

Emberi reakcióidő hatása a járművontatás stabilitására

The effect of human reaction time on the stability of vehicle towing

SZAKSZ Bence, STÉPÁN Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki kar, Műszaki Mechanikai Tanszék,
H-1111 Bp., Műegyetem rkp. 5., MM ép.Tel.: +36 1 463-1332,
<https://www.mm.bme.hu>, szaksz@mm.bme.hu, stepan@mm.bme.hu

Abstract

The paper introduces a model for examining the longitudinal stability of vehicle towing when both the driver of the towing car and the driver of the towed vehicle control their own vehicle with reaction time delay. Utilizing the translational symmetry, the Routh reduction can be applied to construct the governing equations. The linear stability analysis of the reduced model shows that increasing the time delay or the natural frequency of the system, the stable domain disappears and then reappears and disappears again and again. Based on the results, the stiffness of the drawbar can be optimized.

Keywords: force control, delay, towing, Routh reduction, stability chart

Kivonat

Ismertetésre kerül egy mechanikai modell járművontatás longitudinális stabilitásának vizsgálatára, amelyben mind a vontató, mind a vontatott járművet vezető személy időkéssel szabályozza saját járművét. A translációs szimmetriát kihasználva, Routh redukció alkalmazásával nyerhetjük a mozgásegyenleteket. A modell stabilitás-vizsgálata azt mutatja, hogy az időkésést vagy a rendszer sajátkörfrekvenciáját növelve a kezdetben jelen levő stabil tartomány eltűnik, majd újra és újra megjelenik. A vonórudak rugalmasságát ennek ismeretében célszerű optimumra tervezni.

Kulcsszavak: erőszabályozás, késés, vontatás, Routh redukció, stabilitási térkép

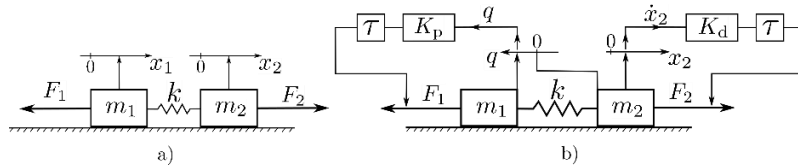
1. BEVEZETÉS

A közlekedési eszközök stabilitásának vizsgálata alapvető fontosságú, és ez különösen igaz, ha csatolva vannak a járművek, mint például vontatás esetén. Vontatott járművek különböző módokon veszthetik el a stabilitásukat: kialakulhat oldalirányú oszcilláció, amit kigyózásnak is szokás nevezni [3], de a vontatott és a vontató jármű hosszirányú rezgésbe is kezdhet [5]; az utóbbit vizsgálja a jelen kutatás. Szabályozási rendszerekben az egyik kritikus paraméter az időkésés; ökölszabályként ismert, hogy az időkésésnek destabilizáló hatása van, de néha egyfajta csillapítást is vihet a rendszerbe [4].

Ismertetünk egy modellt járművek vontatásának dinamikai leírására, ahol mind a vontató, mind a vontatott járművet vezető személy időkéssel szabályozza saját járművét. A modell translációs szimmetriáját kihasználva elvégezzük a Routh redukciót, amellyel csökkenthető a rendszer dimenziója, majd az így kapott mozgásegyenletek vizsgálatával stabilitási térképek kerülnek bemutatásra.

2. MECHANIKAI MODELL

Az 1. a) ábrán látható a vontatás leegyszerűsített mechanikai modellje. A vontató és a vontatott járművet rendre egy m_1 és egy m_2 tömegű test, míg a két járművet összekötő rugalmas vonórudat (kötelet) egy k merevségű rugó modellezi. Az m_1 és m_2 tömegű testek vízszintes irányú elmozdulását az x_1 és x_2 koordináták írják le, amelyeket az általánosság megszorítása nélkül úgy választunk meg, hogy a rugó nyugalmi állapotban legyen $x_1 = x_2$ esetén. Feltételezzük, hogy a két jármű vezetője előzetesen megegyezik, hogy a vonórúdban F_d nagyságú húzóerőt tartanak, ezáltal a vontató jármű esetleges hirtelen fékezése esetén se futhatna rá a vontatott jármű. A vontató jármű vezetője a vontatás sebességére szabályoz, míg a vontatott járműben ülő személy úgy próbálja használni a féket, hogy a vonórúdban állandó F_d nagyságú húzóerő ébredjen.



1. ábra Járőmvontatás mechanikai modellje: a) járművekhez kötött koordinátákkal b) Routh redukcióhoz alkalmazott koordinátákkal és a szabályzás feltűntetésével.

Az 1 testet fékező erő arányos az F_e erőhibával K_p erősítési tényező mellett, ahol az erőhiba az F_d megkívánt és az F_m érzékelt vonóerő különbsége:

$$F_1(t) = -K_p F_e(t) + F_d = -K_p (F_m(t) - F_d) + F_d. \quad (1)$$

A 2 testre ható erő tartalmaz K_d erősítési tényezővel egy arányos tagot, továbbá megjelenik az F_d előírt húzóerő a vonórúdban:

$$F_2(t) = -K_d v_e(t) + F_d = -K_d (v_{2,m}(t) - v_d) + F_d, \quad (2)$$

ahol a v_e sebességhiba, azaz megkívánt v_d sebesség és a vontató jármű vezetője által a sebességmérőről leolvasott $v_{2,m}$ sebesség különbsége. A modellben a két emberi operátor reakcióidejét azonos, τ nagyságú állandó időként figyelembe véve a vontatott jármű vezetője által érzékelt F_m erő és a vontató jármű vezetője által érzékelt $v_{2,m}$ sebesség az alábbi késleltetett alakot ölti:

$$F_m(t) = k(x_2(t - \tau) - x_1(t - \tau)), \quad v_{2,m}(t) = \dot{x}_2(t - \tau). \quad (3)$$

A két szabadsági fokú rendszer mozgásegyenletét mátrixos alakban felírva két egymáshoz csatolt másodrendű késleltetett differenciálegyenletet kapunk, ahol a késést $F_1(t)$, és $F_2(t)$ szabályzóerők tartalmazzák:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

3. ROUTH REDUKCIÓ

Az előző fejezetben felírtuk a mozgásegyenleteket, azonban a dinamika csak a két jármű távolságától és a vontatás sebességétől függ, ezért a translációs szimmetriát kihasználva alkalmazható a Routh redukció [2]. Ez a módszer lehetőséget ad a mozgásegyenlet struktúrájának egyszerűsítésére abban az esetben, ha a rendszer tartalmaz úgynevezett ciklikus koordinátákat. Egy koordinátát akkor nevezünk ciklikusnak, ha nem jelenik meg a Lagrange függvényben és az általános erők is függetlenek tőle. A Routh redukció alkalmazásával a mozgásegyenlet szétválasztható egy a főmozgáshoz tartozó első és másodrendű differenciálegyenleteket tartalmazó egyenletrendszerre, illetve a ciklikus koordinátákhoz tartozó elsőrendű differenciálegyenletekre.

Bevezetve a rúgó megnyúlásához tartozó $q = x_2 - x_1$ új általános koordinátát (lásd: 1. b) ábra), és megtartva az x_2 általános koordinátát, a rendszer Lagrange függvénye független az x_2 pozíciótól:

$$L(q, \dot{q}, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_2^2 - m_1 \dot{x}_2 \dot{q} + \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2. \quad (5)$$

A q és x_2 koordinátákhoz rendre a

$$Q_1(q) = -K_p (kq(t - \tau) - F_d) + F_d, \quad (6)$$

$$Q_2(q, \dot{x}_2) = K_p (kq(t - \tau) - F_d) - K_d (\dot{x}_2(t - \tau) - v_d) \quad (7)$$

általános (szabályozó) erők tartoznak, amelyek ugyancsak függetlenek x_2 -től, így x_2 a szabályozott rendszer ciklikus koordinátája, míg q a szabályozott rendszer pozícionális koordinátája.

Vezessük be az általános impulzust a Lagrange függvény \dot{x}_2 szerinti deriváltjaként:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = (m_1 + m_2) \dot{x}_2 - m_1 \dot{q}, \quad (8)$$

amiből kifejezhető a ciklikus koordináta deriváltja

$$\dot{x}_2 = \frac{p + m_1 \dot{q}}{m_1 + m_2} =: f(\dot{q}, p). \quad (9)$$

A Routh redukció a Hamilton függvényt használja a ciklikus koordinátákhoz, és a Lagrange függvényt a pozícionális koordinátákhoz tartozó dinamika leírására. Definíció szerint a Routh függvény alakja:

$$R(q, \dot{q}, p) = pf(\dot{q}, p) - L(q, \dot{q}, f(\dot{q}, p)), \quad (10)$$

míg a Routh egyenletek struktúrája ciklikus rendszerekre:

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial R}{\partial q} = Q_1, \quad (11)$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_2} = -\dot{p} + Q_2, \quad (12)$$

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \dot{x}_2, \quad (13)$$

ahol a (12) egyenlet bal oldala zérus, hiszen a $R(q, \dot{q}, p)$ független \dot{x}_2 -től. A főmozgás általános impulzushoz tartozó elsőrendű differenciálegyenlete csatolódik a (11) és (12) egyenletekből származtatható, pozícionális koordinátához tartozó másodrendű differenciálegyenlethez:

$$\dot{p} = Q_2(q, f(\dot{q}, p)), \quad (14)$$

$$\ddot{q} + \omega_n^2 q = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} Q_1(q) + \frac{1}{m_2} Q_2(q, f(\dot{q}, p)), \quad (15)$$

ahol ω_n a szabályozatlan rendszer sajátkőrfrekvenciája

$$\omega_n^2 = \sqrt{k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}. \quad (16)$$

A (14) és (15) egyenletek függetlenek a rejtett mozgástól, amelyet (13)-ból származtathatunk és ugyanazt az alakot ölti, mint a (9) egyenlet.

4. STABILITÁSVIZSGÁLAT

Vezessük be a $\tilde{t} = t/\tau$ dimenziótlan időt, jelölje vessző az erre vonatkozó deriváltat. Legyenek az $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ állapotvektor és a dimenziótlan paraméterek a következő módon definiálva:

$$y_1 = q - \frac{F_d}{k}, \quad y_2 = q' \tau, \quad y_3 = \left(\frac{p}{m_1 + m_2} - v_d \right) \tau, \quad (17)$$

$$\mu = \frac{m_1}{m_2}, \quad k_d = \frac{K_d}{m_2} \tau, \quad k_p = K_p, \quad \alpha = \omega_n \tau, \quad (18)$$

ahol μ a tömegarány, k_d a dimenziótlan differenciális tényező és α a dimenziótlan időkésés. Ezeket felhasználva a redukált rendszer dinamikáját a következő késleltetett differenciálegyenlet-rendszer írja le:

$$\mathbf{y}'(\tilde{t}) = \mathbf{A}\mathbf{y}(\tilde{t}) + \mathbf{B}\mathbf{y}(\tilde{t} - 1), \quad (19)$$

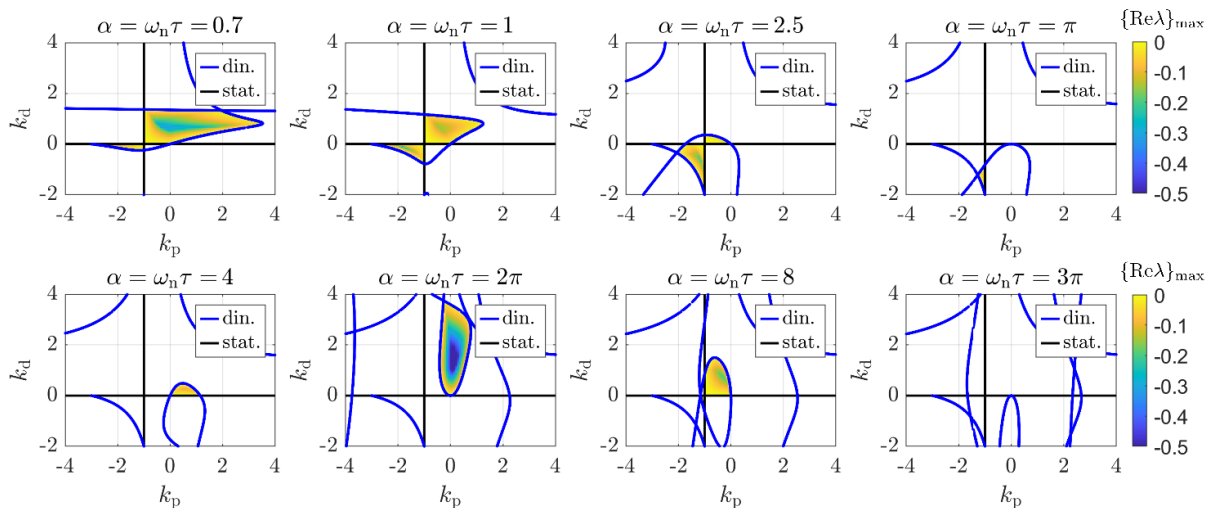
ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha^2 k_p}{1 + \mu} & -\frac{\mu k_d}{1 + \mu} & -k_d \\ \frac{\mu \alpha^2 k_p}{(1 + \mu)^2} & -\frac{\mu k_d}{(1 + \mu)^2} & -\frac{k_d}{1 + \mu} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

A lineáris rendszer stabilitását a $D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}e^{-\lambda})$ karakterisztikus polinom zérushelyei határozzák meg, a rendszer stabil, ha a

$$D(\lambda) = \lambda^3 + \alpha^2 \lambda + \left(k_d \lambda^2 + \frac{\alpha^2 k_p}{1 + \mu} \lambda + \frac{\alpha^2 k_d}{1 + \mu} \right) e^{-\lambda} + \frac{\alpha^2 k_p k_d}{1 + \mu} e^{-2\lambda} = 0 \quad (21)$$

karakterisztikus egyenlet valamennyi gyöke negatív valós résszel rendelkezik [1]. A stabilitás vizsgálatához használjuk a D-szétválasztás módszert [4]! Az egyenletbe $\lambda = 0$ -t helyettesítve, azt kapjuk, hogy a statikus stabilitásvesztés (lehetséges nyereg-csomó bifurkáció) a $k_p = -1$ és a $k_d = 0$ egyenesek mentén jöhet létre. A dinamikus stabilitási határt (lehetséges Hopf bifurkáció) $\lambda = i\omega$ behelyettesítésével határozhatjuk meg, ami egy komplex egyenlethez vezet. A valós és képzetes részeket szeparálva a kapott egyenletrendszerből kifejezhetőek a kritikus k_p és k_d erősítési tényezők az ω paraméter függvényeként.



2. ábra Stabilitási térképek különböző dimenziótlan időkések esetén, $\mu = 2$ tömegarány mellett. A stabil terület a domináns karakterisztikus gyök valós részének megfelelően van beszínezve.

Az így kapott (k_p, k_d) síkra vetített stabilitási térképet mutatja a 2. ábra különböző dimenziótlan időkések esetén, amikor a vontatott jármű tömege kétszerese a vontató jármű tömegének ($\mu = 2$). Kék szín jelöli a dinamikus, míg fekete a statikus stabilitási határgörbéket. Ha az időkések nélküli esetet vizsgáljuk, a teljes $k_p > -1$, $k_d > 0$ síknegyed stabil [5]; a dimenziótlan időkések növelve a stabil tartomány mérete csökken, majd el is tűnik $\alpha = \omega_n \tau = \pi$ értéknél. Ha tovább növeljük a dimenziótlan időkések, a stabil tartomány rögtön feltűnik, nő, majd csökken és $\alpha = \omega_n \tau = 3\pi$ értéknél ismét eltűnik. Analitikus számítással is igazolható, hogy a stabil tartomány akkor tűnik el, ha az időkések megegyezik a szabályozatlan rendszer periódus idejének ($T = 2\pi/\omega_n$) felével, vagy a fél periódusidő páratlan többszörösével. Érdekes megfigyelni, hogy kis dimenziótlan időkések esetén negatív differenciális erősítési tényezők mellett is található egy stabil tartomány, ez azonban α növelésével instabillá válik és instabil is marad.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

A cikkben az emberi reakcióidő járművontatás stabilitására kifejtett hatását vizsgáltuk. translációs szimmetriát kihasználva alkalmaztuk a Routh redukciót, amivel a fő mozgásról leválasztható a vontató jármű sebességéhez, mint ciklikus koordinátához tartozó elsőrendű differenciálegyenlet. A redukció elvégzése után meghatároztuk a statikus és dinamikus stabilitásvesztéshez tartozó határokat. A lineáris stabilitásvizsgálat azt mutatja, hogy az időkések vagy a rendszer sajátkörfrekvenciáját növelve a stabil tartomány eltűnik, majd újra és újra megjelenik. A szabályzás szinte minden paraméterkombináció mellett stabil, ha mind a vontató mind a vontatott jármű vezetője kicsi erősítési tényezőket használ, ugyanakkor ebben az esetben lassan áll be a megkívánt sebességre a rendszer. Ezért célszerű a vonórúd merevségét úgy hangolni, hogy az újra megjelenő stabil tartományba essen ($\omega_n \tau = 2\pi$), ami 1 tonnás vontató és 2 tonnás vontatott járművet feltételezve, illetve 0.6 s reakcióidővel számolva $k \sim 67$ kN/m merevséget jelent. Ugyanezekkel a paraméterekkel a kerülendő első kritikus merevség $k_{krit,1} \sim 17$ kN/m, ezen merevség esetén ugyanis nem létezik stabil tartomány.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A cikkben közölt kutatást a Magyar Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFI- K-132477) támogatta.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Hale, J.K. and Lunel, S.M.V. *Introduction to functional differential equations*, Vol. 99, Springer Science & Business Media, 2013
- [2] Routh E.J. *An elementary treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*. Macmillan, 1877
- [3] Sharp, R. Fernandez, M.A. *Car-caravan snaking: Part 2: Active caravan braking*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2002, 216(7), 723–736.
- [4] Stepan, G. (1989). *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*. Longman Scientific & Technical.

- [5] Szaksz, B., Stepan, G. *Stability charts of a delayed model of vehicle towing*. IFAC-PapersOnLine, 2021, 54(18), 64-69.