot szám, $Bi = \frac{h \cdot L}{k_{object}}$		állandó nyomáson, $c_p^V = c_p \cdot \rho \left[\frac{kJ}{m^3 \cdot ^\circ C} \right]$
C_{object}	a tárgy hőkapacitása állandó nyomáson, $\left[\frac{kJ}{^\circ C} \right]$	D	átmérő, $[m]$
c_p	a tárgy fajlagos hőkapacitása állandó nyomáson, $\left[\frac{kJ}{kg \cdot ^\circ C} \right]$	Fo	Fourier szám (egyfajta dimenziómentes időnek is tekinthető), $Fo = \frac{\alpha \cdot \tau}{L^2}$
		H	magasság, $[m]$
		h	a hőátadási tényező, $\left[\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C} \right]$

h^*	a térfogat-fajlagos hőkapacitással korrigált hőátadási tényező, $h^* = \frac{h}{c_p \rho} = \frac{h}{c_p} \left[\frac{m}{s} \right]$	<i>görög betűk</i>	
k	a hővezetési tényező, $\left[\frac{W}{m \cdot ^\circ C} \right]$	α	a tárgy hődiffúzitívusa, $\alpha = \frac{k_{object}}{c_p} \left[\frac{m^2}{s} \right]$
L	a jellemző hosszúság (méret), $[m]$	Θ	a hőmérsékleti eltérésváltozó, $[K]$ vagy $[^\circ C]$
m	a tárgy tömege, $[kg]$	ρ	a tárgy sűrűsége, $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
Q	az entalpia (a tárgy belső energiája, a hőtartalma), $[kJ]$	τ	az idő, $[s]$
R	a sugár, $[m]$	Ψ	korrekciós tényező, jellemzi a tárgy hőmérsékleti mezőjének egyenlőtlenségét,
T	a hőmérséklet, $[K]$ vagy $[^\circ C]$	ω	a tárgy térfogat-fajlagos felülete, $\omega = \frac{A}{V}$ $\left[\frac{m^2}{m^3} \right]$
V	a térfogat, $[m^3]$		

1. BEVEZETÉS

A környezetükénél melegebb, vagy hidegebb tárgyak a környezeti hőmérsékletre hűlése vagy melegezése nem egyforma idő alatt zajlik le. A jelenség sebességét leíró fizikai törvényt ma Newton-féle lehülési törvénynek nevezi a tudomány. Isaac Newton volt az első, aki az 1701-ben latinul és névtelenül megjelent cikkében - számítási képlet nélkül – a kihűlő tárgy hőmérséklet-változása és az idő-változása között egy nem lineáris összefüggést ismertetett [1]. A tárgyak hűlésének és melegezésének értelmezése nem volt egyszerű, sokáig tartott, mert a hővel, a termodinamikával foglalkozó tudósoknak fel kellett ismerniük a hő és a hőmérséklet fogalmának különbözőségét, valamint a konvekció és a hőszugárzási folyamatok különbözőségét is. A matematikai modell felírásánál pedig további nehézségeket okozott a gyakorlati kísérletekben résztvevő tárgyak alak, méret és anyagkülönbségeiből, valamint a környezeti körülmények különbözőségéből adódó eltérő kísérleti eredmények összeegyeztetése egy képletbe [2] [3]. Tulajdonképpen ennek a hosszú kutatási folyamatnak a legújabb lépését, eredményét mutatja be ez a cikk. A jelenleg használatos képletek, valamint a tárgyak hűlését leíró szakirodalom kritikai gondolkodással történt értelmezése a Newton-féle lehülési törvény képletének egy új alakját eredményezte, ami jobban megmutatja, hogy milyen paraméterektől függ a tárgyak hűlésének és melegezésének sebessége. Az új alakú képlet pedig segítséget adott arra, hogy a tárgyak hűlésével melegezésével kapcsolatos szakirodalmi és tankönyvi leírásokat kiegészítsük és pontosítsuk [4].

2. A SZAKIRODALMI ELŐZMÉNYEK – A PROBLÉMA

2.1. A Newton-féle lehülési törvény

A tárgyak hűlése (ill. melegezése) egy instacionárius folyamat. A következő hő mérlegegyenletet (3) lehet a tárgyra felírni: A tárgy belső energiájának csökkenése (1) egyenlő a környezetbe átadott energiával (2):

$$dQ_{object} = C_{object} \cdot dT_{object} \quad (1)$$

ahol

$$C_{object} = m \cdot c_p.$$

$$dQ_{loss} = -h \cdot A \cdot (T_{object}(\tau) - T_{environment}) \cdot d\tau \quad (2)$$

$$C_{object} \cdot dT_{object} = -h \cdot A \cdot (T_{object}(\tau) - T_{environment}) \cdot d\tau \quad (3)$$

átrendezve

$$\frac{dT_{object}}{(T_{object}(\tau) - T_{environment})} = - \frac{h \cdot A}{C_{object}} \cdot d\tau \quad (4)$$

Vezessük be a Θ hőmérsékleti eltérésváltozót, ami a tárgy hőmérsékletének a környezeti hőmérséklettől való eltérését adja meg:

$$\Theta(\tau) = T_{object}(\tau) - T_{environment} \quad (5)$$

A hőmérsékleti eltérésváltozót alkalmazva a (4) differenciálegyenletünk a következőképpen írható le:

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{h \cdot A}{C_{object}} \cdot \Theta \quad (6)$$

A differenciálegyenlet megoldása (7) az ún. Newton-féle lehülési törvény [5] [6]:

$$\Theta(\tau) = \Theta(0) \cdot e^{-\frac{h \cdot A}{C_{object}} \cdot \tau} \quad (7)$$

ahol

$\Theta(\tau)$ a tárgy hőmérsékletének a környezeti hőmérsékletétől való eltérése a τ időpillanatban [°C],
 $\Theta(0)$ a tárgy hőmérsékletének a környezeti hőmérsékletétől való eltérése $\tau=0$ időpillanatban [°C].

A Newton-féle lehülési törvény képletének exponenciális kitevőjében szereplő törtet többnyire állandónak tekintik, mert a gyakorlatban általában egy adott testet (tárgyat) vizsgálnak meghatározott körülmények között.

A hőmérsékletkülönbség az idő múlásával exponenciálisan változik, és határesetben (egyensúlyban) eltűnik:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} T_{object}(\tau) = T_{environment} \quad (8a)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Theta(\tau) = 0. \quad (8b)$$

A (7) képlet az ún. „lumped-heat-capacity system” modellt írja le, ami azt jelenti, hogy a tárgy hőmérsékleti eloszlása a tárgy belsejében és a felületen minden időpillanatban egyenletes. Ez azt jelenti, hogy bár a hőmérséklet időben változik, de mindenütt a tárgy belsejében és a felületén is ugyanaz a hőmérséklet van egy adott időpillanatban. A jó hővezetésű tárgyak, pl. a fémek viselkedését lehet így jól közelíteni. A rosszabb hővezetésű tárgyaknál Kondratiev javaslatára egy Ψ korrekciós tényezőt alkalmaznak a képletben [7]. A Ψ korrekciós tényező jellemzi a tárgyban a hőmérsékleteloszlást. Ezek a tárgyak lassabban hűlnek ki, mert a tárgy belső hőellenállása lassítja a felületre való energia kijutást. A képlet ezekben az esetekben a következőképpen alakul:

$$\Theta(\tau) = \Theta(0) \cdot e^{-\frac{\Psi \cdot h \cdot A}{C_{object}} \cdot \tau} \quad (7a)$$

A Newton-féle lehülési törvény képletét dimenziómentes számokkal is kifejezik:

$$\Theta(\tau) = \Theta(0) \cdot e^{-Bi \cdot Fo} \quad (9)$$

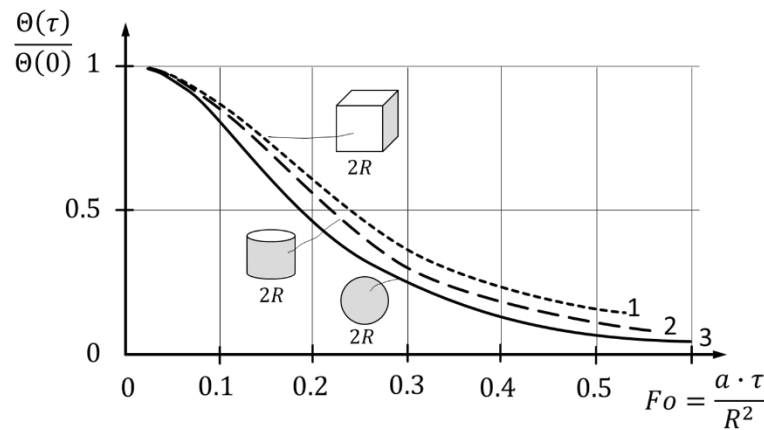
A (7) és a (9) képlet egymásba átalakítható. A két képlet alkalmazásának összehasonlításával ez a cikk a terjedelmi korlát miatt nem foglalkozik.

2.2. A tárgyak hűlésének (melegedésének) szakirodalmi leírása

Isachenko és munkatársai könyvének [7] 3–9. fejezete a „Hűlés (melegedés) függése a tárgyak formájától és méretétől” címet viseli. A fejezet elején helyesen írják le, hogy minél nagyobb a felület-térfogat arány, annál gyorsabban megy végbe a hűlési folyamat. Ezt azonban nem követi további helyes értelmezés és következtetés. Az 1. ábrát közlik, majd az ábrára hivatkozva kijelentik:

„A gömb lehülésének sebessége gyorsabb, mint bármely más testé (azonos Biot-szám mellett)”.

Ugyanez az állítás szerepel Mihejev könyvének 32.d fejezetében is [8]. Mihejev és Isachenko könyveiben található tudományos leírások forrása, bár hivatkozás nincs rájuk, utánanézttem és nem más, mint Gröber könyvének eredeti, 1955-ös kiadása. A leírás szó szerint megegyezik Gröber könyvének C fejezetében leírtakkal és az ábra is ugyanaz, mint a Gröber könyv 32. ábrája. [9]. Gröber könyvének angol, japán, spanyol és orosz fordítása is megjelent, valamint a hivatkozásban megadott „reprint” kiadás is.



1. ábra. A különböző alakú testek hűlési diagramja¹ [7] [8] [9] [10]

Az eredeti angol nyelvű szakirodalom, cikkek és tankönyvek pl. [11] [12] Heisler hőmérsékleti diagramjaira [13], a Gurney-Lurie diagramokra és a Williamson-Adams diagramra [14] hivatkoznak. A Williamson-Adams diagram megegyezik a 1. ábrán láthatóval (Gröber könyvének a diagramja), és a közölt egyes diagramok (gömb, henger stb.) összegzése ugyanazt az eredményt adja.

2.3. A tudományos probléma megfogalmazása

A szakirodalmak az 1. ábrára hivatkozva egy általános kijelentést tesznek, illetve sugallanak a tárgyak hűlési sebessége és a geometriájuk összefüggésére vonatkozóan, miszerint ugyanabban a környezetben, az azonos anyagú, de különböző alakú tárgyak közül a gömb hűl ki a leggyorsabban.

A kérdés az, hogy igaz-e ez az állítás? Igaz-e az 1. ábra? Még ha el is fogadjuk helyesnek az 1. ábrát, a tapasztalatok nem azt mutatják, hogy a gömb hűl ki a leggyorsabban, hiszen akkor minek vannak a hűtőbordák? A következő fejezetből kiderül, hogy a szakirodalomban nem „járták alaposan körül” azt a kérdést, hogy „Mikor melyik tárgy hűl ki a leggyorsabban?”, ha a tárgyak anyaga és a környezeti körülmények azonosak. A cikk ezt a tudományos kérdést rendezzi.

3. A TÁRGYAK GEOMETRIÁJA, MÉRETE ÉS HŰLÉSI SEBESSÉGE KÖZÖTTI ÖSSZEFÜGGÉS MEGHATÁROZÁSA

3.1. A Newton-féle lehűlési törvény új alakja

„Kritikus szemmel” vizsgáljuk meg a „lumped-heat-capacity system” modellel felírt Newton-féle lehűlési törvényt (7)! Mint a 2.1. fejezetben említettük, a (7) képlet exponenciális kitevőjében szerepelő törtet egy tárgy kísérleti vizsgálatainak során többnyire állandónak tekintik a kutatók. De szabad-e állandóként tekinteni erre, amikor a különböző geometriájú és méretű tárgyak felülete is lehet azonos, vagy a geometria és a méret megváltozása a felület-térfogat arányt is megváltoztatja (3.2. fejezet)?

Vizsgáljuk meg és rendezzük át az exponenciális kitevőben lévő törtet:

$$\frac{h \cdot A}{c_{object} \cdot m} = \frac{h \cdot A}{c_p \cdot m} = \frac{h \cdot A}{c_p \cdot \rho \cdot V} = \frac{h}{c_p \cdot \rho} \cdot \frac{A}{V} = \frac{h}{c_p} \cdot \omega = h^* \cdot \frac{A}{V} = h^* \cdot \omega, \quad (10)$$

ahol

$$h^* = \frac{h}{c_p}$$

a térfogat-fajlagos hőkapacitással (c_p^V) korrigált konvekciós hőátadási tényező. A korrekcióra a tárgy (a szilárd anyag) tulajdonságainak (c_p, ρ) figyelembevétele érdekében van szükség. A hűlés(melegedés) sebessége szempontjából h^* a jellemző hőtechnikai paraméter.

$$\omega = \frac{A}{V}$$

a tárgy térfogat-fajlagos felülete, ami a hűlés (melegedés) sebessége szempontjából a jellemző geometriai paraméter.

¹ Az eredeti irodalmi ábrák nem tartalmazzák az itt berajzolt geometriai testek ábráit a méretekkel, csak a testek megnevezését (gömb, henger H=D, kocka) adták meg. A későbbi jobb megértésért rajzoltam be a geometriai testek ábráját és méretét, hasonlóan az [10] könyvében láthatóan.

Ezt a Newton-féle lehülési törvényébe behelyettesítve kapjuk a lehülési törvény új kifejezését [4] [15]:

$$\Theta(\tau) = \Theta(0) \cdot e^{-h^* \cdot \omega \cdot \tau}. \quad (11)$$

A “non-lumped-heat-capacity system” modellre ennél a képletnél is alkalmazható a Kondratiev-féle Ψ korrekciós tényező, hasonlóan az eddigiekhez:

$$\Theta(\tau) = \Theta(0) \cdot e^{-\Psi \cdot h^* \cdot \omega \cdot \tau}. \quad (12)$$

3.2. A térfogat-fajlagos felület (ω) befolyásoló tényezők

A térfogat-fajlagos felület (ω) a geometriai alaktól (erről tanítanak), és a térfogattól függ (ezt azonban nem szokták tanítani, lásd 1. táblázat).

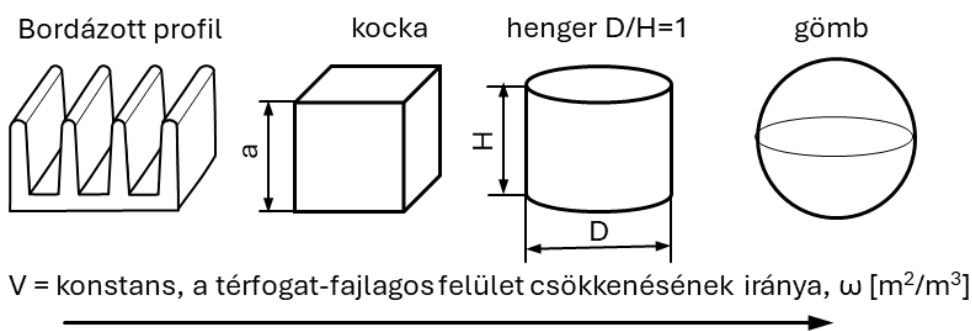
1. táblázat

A különböző geometriájú tárgyak térfogat-fajlagos felületének függése a mérettől (a térfogattól)

	gömb	henger D/H=1	kocka
„V” térfogat, [m³]	$V = \frac{D^3 \pi}{6}$	$V = \frac{D^2 \pi}{4} \cdot H = \frac{D^3 \pi}{4}$	$V = a^3$
„A” felület, [m²]	$A = D^2 \pi$	$A = 2 \cdot \frac{D^2 \pi}{4} + D \pi \cdot H$ $= \frac{3 \cdot D^2 \pi}{2}$	$A = 6 \cdot a^2$
„ω” térfogat-fajlagos felület (A/V), [m²/m³]	$\omega = \frac{6}{D} = \frac{6}{\sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \cdot V}}$ $\omega \approx \frac{4.84}{\sqrt[3]{V}}$	$\omega = \frac{6}{D} = \frac{6}{\sqrt[3]{\frac{4}{\pi} \cdot V}}$ $\omega \approx \frac{5.54}{\sqrt[3]{V}}$	$\omega = \frac{6}{a} = \frac{6}{\sqrt[3]{V}}$

3.2.1. Az azonos térfogatú, de különböző geometriai alakú tárgyak térfogat-fajlagos felülete

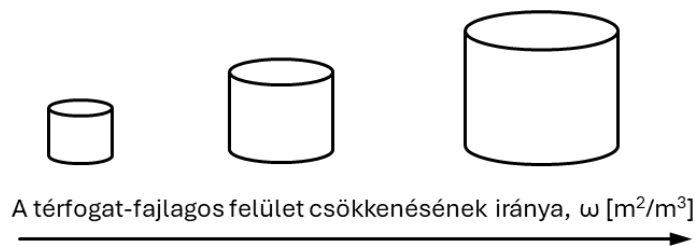
A legkisebb térfogatfajlagos felülettel rendelkező geometriai tárgy a gömb (2. ábra).



2. ábra. Azonos térfogatú, de különböző alakú geometriai testek térfogat-fajlagos felületének csökkenési sorrendje (saját ábra)

3.2.2. Különböző térfogatú, de azonos geometriai alakú tárgyak térfogatfajlagos felülete

A különböző méretű (térfogatú), de azonos geometriai alakú tárgyak térfogatfajlagos felülete nem azonos. Minél nagyobb a tárgy mérete, annál kisebb a tárgy térfogatfajlagos felülete (3. ábra).



3. ábra. Azonos geometriai alakú, de eltérő térfogatú testek térfogat-fajlagos felületének csökkenési sorrendje (saját ábra)

3.3. A tárgyak hűlésének (melegedésének) új szakirodalmi leírása

Azonos körülmények között az azonos anyagú tárgyak lehűlése (felmelegedése) három különböző kategóriába sorolható [4] [15]:

1) *Az azonos térfogatú, de különböző geometriai alakú tárgyak lehűlése (felmelegedése)*

Ebben az esetben a legkisebb térfogat-fajlagos felülettel rendelkező tárgy hűl ki a leglassabban. A gömb, a henger és a kocka összehasonlításakor a gömb rendelkezik a legkisebb térfogat-fajlagos felülettel (lásd az 1. táblázatot és a 2. ábrát). Így a gömb hűl ki a leglassabban, majd a henger és végül a kocka következik. (megjegyzés: Ez teljesen ellentétes azzal, amit az eddigi szakirodalom általános megállapításként ismertet.)

2) *Azonos geometriai alakú, de különböző térfogatú tárgyak (lásd a 3. ábrát) lehűlése és felmelegedése*

Ebben az esetben a legnagyobb térfogatú tárgynak van a legkisebb fajlagos felülete (lásd az 1. táblázatot és a 3. ábrát), ezért a legnagyobb térfogatú tárgy hűl ki a leglassabban. (Erről sem beszél a szakirodalom.)

3) *A harmadik eset egy speciális eset, a különböző geometriai alakú és különböző térfogatú, de azonos térfogat-fajlagos felületű tárgyak lehűlése és felmelegedése*

A szakirodalom tulajdonképpen csak ezt a speciális esetet mutatta be (lásd a 1. ábrát)². Ebben az esetben a legkisebb térfogatú tárgy hűl ki a leggyorsabban. Az 1. ábrán bemutatott gömb, henger és kocka térfogatának meghatározása azt mutatja, hogy a gömb térfogata a legkisebb, ezt követi a henger, majd a legnagyobb térfogatú a kocka, miközben térfogatspecifikus felületük azonos. Így, ha $Bi > 0,1$, akkor a gömb hűl le a leggyorsabban, majd a henger, végül a kocka, ahogy az ábrán látható. Ha $Bi \leq 0,1$, akkor a tárgyak azonos sebességgel hűlnek.

Ezeket az észrevételeket figyelembe kell venni a hőtárolók és a hőátadó tárgyak tervezésekor és üzemeltetésekor.

4. ÖSSZEGZÉS

A cikk megvizsgálja a tárgyak hűlését (melegedését) leíró tudományos ismereteket, szakirodalmi leírásokat. Megállapítható, hogy a szakirodalomban bemutatott 1. ábra helyes, de csak egy speciális esetet mutat be, nem pedig egy általánosat. Ugyanez vonatkozik az ábrához kötődő szakirodalmi megállapításra is, miszerint „A gömb lehűlésének sebessége gyorsabb, mint bármely más testé.” Ez is csak erre az ábrával bemutatott speciális esetre igaz, arra az esetre, amikor a tárgyak térfogat-fajlagos felülete azonos. Más esetekre nem igaz. Tehát a szakirodalomban megjelent 1. ábrát meg kellett volna magyarázni, és nem lett volna szabad az olvasót arra az általános következtetésre vezetniük, hogy ugyanabban a környezetben, az azonos anyagú, de különböző alakú tárgyak között a gömb hűl le a leggyorsabban.

A cikkben a szakirodalom elemzésének eredményeként egyrészt egy új alakú képlet (11) lett felírva a Newton-féle lehűlési törvényre. Az új szemléletű képlet sokkal érthetőbben magyarázza meg, mitől függ a tárgyak hűlési (melegedési) sebessége. Két paraméter szerepel az újonnan felírt képletben, ami meghatározza a hűlési (melegedési) sebességet. Az egyik a hőtechnikai paraméter, a korrigált konvekciós hőátadási tényező (h^*), a másik a geometriai paraméter, a térfogat-fajlagos felület (ω). Sajnos ezek a paraméterek nem szerepelnek, mint vizsgálati paraméterek a hőtani cikkeken, ezért szükséges lenne a képletet terjeszteni és

² Ha kiszámoljuk az 1. ábrába berajzolt gömb, henger és kocka térfogatfajlagos felületét, akkor mindhárom geometriai testre $\omega=3/R$ érték adódik.

oktatni. Másrészt az új alakú képletben szereplő geometriai paraméter további vizsgálatával lehetőség nyílt a tárgyak hűlését és melegezését leíró eddigi szakirodalmi ismeretek kiegészítésére pontosítására. Ennek az oktatására is szükség lenne a hőtan keretein belül.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] I. Newton, „Scala graduum caloris, Calorum descriptiones & signa (Scale of degrees of heat, descriptions & signs of heat).” *Philosophical Transactions*, 1. kötet22, 1. szám270, pp. 824-829, 1701.
- [2] U. Besson, „The History of the Cooling Law: When the Search for Simplicity can be an Obstacle,” *Science & Education*, 1. számDOI: 10.1007/s11191-010-9324-1, August 2010.
- [3] M. Vollmer, "Newton's law of cooling revisited," *European Journal of Physics*, pp. Eur. J. Phys. 30 (2009) 1063–1084, doi: 10.1088/0143-0807/30/5/014, 2009.
- [4] I. W. Árpád, J. T. Kiss és D. Kocsis, „Role of the volume-specific surface area in heat transfer objects: A critical thinking-based investigation of Newton's law of cooling,” *INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER*, 1. kötet 227, pp. 1-9, (2024)
- [5] J. P. Holman, Heat transfer, 10th ed., New York: McGraw-Hill, ISBN 978–0–07–352936–3, 2010.
- [6] J. H. Lienhard IV és J. H. Lienhard V, A Heat Transfer Textbook, Fifth Edition, Cambridge, Massachusetts, USA: Phlogiston Press, 2020.
- [7] V. P. Isachenko, V. A. Osipova és A. S. Sukomel, Heat transfer, 1987.
- [8] M. A. Mihejev, A hőátadás gyakorlati számításának alapjai (Basics of practical calculation of heat transfer), Ötödik, változatlan kiadás (Fifth edition, unchanged) szerk., Budapest: Tankönyvkiadó (Textbook publisher), 1973.
- [9] H. Gröber, S. Erk és U. Grigull, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, Dritte Auflage von Ulrich Grigull/ 3. Neudruck; Reprint Zweiter unveränderter Nachdruck szerk., Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1988.
- [10] J. Argyelán, Transzportfolyamatok, Veszprém: Pannon Egyetemi Kiadó, 2009..
- [11] M. Colakyan, R. Turton and O. Levenspiel, "Unsteady State Heat Transfer to Various Shaped," *Heat Transfer Engineering*, 5:3-4, pp. 82-88, 1984.
- [12] O. Levenspiel, Engineering flow and heat exchange, Revised Edition, New York: Plenum Press, ISBN 978-1-4899-0106-4, 1998..
- [13] M. P. Heisler, „Temperature Charts for Induction and Constant-Temperature Heating,” *Transactions of the A.S.M.E.*, pp. 227-236, 1947.
- [14] W. H. McAdams, HEAT TRANSMISSION, Third Edition, McGRAW-HILL SERIES IN CHEMICAL ENGINEERING szerk., New York, Toronto, London: McGRAW-HILL, 1954.
- [15] I. W. Árpád, *Habilitációs értekezés*, Veszprém: Pannon Egyetem Mérnöki Kar, 2025.