

# Frenet-formulák alkalmazása áramlási struktúrák összehasonlítására kardiovaszkuláris áramlástan szimulációkban

## Usage of Frenet-frames for flow feature comparison in cardiovascular fluid simulations

SÁNDOR Levente<sup>1</sup>, gépészmérnök  
Dr. PAÁL György<sup>2</sup>, egyetemi tanár

<sup>1,2</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar,  
Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék  
E-mail: <sup>1</sup>sandorleventegabor@gmail.com, <sup>2</sup>gypaal@hds.bme.hu.  
Web: <http://www.hds.bme.hu>

### Abstract

*Cardiovascular diseases manifesting as vessel malformations (such as aneurysms and stenosis) are on the top of the list of the leading causes of death worldwide according to the WHO. The method discussed in this paper is that flow features can be compared to the different morphological properties of given vessel sections, which can have an impact on the progression of such diseases. By creating local coordinate systems on the centrelines of the given vessel sections, the flow velocity can be decomposed into axial and secondary flow components by utilizing the Frenet-frames to allow a more efficient analysis. Furthermore, with the normal and binormal directions and the vessel centreline length, the effects of the geometrical properties of the centrelines on the flow characteristics can be investigated. To assess the limitations and advantages of the proposed method, it was tested both on artificial and patient-specific vessel geometries.*

**Keywords:** aneurysm development, secondary flows, CFD, hemodynamics, Frenet-frames

### Kivonat

*Az érelváltozással járó kardiovaszkuláris betegségek, mint az érszűkületek és értágulatok (aneurizmák) a WHO által közzétett halálozási okok listáján évtizedek óta előkelő helyen szerepelnek. A cikkben bemutatott módszerrel összehasonlíthatóvá tehetőek különböző érfal geometriákhoz tartozó áramlási struktúrák, amelyek meghatározhatják egy betegség lefolyásának egyes fázisait. A Frenet-formulák alapján az egyes érszakaszok középvonalán, lokális koordináta-rendszerek létrehozásával egyszerűbben elkülöníthetőek és tovább bonthatóak az elsődleges és másodlagos sebességkomponensek. Emellett, a normális és binormális irányok használatával, illetve az érszakasz hosszával elemezhetővé válnak a sebességviszonyok és összevethetőek az adott középvonal geometriai tulajdonságaival. Az eljárás mesterséges és valós érszakaszokon lett tesztelve, megmutatva a módszer hátrányait és alkalmazási lehetőségeit.*

**Kulcsszavak:** aneurizma kialakulás, másodlagos áramlások, numerikus szimuláció, hemodinamika, Frenet-formulák

## 1. BEVEZETÉS

Napjainkban a vezető halálokok között kiemelkedő helyen tartjuk számon a kardiovaszkuláris megbetegedéseket [1]. Ennek egyik altípusa az erek sérüléséből adódó kóros elváltozások, úgynevezett aneurizmák. Kialakulásának okait évtizedek óta kutatják, mely vizsgálatok újabb módszerekkel egészültek ki a szimulációs technikák biomechanika területén való elterjedésével. A jelenlegi álláspont szerint az aneurizmák kialakulásának helyzetei bizonyos áramlástan mennyiségek (csúsztatófeszültség, nyomás) dinamikus változásaival állnak kapcsolatban [2]. Az érszakaszok erősen térbeli tulajdonságai, illetve ezek véletlenszerű kialakulásai miatt meglehetősen nehéz összevetni különböző pácienseknél jelentkező áramlási struktúrákat. Ennek kiküszöbölésére egy, a differenciálgeometria területéről jól ismert Frenet-formulákat alkalmazó módszer került kifejlesztésre, amely segítségével érszakaszok geometriai tulajdonságaitól

függetlenül lehetőség nyílik az áramlási tér vizsgálatára. Továbbfejlesztve az eljárást a jövőben várhatóan könnyebbé tehető a betegség kialakulását eredményező áramlási jellemzőkben jelentkező minták felismerése, illetve általános leírási módszerként is alkalmazható véráramlástan problémák esetén.

## 2. LOKÁLIS KOORDINÁTA-RENDSZEREK

Érszakaszokban kialakuló áramlási tér vizsgálata alapvetően egy csőáramlási problémára vezethető vissza. A jelentős térbeli változásokat az érszakasz középvonalának segítségével lehet lekövetni, amely a geometriába írható legnagyobb gömbök középpontjainak koordinátáiból jön létre [3]. Az érfal geometriája egy CT vagy MRI képalkotásból kinyert szegmentált felületen alapszik, ami helyenként jelentős pontatlansággal bír. Az előbb említett bizonytalanságok így megjelennek a középvonal geometriájában is. Az érszakasz csőnek való megfeleltetéséhez a középvonalra merőleges metszetekkel vizsgálhatjuk az áramlási teret, amelyhez szükséges a görbe adott pontjában jellemző tangenciális vektor, mint a vágó sík normálvektora. Ennek kiszámításához a középvonalat az ívhossz szerint paraméterezve  $\mathbf{c}(s)$ , térbeli görbeként kell definiálni. A Frenet-formulák képesek a görbe első és második deriváltjai segítségével egy lokális koordináta-rendszer kifeszítésére ( $\mathbf{t}$ -tangenciális,  $\mathbf{n}$ -normális,  $\mathbf{b}$ -binormális) amely csak az ívhossz paramétertől függ:

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\mathbf{c}'(s)}{|\mathbf{c}'(s)|}, \quad \mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{c}'(s) \times \mathbf{c}''(s)}{|\mathbf{c}'(s) \times \mathbf{c}''(s)|}, \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)$$

Fontos tulajdonsága a Frenet-formulák által alkotott koordináta-rendszernek, hogy a normális irány mindig a görbületi sugár középpontja fele mutat, továbbá a binormális irány ortogonálisából adódóan merőleges mind a normális mind a tangenciális irányokra. Ha a metszetekben kapott sebességtereket a lokális koordináta-rendszerben vizsgáljuk, akkor az áramlási képek összehasonlíthatóvá válnak, mivel a koordináta-rendszer transzformáció során a sík független lesz a középvonal görbületének irányától. További geometriai tulajdonságokat mutat meg a görbület ( $\kappa$ ) és a torzió ( $\tau$ ):

$$\kappa(s) = \frac{|\mathbf{c}'(s) \times \mathbf{c}''(s)|}{|\mathbf{c}'(s)|^3}, \quad \tau(s) = \frac{(\mathbf{c}'(s) \times \mathbf{c}''(s)) \cdot \mathbf{c}'''(s)}{|\mathbf{c}'(s) \times \mathbf{c}''(s)|}$$

A görbület a görbe három pontja által kifeszített síkban, az adott pontra simuló kör rádiuszának reciprokjaként számítható. A torzió értelmezhető a görbének a síkból való kilépésének mértékeként. Ezen értékek használatával, a leforgatott lokális koordináta rendszerekben megmutathatóvá válnak a geometriai tulajdonságok skalár mennyiségként. A szegmentáláshoz és középvonal kiértékeléséhez (1.a ábra) használt Vascular Modelling ToolKit (VMTK) egy véges differencián alapuló algoritmussal [4] beépített funkcióként képes kiszámítani a görbe adott pontjaiban a Frenet-metszeteket (1.b ábra). Mivel a görbe tulajdonságainak számítása során harmadrendű deriváltak is felhasználásra kerülnek, így a diszkrét középpontokból összeálló görbe simaságára különös figyelmet kell fordítani.

## 3. MÁSODLAGOS ÁRAMLÁSOK

A felállított lokális koordináta-rendszerek segítségével kifeszíthetővé válnak a középvonalra merőleges metsző síkok. Továbbá, a sík adott pontjaiban ( $\mathbf{i}$ ) lebontható lesz a sebességvektor ( $\mathbf{v}_i$ ) axiális ( $\mathbf{v}_{ax_i}$ ) és másodlagos ( $\mathbf{v}_{sec_i}$ ) komponensekre (1.c ábra):

$$\mathbf{v}_{ax_i} = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{t}(p)) \cdot \mathbf{t}(p), \quad \mathbf{v}_{sec_i} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{ax_i}$$

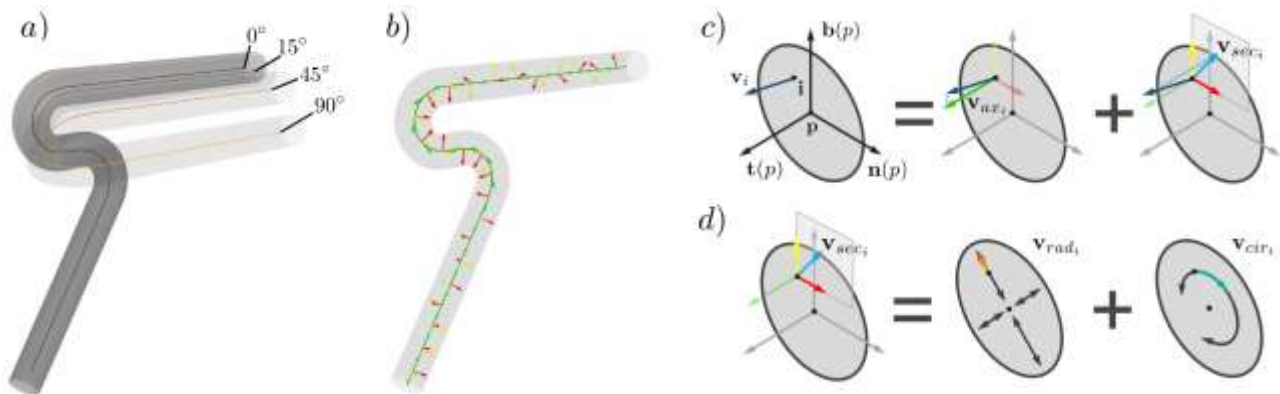
A másodlagos áramlási vektor átkonvertálható kettő, a lokális koordináta-rendszer középpontjától függő mennyiséggé. Érszakaszokban kialakuló áramlások során fiziológiailag jobban megfeleltethetőek a radiális ( $\mathbf{v}_{rad}$ ) és az ív szerint érintő ( $\mathbf{v}_{cir}$ ) irányú komponensek. Előbbiek kiszámításához szükséges a görbe középpontjából a vágósík adott pontjába mutató egységvektor ( $\mathbf{r}_{rad_i}$ ) (1.d ábra):

$$\mathbf{r}_{rad_i} = \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p|}, \quad \mathbf{v}_{rad_i} = (\mathbf{v}_{sec_i} \cdot \mathbf{r}_{rad_i}) \cdot \mathbf{r}_{rad_i}, \quad \mathbf{v}_{cir_i} = \mathbf{v}_{sec_i} - \mathbf{v}_{rad_i}$$

A radiális rész a falra merőleges irányban jelentkező igénybevételért felelős, míg az ív szerinti a falat érintő irányban terheli. További metrikaként lett alkalmazva a sebességviszony ( $v_r$ ), amely az axiális és másodlagos áramlások értékeinek hányadosával megmutatja, hogy az adott metszetben melyik jellemző a dominánsabb:

$$v_r = \frac{|v_{sec_i}|}{|v_{ax_i}|}$$

A Python programban létrehozott script Numpy, Matplotlib és ParaView vizualizációs csomagokat használ a számításokhoz. A szoftver beolvassa a VMTK csomaggal létrehozott közép vonal adatait és ennek segítségével elkészíti a vágósíkokat a koordináta-rendszerek szerint a lefuttatott áramlási szimulációból származó eredményeken. A Frenet-metszeten kiszámolja az előbb bemutatott másodlagos sebességkomponenseket, majd elmenti az eredményeket a lokális koordináta-rendszerben. Ezeket a metszeteket beolvassa megjeleníthetővé válnak a felületátlagolt másodlagos komponensek, grafikonon ábrázolva a görbe ívhossza szerint. Ebben a cikkben a módszer bemutatása az elsődleges szempont, az adatok lehetséges feldolgozási módjai jelenleg is kialakítás alatt vannak. A módszer bemutatásának céljából a metszet felbontható belső illetve külső ívre, az adott pont középpontjánál értelmezett koordináta-rendszer segítségével.



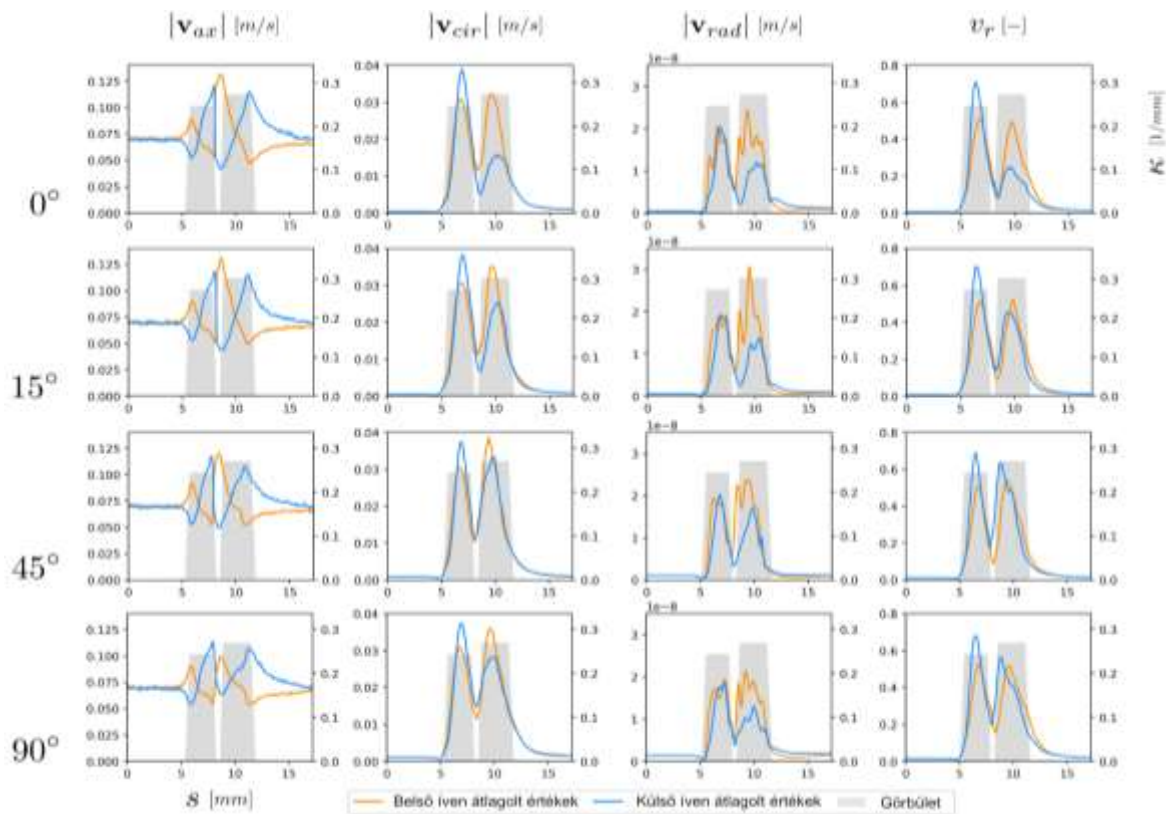
1. ábra. Érszakasz és áramlási komponensek felbontása a) mesterséges érszakasz geometriák, b) Frenet-formulák alkalmazása a közép vonalon, c) sebességvektor felbontása axiális és másodlagos komponensekre, d) másodlagos sebességvektor átalakítása radiális és ívszerinti érintő összetevőkre

## 4. EREDMÉNYEK

A módszer alkalmazásának vizsgálatához egy mesterséges geometria-sorozat került létrehozásra, amely hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint egy valós nyaki verőér szakasz, azonban mentes a szegmentálásból adódó bizonytalanságoktól és egyenlenségektől. Az alapgeometria egy síkbeli S-kanyaron alapul, amely fokozatosan forog ki az alapsíkból (0, 15, 45, 90°), ahogy az a 1. ábrán látható. Ezáltal a Frenet-formulák működése, mind síkbeli, mind torzióval rendelkező görbéken is tesztelhető.

A teszteléshez az áramlási szimulációk 2,5 millió cellából álló, határreteg felbontással rendelkező hálón lettek futtatva ANSYS CFX szoftver segítségével. A vért newtoni folyadékként (1055 kg/m<sup>3</sup>, 3,4 mPas) és az érfalat merev falként kezelve, állandósult áramkép volt számolva. Bemeneti peremfeltételnek 150-es Reynolds számhoz tartozó, időben konstans parabolikus sebességprofil volt megadva, így a folyadék viselkedése laminárisnak tekinthető.

A 2. ábrán kerülnek bemutatásra a sebességkomponensek és sebességhányadosok eredményei az abszcissa ( $s$ ) mentén. A görbület megjelenítésével látható, hogy az S-kanyar görbületének váltásakor, a külső és belső íven átlagolt értékek jól lekövetik a geometria változását. Megjelennek a kanyar utáni belső íven a leválások által indukált másodlagos áramlások, illetve azok lecsengései az egyenes kimenő szakaszon. Az egyenes bevezető és kivezető részekben ábrázolt axiális sebességértékeken látható zaj a koordináta-rendszer bizonytalan irányultságából adódik. Ez a jelenség a bemenő és kimenő peremfeltétel felületek kihúzásakor jön létre, mivel a görbe deriváltjai csupán a középpontok helyzetének numerikus bizonytalanságából számolhatóak, amely véletlenszerű helyzetben álló koordinátákat eredményez. Valós geometriáknál az előbb említett jelenség azonban nem jelent problémát, mivel az érszakaszok nem rendelkeznek tökéletesen egyenes részekkel, kellően simított görbén mindig értelmezhetőek lesznek a deriváltak.



2. ábra. Sebességkomponensek alakulása 4 különböző térgörbéjű geometria esetén.

## 5. ÖSSZEFOGLALÁS

A cikk egy alternatív felhasználását mutatta be az érszakaszok középvonalán számított Frenet-formulák által kifejlesztett koordináta-rendszernek. Az elkészített kiértékelő szoftver VMTK és ParaView csomagokon alapul, amely a szegmentált középvonal alapján kiértékeli az áramlási szimulációs eredményeket. Az irodalomban használt komponenseken kívül további másodlagos áramlási jellemző értékek kerültek alkalmazásra több mesterséges érfal geometrián. A Frenet-formulák jól kezelték a szakadással rendelkező középvonal változásait, habár ezek a problémák valós geometriákon nem, vagy minimális eséllyel fognak jelentkezni. Fontos befolyásoló tényező azonban a görbe simasága, amely a harmadrendű deriválhatóság miatt bizonytalanságot vihet a lokális koordináta-rendszer irányultságába és középpontjának helyzetébe. További kiértékelési stratégiák fejlesztés alatt vannak, jelen publikációban az érszakasz belső és külső íve szerint átlagolt értékek lettek bemutatva a középvonal hosszának és geometriai jellemzőinek függvényében.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást a Nemzeti Agykutatási Program támogatta (témaszám: 2017-1.2.1-NAP-2017-00002).

## IRODALOMJEGYZÉK

- [1] C. A. Bulant, P. J. Blanco, T. P. Lima, A. N. Assunção, G. Liberato, J. R. Parga, L. F. R. Ávila, Pereira, R. A. Feijóo, and P. A. Lemos, *A computational framework to characterize and compare the geometry of coronary networks*. Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng., 2017,
- [2] A. Lauric, J. Hippelheuser, M. G. Safain, A. M. Malek, *Curvature effect on hemodynamic conditions at the inner bend of the carotid siphon and its relation to aneurysm formation*, Journal of Biomechanics, 2014, vol. 47, no. 12, 3018-3027
- [3] L. Antiga, M. Piccinelli, L. Botti, B. Ene-Iordache, A. Remuzzi, and D.A. Steinman. *An image-based modeling framework for patients-specific computational hemodynamics*. Medical and Biological Engineering and Computing, 2008, 46:1097–1112.
- [4] M. Piccinelli, A. Veneziani, D. A. Steinman, A. Remuzzi and L. Antiga, *A Framework for Geometric Analysis of Vascular Structures: Application to Cerebral Aneurysms*, IEEE Transactions on Medical Imaging, 2009, vol. 28, no. 8, 1141-1155.