

Helikoid hajtópárok axoidjainak vizsgálata a továbbfejlesztett konstruktív geometriai modellben

Study of axoids of helicoid drive pairs in the improved constructive geometric model

Dr. h. BALAJTI Zsuzsanna
Egyetemi docens

Miskolci Egyetem, Magyarország, H-3515 Miskolc-Egyetemváros,
Matematikai Intézet
balajtizs@uni-miskolc.hu

Abstract

This paper presents a schematic overview of the axoids study through constructive geometric determination of the instantaneous screw axes, using the constructive-geometric model improved from the Dudás-type kinematics-mathematical model created to develop the production geometry of the helicoid drive pairs. This article has pointed out, that the supplementing the Euclidean space model with the geometric elements of infinity has resulted the projective space model, which will increase the manageability of several production geometry tasks.

Keywords: Conical and cylindrical helicoid drive pairs, kinematical-mathematical model, axoid, Euclidean space model, projective space model.

Kivonat

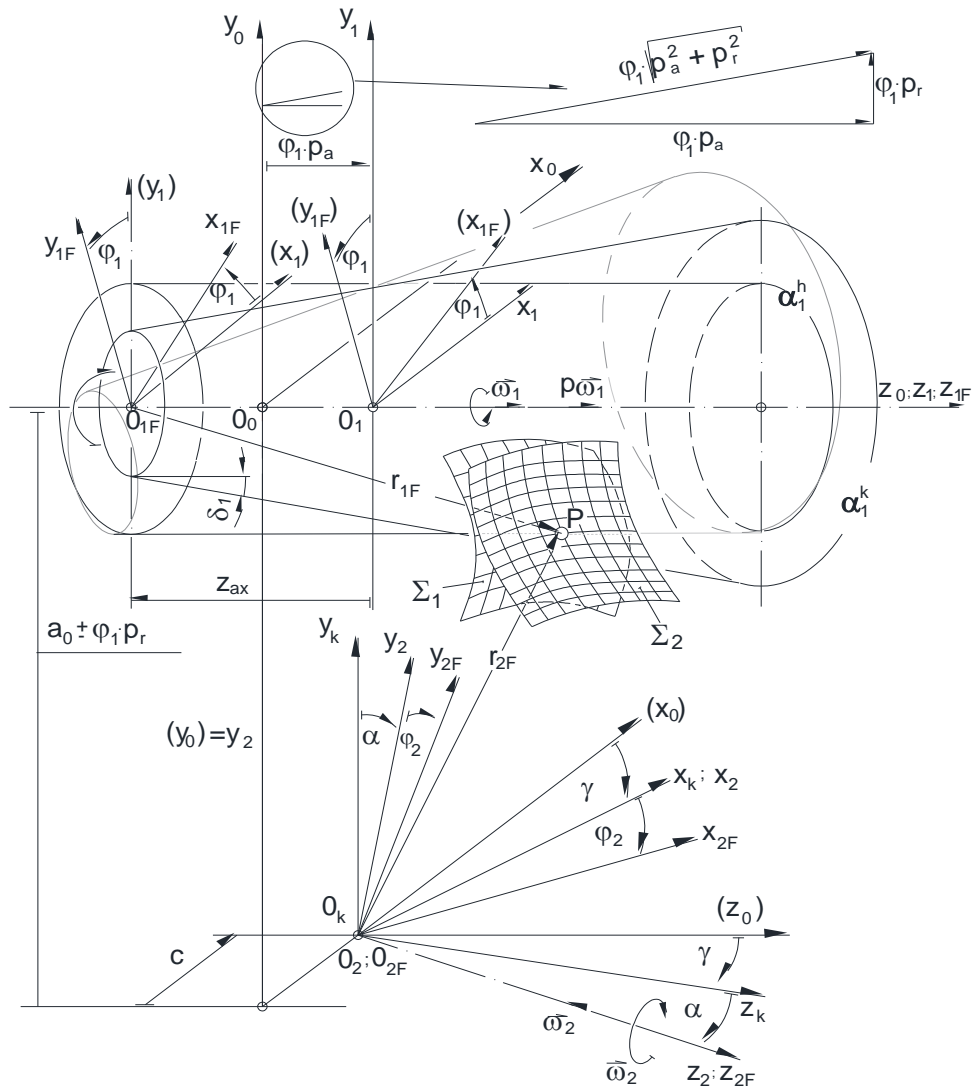
Ez a cikk egy rövid betekintést ad a pillanatnyi csavarodási tengelyek konstruktívgeometriai meghatározásán keresztül az axoidok vizsgálatába, a helikoid hajtópárok gyártásgeometriájának fejlesztésére kimunkált Dudás-féle kinematikai-matematikai modellből továbbfejlesztett konstruktív-geometriai modell felhasználásával. Jelen írás rámutat arra, hogy az euklideszi térmodell kiegészítése a végtelen távoli térelemekkel a projektív térmodell kialakulását eredményezi, melyben több gyártásgeometriai feladat kezelhetőségére nyílik lehetőség.

Kulcsszavak: Kúpos és hengeres helikoid hajtópárok, kinematikai-matematikai modell, axoid, euklideszi térmodell, projektív térmodell.

1. BEVEZETÉS

A kúpos és hengeres csiga hajtópárok modellezése [1, 2] és gyártásgeometriai fejlesztése során számos esetben célszerű kiegészíteni az euklideszi térmodellt a végtelen távoli térelemekkel [3, 4, 5, 6]. Több meghivatkozott írás született az euklideszi és projektív térmodell alkalmazhatóságának elemzéséről, a térmodellek közötti megfeleltetés sajátosságairól [1, 5, 6].

A hajtópárok elemzéséhez a kinematikai viszonyok feltárásával [7, 8, 9], a kimunkált szimulációs módszereikkel [10, 11, 12] és elismerésre méltó tanulmányok megjelentetésével többen is előmozdították a jelen írásban vázolt kutatási vizsgálataink összefoglalóját. Az elemzéseinkhez az analitikus geometria által megtámogatott, szintetikus geometria gondolkodásra ösztönző formája került alkalmazásra [13]. A kúpos és hengeres csiga hajtópárok elemeinek gyártásgeometriai fejlesztésére kimunkált, majd továbbfejlesztett konstruktív geometriai modellben a csigák elhelyezése a matematikai általánosítás céljából egy tengelyen történt az 1. ábra szerint. A hajtópárok meghatározott mozgást végző elemeit egy-egy merev térrendszerben történő vizsgálatához megalapozott a továbbiakban a gördülőfelületeiknek és azok kinematikai viszonyaiknak a vizsgálata is. [4]



1. ábra Konstruktív-geometriai modell a hengeres és kúpos helikoid hajtások gyártásméleti vizsgálatára.

Alkalmazott jelölések és koordináta-rendszerek az alábbiak szerint értelmezettek:

- $K_0(x_0, y_0, z_0)$ álló koordináta-rendszer, a megmunkáló szerszám gép koordináta-rendszere
- $K_{1F}(x_{1F}, y_{1F}, z_{1F})$ a csavarfelület koordináta-rendszere, melyben meghatározásra kerül a csavarfelület η , ϑ paraméteres egyenlete
- $K_{2F}(x_{2F}, y_{2F}, z_{2F})$ a szerszámhoz/kerékhez kötött forgó koordináta-rendszer
- $a=a_0$ az O_2 kezdőpont y irányú koordinátája a K_0 álló koordináta-rendszerben
- c a szerszám kiemelés távolsága
- z_{ax} a csiga álló koordináta-rendszere kezdőpontjának $z_{1F} \equiv z_{1F}$ tengelymenti koordinátája a csiga forgó koordinátarendszerében
- φ_1 a csavarfelület elfordulásának szöge, (szögelfordulási-, burkolási-, ill. mozgás-paraméter)
- φ_2 a szerszám/kerék elfordulásának szöge (maró v. köszörűkorong)
- i_{21} $i_{21} = \varphi_2 / \varphi_1$ áttétel
- γ a szerszám bedöntése a hengeres csavarfelület osztóhengeri menetemelkedési szögével
- α a szerszámnak a csavarfelület profiljára való döntésének a szöge, a jellegzetes metszetben (pl: evolvens csavarfelület köszörülése sík homloklfelületű köszörűkoronggal)
- p a menetemelkedés csavarparamétere
- p_a az axiális irányú csavarparaméter
- p_r radiális irányú csavarparaméter

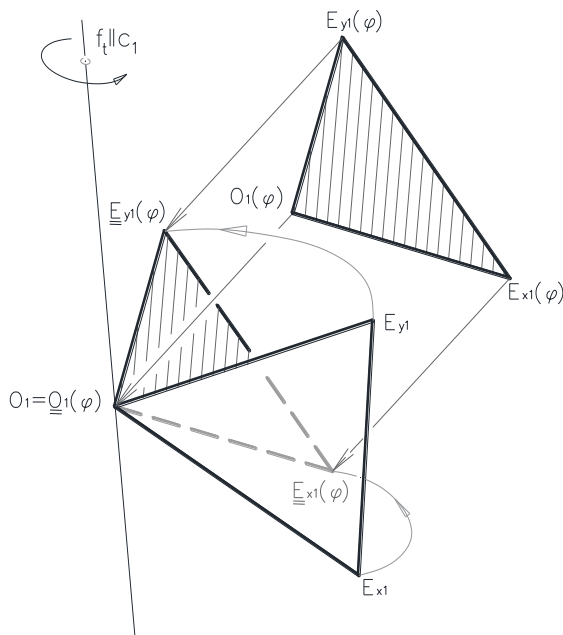
2. PILLANATNYI CSAVARODÁSI TENGELY A KONSTRUKTÍV GEOMETRIAI MODELLBEN

Egy merev térrendszert meghatározó $K(O, E_x E_y E_z)$ jobbsodrású orto-normált koordináta-rendszerben az $\overline{OE_z}$ vektor előáll az $\overline{OE_x}$ és az $\overline{OE_y}$ vektorok vektoriális szorzataként, azaz

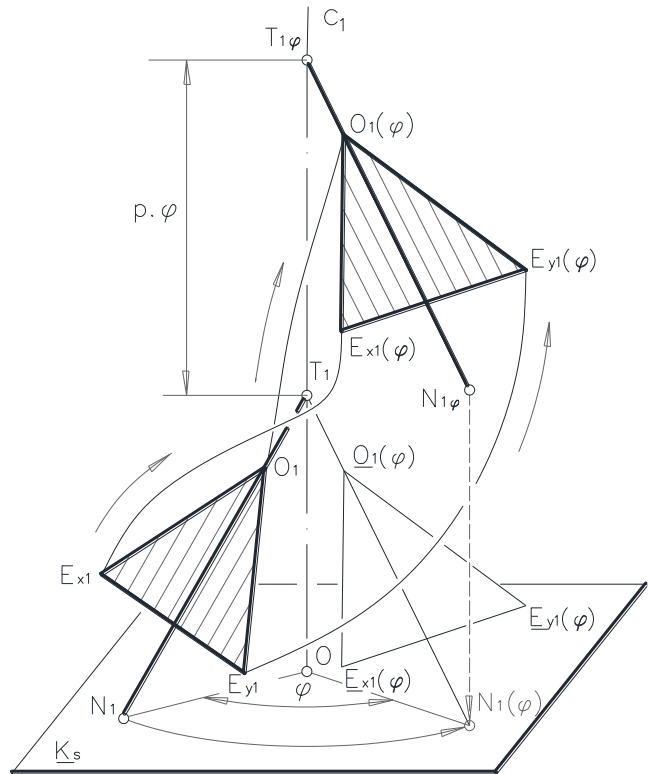
$$\overline{OE_x} \times \overline{OE_y} = \overline{OE_z} \quad (1)$$

melyből az következik, hogy a merev térrendszert az $[OE_x E_y]$ háromszöge egyértelműen meghatározza.

A merev térrendszer két különböző helyzete közötti kapcsolat helyettesíthető egy egyenes körüli csavarodással [13]. Ezen csavarodás meghatározását két lépésben hajtuk végre. A $K(OE_x E_y E_z)$ koordináta-rendszer $[OE_x E_y]$ háromszögének az $[O_1 E_{x1} E_{y1}]$ egy tetszőleges helyzete, majd a φ mozgáspáraméterrel történő elmozdulása utáni $[O_1(\varphi) E_{x1}(\varphi) E_{y1}(\varphi)]$ helyzete közötti elmozdulást helyettesítő csavarodás c_t tengelyének meghatározásához első lépésként megállapítjuk a csavarodási tengely f_t -vel jelölt irányát a 2.a. ábra alapján. Az $[O_1 E_{x1} E_{y1}]$ és a φ mozgáspáraméterrel elmozdult $[O_1(\varphi) E_{x1}(\varphi) E_{y1}(\varphi)]$ háromszöget önmagukkal párhuzamosan a tér egy tetszőleges pontjába toljuk oly módon, hogy az egymásnak megfelelő O_1 és $\underline{O}_1(\varphi)$ pontpár fedésbe kerüljön. Ekkor a két háromszög egy forgatással fedésbe hozható úgy, hogy a forgatás f_t tengelye az $|E_{x1} \underline{E}_{x1}(\varphi)|$ és az $|E_{y1} \underline{E}_{y1}(\varphi)|$ szakaszok felezőmerőleges síkjainak az $O_1 = \underline{O}_1(\varphi)$ pontra illeszkedő metszésvonala.



2.a. ábra A csavarodás tengelyének f_t irányja.



2.b. ábra A csavarodás c_t tengelye.

Az f_t forgástengellyel párhuzamos c_t csavarodási tengely pontos helyét az 1.b. ábrán bemutatott módon határoztuk meg. Az $[O_1 E_{x1} E_{y1}]$ és a φ mozgáspáraméterrel elmozdult $[O_1(\varphi) E_{x1}(\varphi) E_{y1}(\varphi)]$ háromszögeknek képezzük a merőleges vetületét az f_t -re merőleges \underline{K}_s síkra. Az $[O_1 E_{x1} E_{y1}]$ és $[O_1(\varphi) E_{x1}(\varphi) E_{y1}(\varphi)]$ háromszögek egybevágósága, valamint az f_t meghatározásának módja miatt síkjaik azonos szöveget zárnak be az f_t forgástengellyel is és a rá merőleges \underline{K}_s síkkal is. Ezért ezen $[O_1' E_{x1}' E_{y1}']$ és $[O_1(\varphi)' E_{x1}(\varphi)' E_{y1}(\varphi)']$ vetület-háromszögek a \underline{K}_s síkon szintén egybevágóak.

Az $|O_1' O_1(\varphi)'|$ és $|E_{x1}' E_{x1}(\varphi)'|$ szakaszok felezőmerőlegeseként előálló O pont körül a vetület-háromszögek φ szöggel egymásba forgathatók, ezért a csavarodás c_t tengelye az O ponton áthaladó, f_t -vel párhuzamos egyenes.

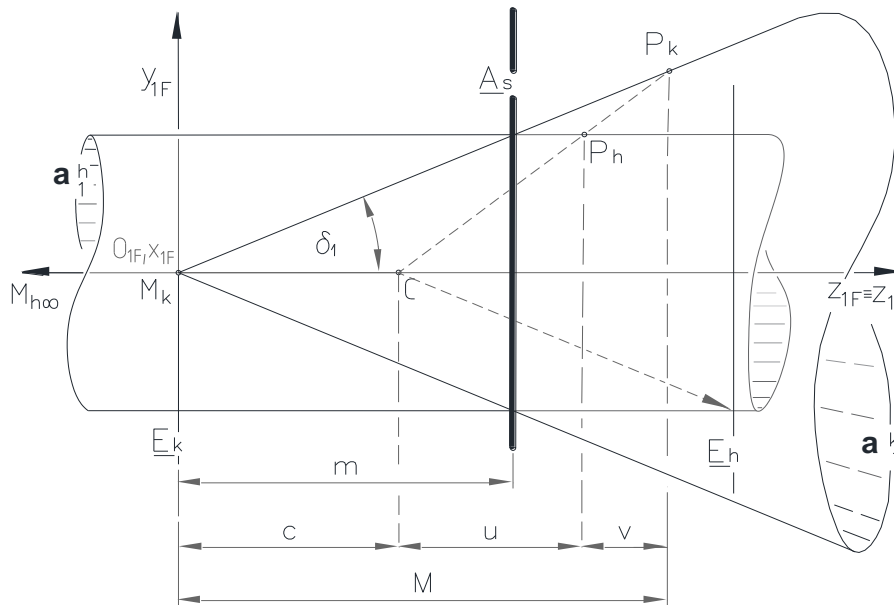
A háromszögek síkjai a c_t tengelyt a T_1 és T_2 pontokban metszik, melyek között $p \cdot (\varphi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{N}_0$ a tengelymenti eltolás mértéke. Az $[O_I(\varphi)E_{x_I}(\varphi)E_{y_I}(\varphi)]$ háromszög az eltolás mértékével elmozgatásra kerül az $[Q_I(\varphi)E_{x_I}(\varphi)E_{y_I}(\varphi)]$ közbenső helyzetbe, ami az $O_I E_{x_I} E_{y_I}$ helyzetbe a c_t körüli φ szöggel forgatható, így az eredő mozgás a c_t tengelyű, p paraméterű csavarmozgás.

3. AXOIDOK A TOVÁBBFEJLESZTETT KONSTRUKTÍV GEOMETRIAI MODELLBEN

A csiga Σ_1 merev térrendszerének a rögzített Σ_0 merev térrendszerhez viszonyított elmozdulása egy c_{10} tengelyű *momentán csavarmozgás*, melyet a térrendszerekben elfoglalt momentán helyzete, a Σ_1 -nek a Σ_0 -hoz viszonyított ω_{10} momentán szögsebessége és a $p_{10} \neq 0$ momentán csavarparamétere meghatározzák. A csiga Σ_1 és a kerék Σ_2 térrendszere relatív mozgásának momentán tengelyei a Σ_1 -ben egy α_1 , Σ_2 -ben egy α_2 vonalfelületet, úgynevezett konjugált **axoid párt** alkotnak [14]. A hengeres csiga α_1^h axoidjának felülete forgáshenger, míg a kúpos csiga α_1^k axoidjának felülete forgáskúp alakú. A kúpos és hengeres csavarfelületek gyártásméletének vizsgálatára kimunkált matematikai modell a referenciafelületeik közös alkotóra helyezésével került kimunkálásra [4]. Ugyanakkor *a modell általánosítását célul kitűzve*, a projektív térmodellben a kúp és henger felületek centrális kollineációs kapcsolatba egy közös Z_{1F} forgástengelyen kerültek elhelyezésre az 1. ábra szerint. A 3. ábrán látható referencia-kúp M_k csúcspontját és a referencia-henger végtelen távoli M_h csúcspontját egymás felettvetve a henger, a kúp és a centrális kollineációs kapcsolatának alapsíkja az \underline{A}_s , egy megfelelő pontpárja a P_h és P_k pontok. A kúp \mathbf{K} mátrixa és a henger \mathbf{H} mátrixa közti centrális kollineációs kapcsolat \mathbf{C}_{hk} mátrixa komoly matematikai háttérrel [15] számítható, teljesítve a

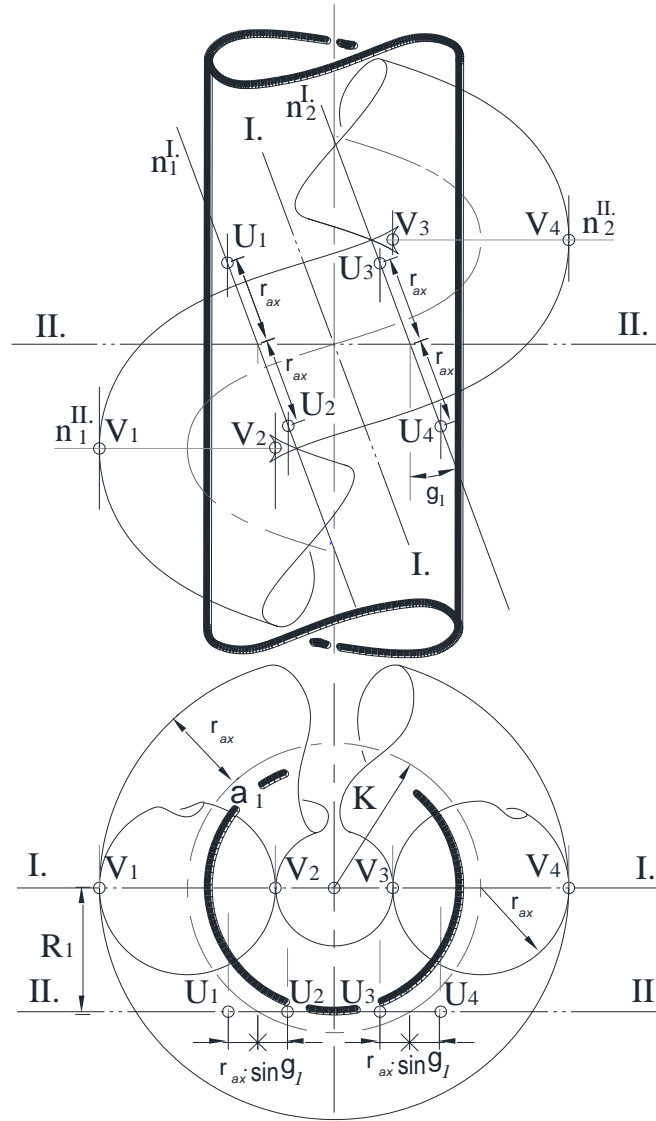
$$\mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X} = (\mathbf{X}^T \mathbf{C}_{hk}^T) \mathbf{H} (\mathbf{C}_{hk} \mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \{ \mathbf{C}_{hk}^T \mathbf{H} \mathbf{C}_{hk} \} \mathbf{X} \quad (2)$$

feltételt. [17]



3. ábra Kúpos és hengeres csigák gördülő felületei centrális kollineációs kapcsolatban.

Ezen modell felfogásban *változó tengelytáv* ($a = a_0 \pm p_r \cdot \varphi_1$) esetén a menetemelkedési fluktuáció és az abból adódó profiltorzulási hibák kiküszöbölhetők a kúpos csavarfelületeknek megmunkálása esetén.



5. ábra A kapcsolódás csomópontjai.

A [3] alapján a csiga felülete az (η, ϑ) felületparaméterekkel a K_{1F} forgó koordináta-rendszerben

$$\mathbf{r}_{1F} = x_{1F}(\eta, \vartheta)\mathbf{e}_x + y_{1F}(\eta, \vartheta)\mathbf{e}_y + z_{1F}(\eta, \vartheta)\mathbf{e}_z \quad (3)$$

alakú, melynek normálvektora

$$\mathbf{n}_{1F} = \frac{\partial \mathbf{r}_{1F}}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_{1F}}{\partial \vartheta} \quad (4)$$

A csiga és a kerék közötti relatív sebességvektor

$$\mathbf{v}_{1F}^{(12)} = \mathbf{M}_{1F,2F} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{2F,1F} \cdot \mathbf{r}_{1F} \quad (5)$$

ahol $\mathbf{M}_{1F,2F}$ és $\mathbf{M}_{2F,1F}$ a koordináta-rendszerek közötti ranszformációs mátrixok, amelyből

$$\mathbf{P}_{1a} = \mathbf{M}_{1F,2F} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{2F,1F} \quad (6)$$

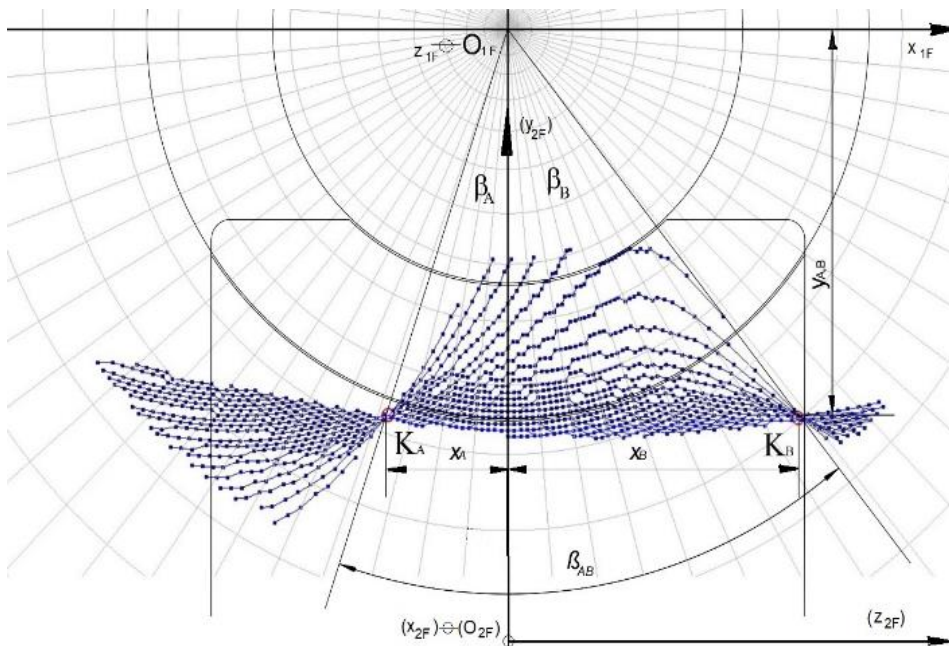
a kinematikai leképzés mátrixa.

A felület (η, ϑ) értékpárja legyen egy u paraméter függvénye. Az érintkezési vonal egyenletét a kapcsolódás I. törvénye szerint a következő függvénykapcsolat írja le

$$f(\eta(u), \vartheta(u), \varphi_1) = f(u, \varphi_1) = \mathbf{n}_{1F} \cdot \mathbf{v}_{1F} = 0 \quad (7)$$

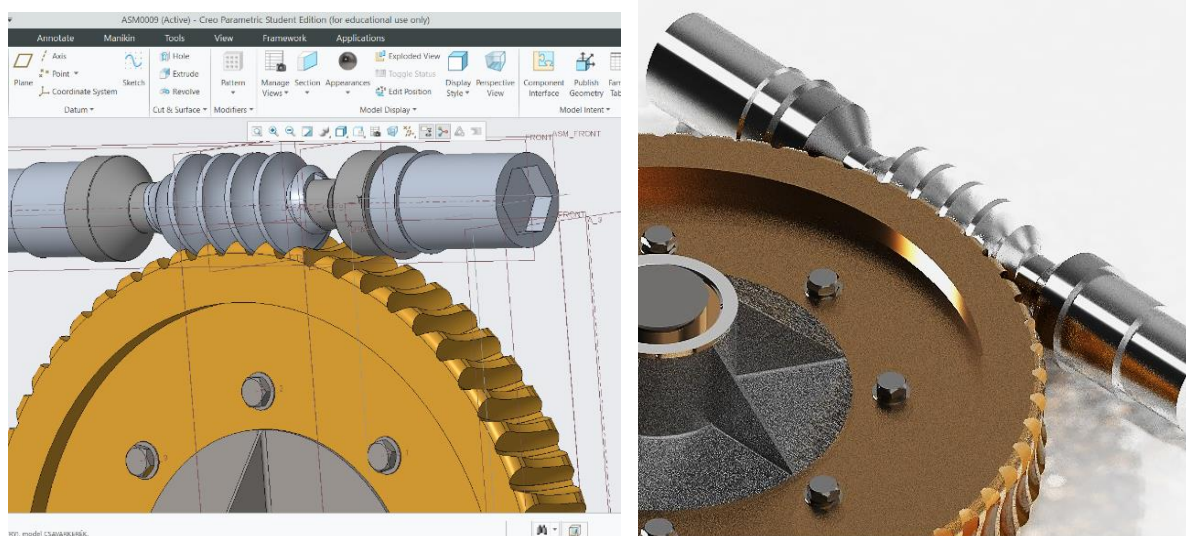
Egy-egy rögzített φ_1 mozgásparaméter érték esetén meghatározva a csiga felületén azokat az összetartozó $(\eta(u), \vartheta(u))$ paraméter értékpárokat, amelyek teljesítik a (7) összefüggést kapjuk az érintkezési görbe pontjait.

Egy konkrét, tervezett és legyártott, tengelymetszetben körívprofilú hengeres csigahajtás vizsgálatát a szokásos jelölések mellett a következő adatokkal végeztük el: $z_1=3, m=12.5, \gamma_0=21^\circ 2' 15'', \rho_{ax}=50, \bar{S}_{a1}=10, \bar{S}_{n1}=13^{+0.0}, a=280, d_{o1}=97.5, H=117.809722, \delta_{ax}=24^\circ 31' 10'', z_2=35, F_{r1}=\pm 0.017, f_{p1}=\pm 0.016, f_j=\pm 0.018, f_f=0.08$ [4]. A számított érintkezési pontok a csigakerék homlokfelületén a 6. ábrán kerültek feltüntetésre.



6. ábra A tengely-metszetben körív profilú csigahajtás hordképe a K_A és K_B csomópontokkal.

A 6. ábrán látható tengelymetszetben körív profilú csiga és a hozzá kapcsolódó kerék modellje CAD Creo Parametric modellező szoftverrel készült.



6. ábra A tengelymetszetben körív profilú hengeres csiga hajtópár modellje a hordképpel.

5. EREDMÉNYEK

A továbbfejlesztett konstruktív geometriai modellben meghatározásra került a pillanatnyi csavarodási tengely, valamint a gördülő kúp és gördülő henger közti centrális kollineációs kapcsolat, ami továbblépés az egységes analitikus kezelés felé. Összevetve az eddigi modellezési eljárással, a változó tengelytávval több gyártásgeometriai feladat megoldható, úgymint a menetemelkedési hiba kiküszöbölése. Az ívelt csigahajtás csomópontjai a korábban alkalmazott közelítő eljárások helyett pontosan meghatározhatók, mellyel már előtervezéskor lehetőség van tájékozódni a hordképről [16].

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Balajti, Zs., Ábel, J. *Applying projective geometry in design of worm manufacturing*, KEY ENGINEERING MATERIALS, 2014., 581: pp.: 77-81.
- [2] Dudás, L. *Modeelling and simulation of a new worm gear drive having point-like contact*, ENGINEERING WITH COMPUTERS 29: (3) pp. 251-272.
- [3] Litvin, F. L., Fuentes, A. *Gear Geometry and Applied Theory*, Cambridge University Press, 2004. ISBN 978 0 521 81517 8, p. 793.
- [4] Dudás, I. *The Theory & Practice of Worm Gear Drives*, Kogan Page US. Sterling, USA, 2000.
- [5] Balajti, Zs. *Kinematikai hajtópárok gyártásgeometriai fejlesztése*. PhD disszertáció, Miskolc, 126. old. 2007.
- [6] Balajti Zs. *Kapcsolódó felülepárok gyártásgeometriai fejlesztése, ábrázoló geometriai alkalmazással*, Habilitációs Tézisfüzet, Miskolc. 80. old. 2016.
- [7] Bercsey, T., Horák, P. *Modelling of the contact and tribological relations of spatial gear pairs*, International Conference on Gears, München, 2002., ISBN: 3-18-091665-6, pp.: 91-105.
- [8] Hogyai, N., Máté, M., Tolvaly-Rosca, F., Dragoi, M. V. *Peculiarities of the Grinding Process of a Gear Hob Helical Rake Face*. Acta Universitatis Sapientiae, Electrical and Mechanical Engineering, 13 (2021) 39-51. DOI: 10.2478/auseme-2021-0004.
- [9] Felhő, Cs., Szentesi, A., Tóth, G. *Geometrical Dimensioning of Worm Drives*, Proceeding of the 11th International Conference on Tools: ICT-2004. Miskolc, Hungary, University of Miskolc, pp.: 177-182.
- [10] Popkonstantinovic, B., Stojicevic, M., Jeli, Z., Obradovic, M., Popa, D. L. *Simulation and Motion Study of Mechanical Integrator 3D Model*. FME Transactions, 2019, Vol. 47, No.2. pp.: 299-303.
- [11] Dezső G., Szigeti F. *A műszaki szimulációs módszerek helye a mérnökképzésben*, Műszaki Tudományos Közlemények (HU) 6., 2017., ISSN 2393 – 1280, pp.: 63-71.
- [12] Máté, M., Hollanda, D., Tolvaly-Rosca, F., Forgó, Z., Egyed-Faluvégi, E.: *Synthesis of a Profile Errorless Involute Shaper Cutter with Cylindrical Rake Face*. 978-1-7281-5625-5/19/\$31.00 ©2019 IEEE. pp.: 000071-000076. <https://af.booksc.eu/book/83420881/040fd1>, <https://doi.org/10.33894/mtk-2021.15.06>
- [13] Petrich G.: *Ábrázoló geometria*, Budapest, Műszaki Tankönyvkiadó, 1973., 413 old.
- [14] Drahos I.: *A szerszámgeometria mozgásgeometriai alapjai*, Miskolc, 1972., p. 100
- [15] Vadász né Bognár G. *Matematika informatikusok és műszakiak részére 2.*, Miskolci Egyetemi Kiadó, Magyarország, ISBN: 9636615764, p. 347. 2003.
- [16] Lévai I., Dudás I., Balajti Zs. *Homorú ívelt profilú (axiális metszetben kör) hengeres csiga geometriai méretezése*. Gépgyártás 4(5), 30-35 old.
- [17] Balajti, Zs. *Gyártásgeometriai elemzés az euklideszi és projektív térmodellben*. 26th International Conference on Mechanical Engineering. OGÉT 2018. Marosvásárhely, Románia. 2018.04.26. - 2018.04.29. ISSN 2068-1267 2668-9685, pp.: 27-30. v