

Származtató felületek görbületváltozása lefejtőmegmunkálások során

Curvature Variation of Generating Surfaces by some Meshing Procedures

MÁTÉ Márton¹, TOLVALY-ROȘCA Ferenc¹, GYÉRESI Hunor András²,
HODGYAI Norbert,¹ EGYED-FALUVÉGI Erzsébet¹

¹) Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar, Marosvásárhely/Koronka
Segesvári út 1C, 540485 Târgu-Mureș, O.p. 9, C.p. 4, Tel: +40 265 206 210, fax: +40 265 206 211,
mmate@ms.sapientia.ro, <https://ms.sapientia.ro>

²) Brassói „Transilvania” Egyetem, Doktori Iskola, hunor.gyeresi@unitbv.ro

Abstract

As well as known, the machined tooth flank results as meshing surface of the generator surface family produced by the cutting edge in the relative motion. Classical literature of cylindrical gear machining doesn't remark any mention regarding the modification of the form of the surfaces of the meshed manifold. There exist certain cases where the effect of the feed motion must be taken into consideration. In such cases it can be proved that the elements of the manifold of the generator surfaces doesn't differ only by geometric position but also by curvature and extend. This paper deals with a special case of meshing of a cylindrical gear that is possible to be named as epicyclic gear. The principle of teething, the equations of the meshed surface manifold, the comparative geometric model of surfaces and numerical results are also presented.

Keywords: curved teeth, meshing, deformation, curvature, modell

Kivonat

A fogaskerék-lefejtés során a gyártott fogfelület a szerszám által előállított származtatófelületek burkolójaként jön létre. A hengeres fogaskerékgyártás klasszikus szakirodalmában a származtató felületek torzulása nem említett. Vannak azonban esetek, amikor a származtató felületsereget az előtolás figyelembevételével kell definiálni. Ebben az esetben kimutatható, hogy a felületsereg elemei egymástól eltérők, azaz torzulnak. Jelen dolgozatban a görbe fogú hengeres kerekek fogazásának egyik sajátos esetében, az epicikloidnak nevezhető fogazás alatt előálló származtatófelület-viszonyokat ismertetjük. A dolgozat a fogazás elvét, a felületeket összehasonlító matematikai modellt, és a számszerű torzulásokat mutatja be.

Kulcsszavak: görbe fogazat, lefejtés, torzulás, görbület, modell

1. AZ EPICIKLOIDÁLIS HENGERES KERÉK MODELLJE

1.1. Az epicikloidális kerekek lefejtésének elve

Bár a klasszikus hengeres fogaskerékgyártás az egyenes, illetve a ferde fogazatú kerekre terjed ki, mindig léteztek olyan tudományos törekvések, amelyek alternatívát próbáltak kínálni a klasszikus megoldásokra, azért, hogy teherbírásukat, élettartamukat és működési sebességüket növeljék. A legkorszerűbb kutatások és módszerek a hordképlokalizációra [7], az interferencia elkerülésére [2, 4,] illetve a leképzés modellezésére összpontosítanak [6]. Első alternatíva az evolvens hengeres fogazatokra az egyenes vagy ferde Novikov-féle fogazat, amelyet 50 év múltán a Litvin-féle parabolikus léccel lefejtett fogazat követett. Ezen „új” fogazatok teherbírása nagyobb a klasszikus evolvens hengeres kerekénél, de örök hátrányuk az utóbbiakkal szemben a kétszeres szerszámozási költség marad. A

megfelelőbb hordkép kialakításáért körív fogirányvonalú hengeres kerekeket is fejlesztettek; ezek viszont, az osztáson alapuló szakaszos lefejtési eljárás miatt, korlátozott pontosságúak, a termelékenység pedig a csigamaróval vagy metszőkerékkel fogazott klasszikus kerekek termelékenységénél jóval kisebb.

A fenti szempontokat figyelembe véve, kutatásainkat arra összpontosítottuk, hogy alternatív megoldást találjunk az evolvens hengeres fogaskerekekre, úgy hogy ezek gyártásának egyszerűségét megőrizve, olyan fogazat-geometriákat alakítsunk ki, amelyek növelt teherbírásúak. Az eddig talált megoldások, az Arkhimédész-féle spirális fogirányvonalú hengeres fogazat [1,3,5], illetve az epicikloidális fogazat.

Az epicikloidális fogaskerék lefejtése a kúpogaskerekek elméletéből jól ismert eloid-fogazat [8] lefejtési elvének sajátosításával valósul meg. A szerszám ez esetben is egy Z_s késcsoportot tartalmazó marófej. A kések a szabványos, DIN 867- ben illetve a BS ISO 53:1998-ban definiált fogasléc-profilnak felelnek meg. Profiljának szimmetriavonala a forgástengelytől R_s távolságra helyezkedik el. Ezt a távolságot a szerszám referenciasugarának nevezzük. Az r_r sugarú gördülőkör a szerszám referenciakörével koncentrikus, és egy egyenesen, csúszásmentesen gördül le. Ezáltal a gördülő síkkerék helyett [8] egy futó fogasléc valósul meg. A lécs osztása πm_n , a csúszásmentes gördülés feltételéből pedig azonnal következik, hogy $r_r = 0,5 m_n Z_s$. Amennyiben a kések a fogárok oldalainak megmunkálását felváltva végzik, a homorú és domború fogárok generáló késeit úgy kell a marófejbe rendezni, hogy a domború oldalakat megmunkáló késnek a helyzete az alaphelyzet, a homorú oldalt vágó késre pedig a kompenzációt alkalmazzuk. A megmunkált fogaskerék tengelye, jelen esetben, a lécs haladási irányára merőleges, és a lécs osztóskijától r_2 osztókör-sugárnyi távolságra van.

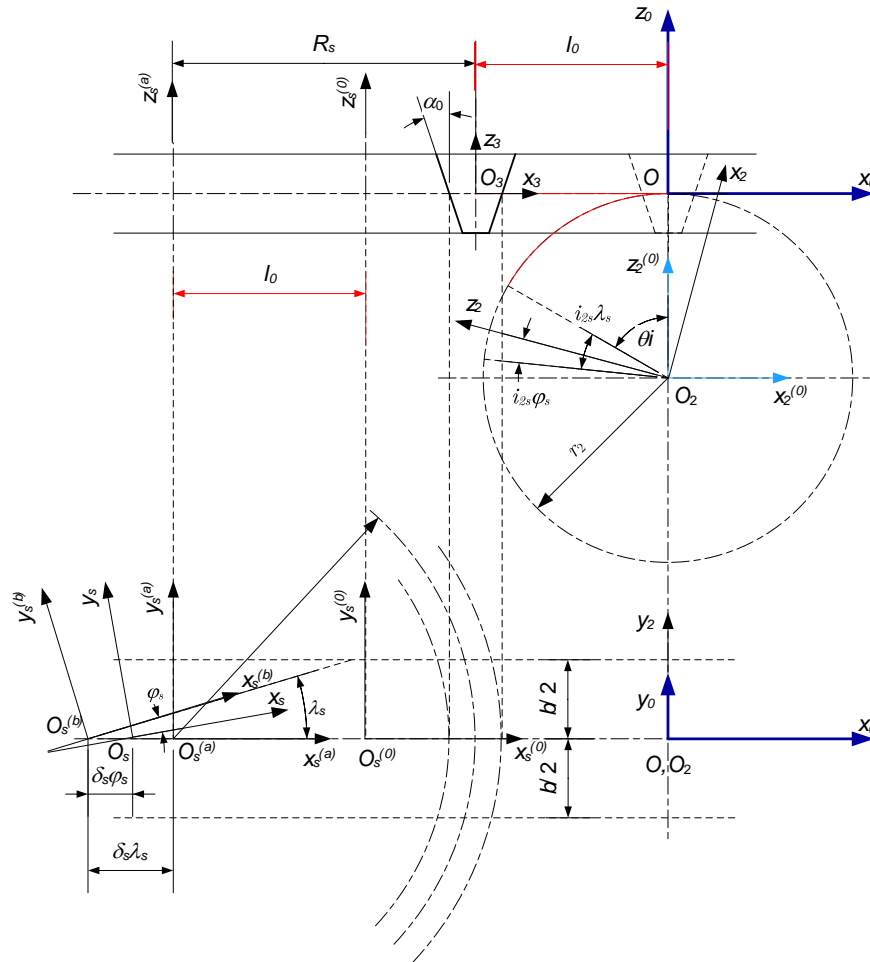
1.2. Alkalmazott koordináta-rendszerek

A marófej forgása során megvalósuló virtuális lécs haladási irányban párhuzamosan tangenciális előtolást is kap, mint a csigakerék-lefejtő csigamarók. Az alkalmazott koordináta-rendszereket és a mozgási viszonyokat az 1. ábrán szemléltettük. A mozgásokat és a geometriai viszonyokat a rögzített $O_{x_0 y_0 z_0}$ koordináta-rendszerhez viszonyítjuk. Nulla felső indexszel a koordináta-rendszerek kiinduló helyzeteit jelöljük. A megmunkált fogaskerékhez kötött $O_2 x_2 y_2 z_2$ koordináta-rendszer y_2 tengelye a rögzített rendszer $(y_0 z_0)$ síkjára illeszkedik. A marófejhez rögzített $O_s x_s y_s z_s$ koordináta-rendszer x_s tengelyére az első késcsoport külső késének profilsíkja illeszkedik. Alaphelyzetben a megmunkált fogárok z_2 referencia-tengelye (szimmetriatengely nem lehet a fogirányvonal görbülete miatt) a virtuális lécs-fogprofil- szimmetria egyenesével esik egybe. Ennek megfelelően tájoljuk a szerszámot alaphelyzetben. A lécs-kerék kapcsolódásának analógiájával élve, ez a pozíció az, amikor a főpont a fogprofil szimmetriaegyenesére illeszkedik.

A tangenciális előtolás alkalmazása megköveteli, hogy a virtuális lécs lefejtő fogai a fejhengeren kívül legyenek. Azt úgy lehet modellezni, hogy a marófej rendszerét l_0 távolsággal balra mozdítjuk el. A szerszám koordináta-rendszerét ebben a helyzetben felső b indexszel jelöljük: a balra csúsztatás következtében a fogaskerék rendszere, az osztóköri legördülés értelmében $\theta_i = l_0 / r_2$ kezdőszöggel fordul el az óramutató járásával ellentétesen.

Jelöljük δ -val a tangenciális előtolás értékét, egy radiánnyi marófej-elfordulásra, és legyen b a megmunkált fogaskerék szélessége. Az l_0 távolsággal jellemzett pozícióban a munkadarab terébe való bevágás kezdeti pillanatát a szerszám rendszerének λ_s szöggel való elfordítása jellemzi, amihez – a láthatóság kedvéért eltúlzottan ábrázolva – az $O_s^{(a)} O_s^{(b)}$ = $\delta \lambda_s$ kiegészítő szerszám elmozdítás, illetve $i_{2s} \lambda_s$ fogaskerék-elfordulás társul, ahol $i_{2s} = \omega_2 / \omega_s$ az áttétel. Ebből a helyzetből kiindulva írja le a kés éle a relatív mozgás során a származtató felületet, melynek egyik paramétere az él paramétere, a másik

pedig a φ_s szerszám elfordulás szöge. A szerszám φ_s -sel való elfordulásnak megfelelő helyzetét az $O_s x_s y_s z_s$ koordináta-rendszer mutatja meg.



1. ábra. Alkalmazott koordináta-rendszerek.

1.3. Mozgásviszonyok

A mozgásviszonyokat a fogaskerék fésűskéssel történő lefejtésekor javasolt s_i^{fk} tangenciális előtolás figyelembevételével vezetjük le. A fésűskéssel való fogazáskor minden kettőslöklet után egy s_i^{fk} mértékű asztal-előtolás és ennek megfelelő s_i^{fk} / r_2 értékű munkadarab-elfordulás következik. Jelen esetben, miután a vizsgált fogárkon áthaladt a kés, a darabnak $2\pi + s_i^{fk} / r_2$ elfordulást kell megtennie, hogy újra megmunkálási helyzetbe kerüljön, ehhez pedig a marófejnek az x irányába s_i^{fk} előtolást kell tennie. Az áttételi arányt az osztóvonal és az osztókör közötti csúszásmentes gördülés feltételéből számítjuk ki:

$$v_{léc} + v_s = v_{02} \Rightarrow \omega_s r_r + v_s = \omega_2 r_2 \tag{1}$$

2. A SZÁRMAZTATÓ FELÜLETSEREG EGYENLETEI

2.1. Az élek egyenletei

Az élek egyenleteit az 1. ábra alapján az $O_3 x_3 z_3$ koordináta-rendszer felhasználásával vezetjük le. A szerszám rendszerében ezek a következők:

$$\begin{cases} x_s(u; j) = R_s + j(a + u \operatorname{tg} \alpha_0) \\ y_s(u; j) = 0 \\ z_s(u; j) = u \end{cases}, u \in [-1, 25m_n, 1, 25m_n], j \in \{-1; 1\} \quad (2)$$

A j paraméter -1 értékére a külső, azaz a homorú fogárok felületet megmunkáló, $+1$ értékre pedig a belső, azaz a domború felületet megmunkáló él egyenleteit kapjuk.

2.2. A transzformáció mátrixa

A valóságban az előtolás mértékétől függően egyparaméteres burkolással készül a fogazat; a felületek közvetlen összehasonlítására a számlálható végtelenségnyi felületsereget egyszerű végtelenségnyi sereggé alakítjuk, úgy, hogy az l_0 pozícióparamétert a v folytonos intervallumon definiált paraméterrel helyettesítjük. A levezetés mellőzésével, a fogaskerék- szerszám koordináta rendszereit összekapcsoló transzformációs mátrix alakja a következő:

$$\mathbf{M}_{s2} = \mathbf{M}_{s0} \mathbf{M}_{02} = \begin{bmatrix} \cos E_2(\varphi_s, v) \cos(\lambda_s - \varphi_s) & \cos E_2(\varphi_s, v) \sin(\lambda_s - \varphi_s) & \sin E_2(\varphi_s, v) & a_{14}(\varphi_s, v) \\ \sin(\lambda_s - \varphi_s) & \cos(\lambda_s - \varphi_s) & 0 & 0 \\ \sin E_2(\varphi_s, v) \cos(\lambda_s - \varphi_s) & \sin E_2(\varphi_s, v) \sin(\lambda_s - \varphi_s) & \cos E_2(\varphi_s, v) & a_{34}(\varphi_s, v) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

A (3) mátrix jelöléseivel a következő kifejezések tartoznak:

$$\begin{aligned} E_2(\varphi_s, v) &= \frac{v}{r_{02}} + i_{2s}(\lambda_s, \varphi_s) \\ w(\varphi_s, v) &= l_0 + \delta(\lambda_s - \varphi_s) + R_s - v \\ a_{14}(\varphi_s, v) &= -w(\varphi_s, v) \cos E_2(\varphi_s, v) + r_2 \sin E_2(\varphi_s, v) \\ a_{34}(\varphi_s, v) &= -w(\varphi_s, v) \sin E_2(\varphi_s, v) + r_2 \cos E_2(\varphi_s, v) \end{aligned} \quad (4)$$

2.3. A származtató felületsereg egyenletei

A (2), (3), és (4) részeredmények, valamint az $\mathbf{r}_2(u, v, \varphi_s) = \mathbf{M}_{2s}(v, \varphi_s) \mathbf{r}_2(u; j)$ mátrixegyenlet alkalmazásával, a szerszám éle által leírt származtató felületek egyenletei a következők lesznek:

$$\begin{cases} x_2(u, \varphi_s, v; j) = [(R_s + j \operatorname{tg} \alpha_0) \cos(\psi_0 + \lambda_s - \varphi_s) - w(\varphi_s, v)] \cos E_2(\varphi_s, v) + (u + r_2) \sin E_2(\varphi_s, v) \\ y_2(u, \varphi_s, v; j) = (R_s + j u \operatorname{tg} \alpha_0) \sin(\psi_0 + \lambda_s - \varphi_s) \\ z_2(u, \varphi_s, v; j) = -[(R_s + j \operatorname{tg} \alpha_0) \cos(\psi_0 + \lambda_s - \varphi_s) - w(\varphi_s, v)] \sin E_2(\varphi_s, v) + (u + r_2) \cos E_2(\varphi_s, v) \end{cases}, \quad (5)$$

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2Z_s}(1 - j)$$

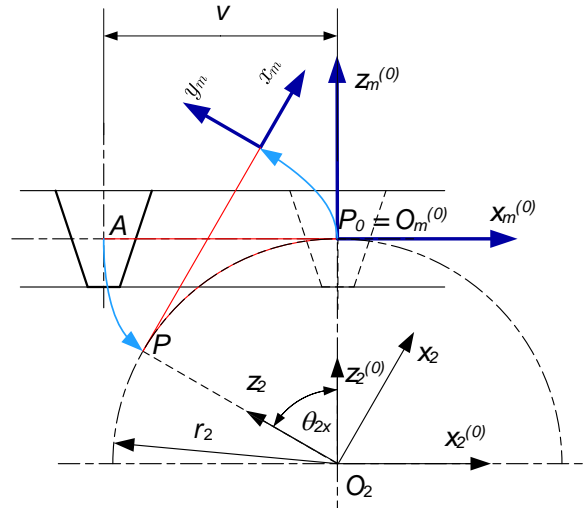
3. A FELÜLETEK ÖSSZEHASONLÍTÁSÁNAK ELVE

Az (5) egyenletek igazolják, hogy a származtató felületek alakja függ a marófej helyzetét meghatározó v paramétertől. Annak ellenére, hogy a szerszám fogaslécként viselkedik, a lécs fogainak felülete a v helyzetparaméter függvényében változik. Ennek kimutatására két különböző v paraméter-értékre felírt származtató felületet hasonlítunk össze. Az összehasonlítás elve abban áll, hogy a fogaskerékhez képest két, különböző helyzetben levő virtuális lécet, a ráforgatás elvének alkalmazásával, az alaphelyzetbeli P főponthoz igazítjuk (2.ábra).

Adott v paraméterre a generált felület helyzetét, a generáló profil A középpontjának helyzete határozza meg az $O_2x_2y_2z_2$ koordináta-rendszerben. Ez a helyzet különbözik az előbbieken említett referencia-helyzettől, amikor a generáló profil szimmetriaközpontja a P_0 pólussal egybeesik. A

tetszőleges helyzetben generált származtató felületet úgy helyezük a referencia-helyzetben levő generáló felületre, hogy az osztóvonalhoz rögzítjük, majd ez utóbbit csúszásmentesen legördítjük az osztókörről, az A és P pontok egybeeséséig. Ezt matematikailag a következőképpen valósítjuk meg:

- felvesszük a P_0 pólusban az osztóvonalhoz kapcsolt $O_m x_m y_m z_m$ mobilis az osztóvonalhoz kapcsolt koordináta-rendszert;
- az $O_2 x_2 y_2 z_2$ -ben kapott általános helyzetű generáló felületet átírjuk a mobilis koordináta-rendszerbe;
- a mobilis rendszert a megfelelő helyzetbe hozzuk az osztóvonal legördítésével az evolvensre rajzolt nyilaknak megfelelően;
- visszaírjuk a felületet $O_2 x_2 y_2 z_2$ -be.



2. ábra. A származtató felületek pólusra rendezése.

A felület egyenleteit a mobilis rendszer null helyzetében az alábbi transzformáció eredményezi:

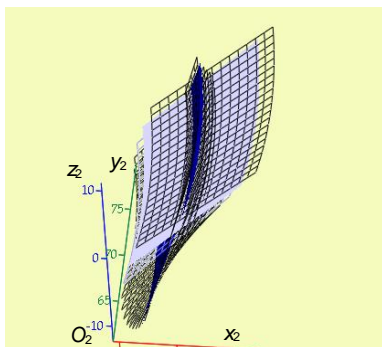
$$\underline{\mathbf{r}}_{m0} = \mathbf{M}_{m0,2} \underline{\mathbf{r}}_{m0} \quad (6)$$

A legördítéssel az egyenletek alakja nem változik, mert a felület a mobilis koordináta-rendszerhez kötött. A transzformált felület koordinátáit az $O_2 x_2 y_2 z_2$ -ben koordináta-transzformációval kapjuk:

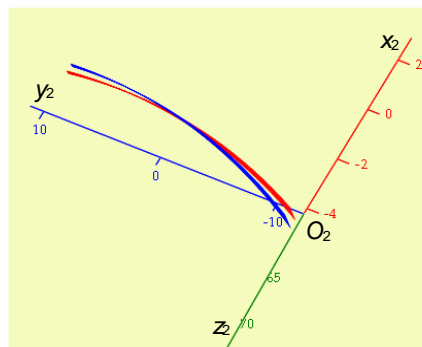
$$\underline{\mathbf{r}}_2^T = \mathbf{M}_{2m} \mathbf{M}_{m0,2} \underline{\mathbf{r}}_2 \quad (7)$$

4. NUMERIKUS KIÉRTÉKELÉS

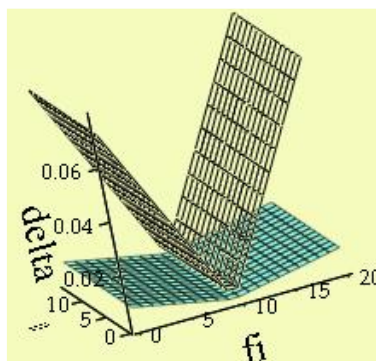
A numerikus kiértékelést egy $m_n = 5 \text{ mm}$; $z_2 = 27$ fogsámú, $b = 20 \text{ mm}$ szélességű fogaskerékre végeztük el, $Z_s = 3$ bekezdésű, $R_s = 80 \text{ mm}$ referencia-sugarú marófejjel. A tangenciális eltolás értéke $s_i^{fk} = 0,2 \text{ mm/1 ford. darab}$. A homorú fogfelületet burkoló felületsereg a 3. ábrán látható. A 4. ábra két származtató felületet hasonlít össze a lefejtés kezdetéről, illetve végéről, míg az 5. ábra a felületek közötti távolságot szemlélteti.



3. ábra. A származtató felületsereg



4. ábra. Két származtató felület összehasonlítása



5. ábra. Származtató felületek különbségének eloszlása

5. KÖVETKEZTETÉSEK

A lefejtés matematikai modelljének numerikus kiértékelése igazolja a származtató felületek alakjának és kiterjedésének függését a szerszám és a munkadarab relatív helyzetétől. Bár fogasléc-lefejtési modellt általánosítottunk, a virtuális lécnél a viselkedése lényegesen különbözik a klasszikus léctől, ugyanis a fogfelületének kiterjedése és görbülete a léccel való elmozdulásával egyidejűleg változik.

Ebben az esetben, adott felületi pont környezetében a normálvektor iránya is változhat, a relatív helyzet, azaz a kinematikai paraméterek értéke szerint. Ilyen feltételek mellett, a burkoló felület számításakor a Jacobi-féle determinánshoz képest a normálvektorral és a relatív sebességvektorral felírt kapcsolódási egyenlet semmilyen egyszerűsítést nem eredményez.

6. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Jelen kutatás a Sapientia Hungariae Alapítvány Collegium Talentum tehetséggondozó programja keretén belül nyújtott támogatással, illetve a A2-NJN-TOK-13-0009 számú Neumann János Nemzetközi Ösztöndíj keretén belül megvalósult eredmények felhasználásával készült.

7. IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Máté, M. *The Single-Parametric Model of the Meshing By Cutting Cylindrical Gears Having Archimedean Spiral Curved Tooth Line*. Acta Universitatis Sapientiae, Electrical and Mechanical Engineering, volume 5, 2013, pp.73-84. ISSN 2066-8910 (online version), ISSN 2065-5916 (printed version) EBSCO.
- [2] Balajti, Zs., Ábel, J., Dudás, I. *Examination for post-sharpening adjustment of cutting edge of a worm gear hob with circle arched profile in axial section*. Procedia Manufacturing 55(5-8), 2021: 260-265, DOI: 10.1016/j.promfg.2021.10.037
- [3] Máté M., Hollanda D. *Az Archimédészi spirál fogirányvonalú fogaskerék burkolásának a burkolt felületsereg eloszlását jellemző aspektusáról*. XV. Műszaki Tudományos Ülésszak Előadásai 2014,

- Kolozsvár. Műszaki Tudományos Közlemények - Volume 2. kötet (2015). pp. 153-160, <http://hdl.handle.net/10598/28534>, ISSN 2393- 1280. <https://doi.org/10.33895/mtk-2015.02.16>
- [4] Balajti, Zs., Dudás, I. *The Monge theorem and its application in engineering practice*. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology 91(1-4), 2017, DOI: 10.1007/s00170-016-9763-1
- [5] Máté, M. *Hengeres fogaskerekek teherbírásának növelését és hordképlokalizációját megvalósító alternatív lefejtési módszerek elemzése*. pp.33-40. Műszaki Tudományos Füzetek - FMTÜ XIX. sz. (2014). <https://doi.org/10.36243/fmtu-2014.0028>.
- [6] Balajti, Zs. *Development of the Manufacturing Geometry of Conical and Cylindrical Worms by Analysing of Their Axoids*. Manufacturing Technology 20(1), 2020. DOI: 10.21062/mft.2020.003
- [7] Balajti, Zs. *Examination and adjustment of the bearing pattern in case of helicoid drives*. Procedia CIRP 77:267-270, 2018. DOI: 10.1016/j.procir.2018.09.012.
- [8] Hollanda, D. *Aschiere si scule*. I.I.S. Târgu-Mureş, 1981.