

Mintavételes száraz súrlódásos rendszerek GPU-val gyorsított stabilitásvizsgálata

GPU-accelerated stability analysis of sampled-data systems with dry friction

HABA Tamás¹ hallgató, Dr. BUDAI Csaba¹ adjunktus

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar,
Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

¹haba.tamas@mogi.bme.hu, ²budaicsaba@mogi.bme.hu

Abstract

Sampling and dry friction phenomena are often present in mechatronic systems; however, the mathematical modeling and analysis of their combined effects are extremely difficult due to the emerging switched dynamical behavior. Without exact analytical methods, the effects of different parameters on stability can only be examined by compute-intensive simulations. This paper presents a method for optimizing the simulation tasks by GPU-accelerated computing by the example of position control of a single degree of freedom system.

Keywords: sampling, dry friction, stability analysis, simulation, graphical processing unit

Kivonat

A mintavételezés és a száraz súrlódás jelenségei gyakran jelentkeznek mechatronikai rendszerekben, együttes hatásuk modellezése és matematikai vizsgálata azonban rendkívül összetett lehet a kialakuló kapcsolt dinamikai viselkedés miatt. A különböző paraméterek stabilitásra gyakorolt hatásait analitikus eszközök hiányában csak nagy számítási igényű szimulációkkal lehet vizsgálni. Jelen tanulmányban grafikus processzor (GPU) segítségével kerülnek optimalizálásra ezen szimulációs feladatok egy egyszabadságfokú rendszer pozíciószabályozásának példáján keresztül.

Kulcsszavak: mintavételezés, száraz súrlódás, stabilitásvizsgálat, szimuláció, grafikus processzor

1. BEVEZETÉS

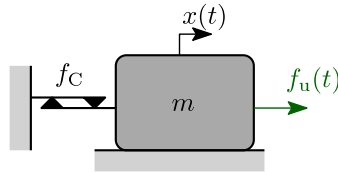
A mechatronika egyik fő területe a mozgásszabályozás, mely során a cél egy adott objektum eljuttatása egy előírt pozícióra, vagy egy előírt pálya követése. Ez a feladat olyan összetett rendszerekkel valósítható meg, melyben egy mechanikai alrendszer szabályozását számítógép végzi [1]. A legfontosabb tervezési kritérium a stabilitás, melynek vizsgálatát megnehezíti, hogy a digitális megvalósítás miatti mintavételezés [2] és a mechanikai rendszerben található száraz súrlódás együttesen jelentkeznek.

A száraz súrlódás ugyan számos módon modellezhető [3], a stabilitásvizsgálat során viszont gyakran közelítő módszereket [4] alkalmaznak, vagy teljesen elhanyagolják azt, hogy lineáris tervezési megközelítésekkel [5], analitikusan kezelhető legyen a feladat. Ezzel azonban a valós rendszerek viselkedése kevésbé pontosan modellezhető.

Jelen tanulmány egy egzakt szimulációra épülő stabilitásvizsgálati módszert mutat be, amivel a száraz súrlódás és a mintavételezés együttes hatásai vizsgálhatók. Az eljárás grafikus processzor alkalmazásával párhuzamosítható [6], így a modell pontossága mellett a számítási sebesség is rendkívül kedvező marad.

2. A VIZSGÁLT RENDSZER MODELLJE

Tekintsük az 1. ábrán látható mechanikai rendszert, melyben egy m tömegű testre f_C nagyságú Coulomb-súrlódási erő hat, továbbá $f_u(t)$ beavatkozó erő hatására vizsgáljuk az $x(t)$ pozíciókoordináta változását.



1. ábra: A vizsgált egyszabadságfokú rendszer mechanikai modellje.

A rendszerre felírható az alábbi mozgásegyenlet

$$m \ddot{x}(t) = -f_C \operatorname{sgn}(\dot{x}(t)) + f_u(t), \quad (1)$$

ahol $\operatorname{sgn}(\cdot)$ az előjelfüggvényt jelöli. A továbbiakban vizsgáljunk egy τ mintavételi idővel megvalósított digitális szabályozót, amely esetén a beavatkozó erő a k -adik és a $k + 1$ -edik mintavételi pillanat között állandó

$$f_u(t) = -p x(k\tau) - d \dot{x}(k\tau) \quad t \in [k\tau, (k + 1)\tau) \quad (2)$$

értéket vesz fel, valamint p és d szabályozási paraméterek segítségével a kitéréssel és a sebességgel arányos módon történik a beavatkozás.

A rendszert leíró differenciálegyenlet kapcsolt dinamikai jelleget mutat, ugyanis az (1) egyenlet jobb oldalán szakaszosan állandó értékű függvények szerepelnek. Ez két különböző hatásból ered, egyfelől a mintavételezés, másfelől a Coulomb-súrlódás eredményeként. A mintavételes szabályozó minden mintavételi pillanatban a beavatkozó erő ugrásszerű változását eredményezi, a mintavételek között pedig állandó értéken tartja azt (zérusrendű tartó). Ezzel együttesen a súrlódási erő a mozgásirány esetleges változásakor előjelet vált, ennek bekövetkezése azonban a mintavételezéstől függetlenül történik.

A mozgásegyenlet egy szakaszosan lineáris differenciálegyenlet, így két egymást követő kapcsolás között megoldható. Amennyiben t_0 és t_1 időpillanatok között a súrlódási erő és a beavatkozó erő állandó és eredőjük f_Σ értékű, úgy a mozgásegyenlet az alábbi

$$m \ddot{x}(t) = f_\Sigma \quad t \in [t_0, t_1) \quad (3)$$

lineáris differenciálegyenletet eredményezi. Ismert $x(t_0) = x_0$ és $\dot{x}(t_0) = v_0$ kezdeti feltételek mellett a vizsgált időintervallum végén a pozíció

$$x(t_1) = \frac{f_\Sigma}{2m} (t_1 - t_0)^2 + v_0 (t_1 - t_0) + x_0 \quad (4)$$

értéket, a sebesség

$$\dot{x}(t_1) = \frac{f_\Sigma}{m} (t_1 - t_0) + v_0 \quad (5)$$

értéket vesz fel. Minden újabb kapcsolás, ami a mintavételezés vagy a száraz súrlódás hatására lép fel, újabb kezdetiérték-probléma megoldását igényli. A könnyebb megértés érdekében a továbbiakban

$$(x_0, v_0) \xrightarrow[f_\Sigma = \dots]{\Delta t = \dots} (x_1, v_1) \quad (6)$$

jelöli azt az állapotátmenetet, amit f_Σ nagyságú állandó erő okoz Δt ideig.

3. STABILITÁSVIZSGÁLAT

A szabályozótervezés során az elsődleges kritérium, hogy a zárt szabályozási láncban kialakuló rezgések az idő előrehaladtával lecsengjenek, azaz stabilak legyenek. A továbbiakban bemutatásra kerül, hogy miként vizsgálható különböző szabályozási paraméterek és kezdeti feltételek hatására a szabályozási lánc stabilitása.

3.1. Analitikus stabilitásvizsgálat a súrlódás elhanyagolásával

Amennyiben a száraz súrlódást elhanyagoljuk ($f_C = 0$), úgy csak a mintavételezés okozta kapcsolásokat szükséges figyelembe venni. A k -adik és $k + 1$ -edik mintavételi pillanat között a $t_0 = k\tau$ és $t_1 = (k + 1)\tau$, valamint az $f_\Sigma = -p x_0 - d v_0$ helyettesítésekkel (4) és (5) egyenlet alapján az alábbi

$$\begin{bmatrix} x((k + 1)\tau) \\ \dot{x}((k + 1)\tau) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \frac{p\tau^2}{2m} & \tau - \frac{d\tau^2}{2m} \\ -\frac{p\tau^2}{m} & 1 - \frac{d\tau}{m} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x(k\tau) \\ \dot{x}(k\tau) \end{bmatrix} \quad (7)$$

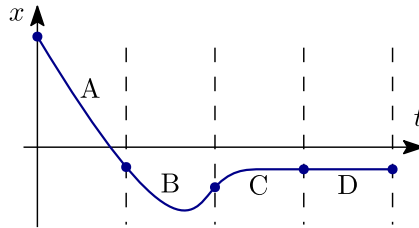
lineáris leképezés határozható meg, amivel a pozíció és sebesség értékek sorozata előállítható. Ez a leképezéssorozat akkor konvergens, ha a szabályozási paramétereket tartalmazó \mathbf{A} együtthatómátrix z_1 és z_2 sajátértékeire fennáll a

$$|z_1| < 1 \text{ és } |z_2| < 1 \quad (8)$$

összefüggés, ami alapján bármely (m, p, d, τ) paraméterkombináció esetén eldönthető a stabilitás.

3.2. Egzakt szimuláció a súrlódás figyelembevételével

A száraz súrlódás figyelembevétele ($f_c > 0$) esetén összetett kapcsolási dinamika jelentkezik, ugyanis a mintavételezésen felül a sebesség nullátmeneténél a Coulomb-súrlódási erő ugrásszerűen változik. Annak megfelelően, hogy egy mintavételi intervallumban miként következik be ez az esemény, négy mozgásforma különíthető el, melyeket a 2. ábra szemléltet.



2. ábra: A vizsgált rendszer szimulációja során megkülönböztetett mozgásformák.
A: egyirányú mozgás, B: irányváltás, C: letapadás, D: statikus egyensúly

Egyirányú mozgás során a súrlódási erő nem vált előjelet, *irányváltás* során -1 -szeresére változik, *letapadás* során a csúszási súrlódást tapadási súrlódás váltja fel, *statikus egyensúly* esetén pedig végig tapadási súrlódási erő hat, ami a beavatkozó erővel egyensúlyt tart. A négy eset az alapján választható szét, hogy az f_u beavatkozó erő meghaladja-e az f_c súrlódási erőt, valamint a két mintavételi időpillanat között mikor következik be a megállás. Utóbbi feltételhez bevezethető a t_{stop} megállási idő, amely az alábbi módon számolható

$$\dot{x}(t_{\text{stop}} - t_0) = 0 \Leftrightarrow t_{\text{stop}} = \frac{v_0}{p x_0 + d v_0 + f_c \operatorname{sgn}(v_0)}. \quad (9)$$

melynek értéke 0 és τ közé esik, amennyiben két mintavételi időpillanat között a sebesség eléri a zérus értéket.

Diszkrét idejű szimuláció végezhető, amennyiben meghatározható az a leképezés, amely bármely mintavételi időpillanatban felvett (x_0, v_0) állapothoz hozzárendeli a következő mintavételben felvett (x_1, v_1) állapotot. Ez a leképezés a négy megkülönböztetett mozgásforma esetén más és más, ahogyan ezt az 1. táblázat foglalja össze.

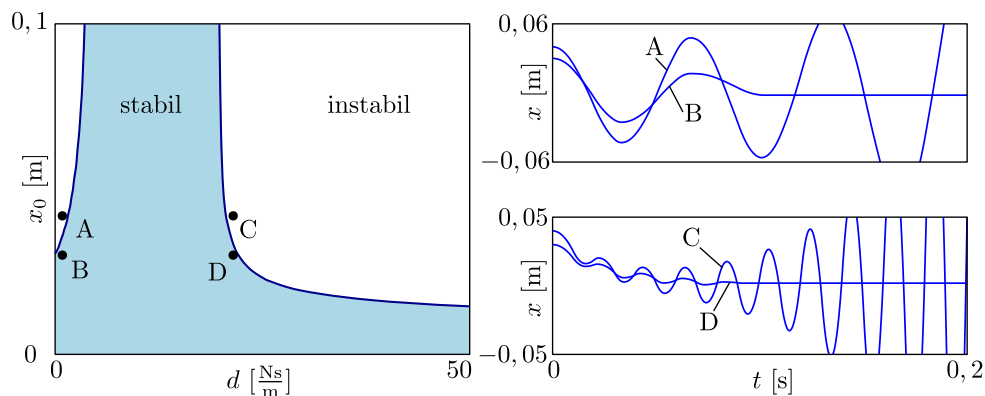
1. táblázat: A különböző mozgásformák esetén alkalmazott leképezések.

Leképezés típusa	Feltétel	Leképezés
statikus egyensúly	$t_{\text{stop}} = 0$ és $ f_u \leq f_c$	$(x_0, v_0) \xrightarrow[f_{\Sigma}=0]{\Delta t=\tau} (x_1, v_1)$
letapadás	$t_{\text{stop}} \in (0, \tau]$ és $ f_u \leq f_c$	$(x_0, v_0) \xrightarrow[f_{\Sigma}=f_u-f_c \operatorname{sgn}(v_0)]{\Delta t=t_{\text{stop}}} (x^*, v^*) \xrightarrow[f_{\Sigma}=0]{\Delta t=\tau-t_{\text{stop}}} (x_1, v_1)$
irányváltás	$t_{\text{stop}} \in [0, \tau]$ és $ f_u > f_c$	$(x_0, v_0) \xrightarrow[f_{\Sigma}=f_u-f_c \operatorname{sgn}(v_0)]{\Delta t=t_{\text{stop}}} (x^*, v^*) \xrightarrow[f_{\Sigma}=f_u-f_c \operatorname{sgn}(f_u)]{\Delta t=\tau-t_{\text{stop}}} (x_1, v_1)$
egyirányú mozgás	$t_{\text{stop}} \notin [0, \tau]$	$(x_0, v_0) \xrightarrow[f_{\Sigma}=f_u-f_c \operatorname{sgn}(v_0)]{\Delta t=\tau} (x_1, v_1)$

3.3. A szimulációk gyorsítása GPU segítségével

A stabilitás szimulációs eszközökkel is vizsgálható, ha kellően sok iteráció után statikus egyensúlyi helyzetet elért rendszereket tekintjük stabilnak. A paraméterek és kezdeti feltételek változtatásának hatását vizsgálva azonban nagymennyiségű számítást kell elvégezni, ami megnöveli a szimulációk futtatásának időtartamát.

A 3. ábra egy stabilitási térkép látható, amin a d szabályozási paraméter és a x_0 kezdeti pozíció függvényében kerültek megkülönböztetésre stabil és instabil rezgések. A többi paraméter és kezdeti feltétel fix értékű ($m = 0,1 \text{ kg}$, $\tau = 0,01 \text{ s}$, $p = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$, $f_c = 10 \text{ N}$, $v_0 = 0 \text{ m/s}$). Az ábrázoláshoz 1000×1000 szimuláció került elvégzésre, mindegyik során 1000 iteráció futott le. Mivel a szimulációk egymástól függetlenül elvégezhetők, így ez a feladat GPU segítségével párhuzamosítható. Az OpenCL nyelven készített implementáció Intel® UHD Graphics 620 integrált videokártyán futva 0,264 másodperc alatt futott le. A számítások szimpla pontosságú (32 bites) lebegőpontos számokkal történtek.



3. ábra: A stabilitási térkép (balra) és a jelölt pontokban kialakult rezgések (jobbra).

4. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen tanulmány a száraz súrlódással bíró mintavételes rendszerek stabilitásvizsgálati lehetőségeit tárgyalta. Bemutatásra került, hogy analitikus megoldás csupán a száraz súrlódás elhanyagolásával adható meg könnyen, súrlódást tartalmazó modellek esetén más megközelítés szükséges. Ezen felül egy diszkrét idejű szimuláción alapuló stabilitásvizsgálat is bemutatásra került, amely grafikus processzoron implementálva alkalmas a stabil paramétertartományok hatékony feltérképezésére.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerző konferencia részvételét a BME Gépészmérnöki Kar NTP-HHTDK-21-0051 pályázata támogatta.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Phillips, C, Digital control system analysis & design, Pearson Education Limited, Harlow, 2015. ISBN: 9781292061221
- [2] Ogata, K, Discrete-Time Control Systems, Prentice-Hall, USA, 1987. ISBN: 0132161028
- [3] Pennestri, E, et. al., Review and comparison of dry friction force models, In: Nonlinear Dynamics, Springer, 2015, 83(4), pp. 1785-1801. doi: [10.1007/s11071-015-2485-3](https://doi.org/10.1007/s11071-015-2485-3)
- [4] Budai, C, Kovács L, On the Stability of Digital Position Control with Viscous Damping and Coulomb Friction, In: Periodica Polytechnica Mechanical Engineering, 2017, 61(4), pp. 266-271. doi: [10.3311/PPme.10537](https://doi.org/10.3311/PPme.10537)
- [5] Chen, C, Linear System Theory and Design, Oxford University Press, USA, 1995. ISBN: 0195115953
- [6] Scarpino, M, OpenCL in Action, Manning, 2011. ISBN: 1617290173