Elsőrendű nyírási deformációs elmélet alkalmazása delaminált kompozit lemezekre

Applying the first-order shear deformation theory for delaminated composite plates

HAUCK Bence, M.Sc., doktorandusz, Dr. SZEKRÉNYES András, D.Sc., egyetemi docens

BME Műszaki Mechanikai Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.,
tel.: +3614631369, fax: +3614633471,
e-mail: mechanics@mm.bme.hu, honlap: www.mm.bme.hu

Abstract

Delaminated composite plates can be modelled analytically by the equivalent single layers method. The delamination can be considered as a spatial crack, therefore, fracture mechanical analysis is also needed. In this paper the continuity conditions between undelaminated and delaminated section are investigated because there are no strict convention for moment continuity. The results are compared to former FE analysis to draw a conclusion.

Keywords: composite, plate, delamination, J-integral, fracture mechanics

Kivonat

A delaminált kompozit lemezek analitikusan modellezhetők az egyenértékű rétegek módszerével. A delamináció egy térbeli repedésnek tekinthető, emiatt törésmechanikai szempontból is vizsgálni kell. A cikkben a delaminált és nem delaminált szakaszok közötti folytonossági feltételt vizsgáljuk, ugyanis erre nincs konkrét előírás. Hogy következtetéseket vonhassunk le, ezért az eredményeket korábbi végeselemes számításokkal vetjük össze.

Kulcsszavak: kompozit, lemez, delamináció, J-integrál, törésmechanika

1. DELAMINÁLT KOMPOZIT LEMEZEK ANALITIKUS MODELLEZÉSE

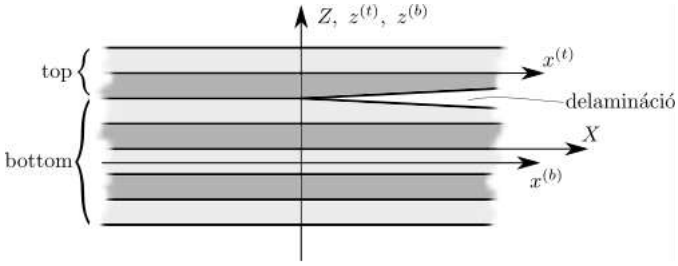
Lemezek modellezéséhez szükség van egy elméletre, amely az elmozdulásmező feltételezett alakját adja meg. A modellalkotáshoz az elsőrendű nyírási deformációs lemezelméletet alkalmazzuk, emiatt az elmozdolásmezőt az

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_0 + z \cdot \theta_x \\ v_0 + z \cdot \theta_y \\ w_0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

alakban keressük, ahol $u_{0,}$ v_0, θ_x, θ_y és w_0 az egymástól független leíró paraméterek, amelyek x és y függvényei. Ezek a membrán elmozdulásokat, a szögelfordulásokat és a keresztirányú elmozdulást írják le. Továbbá feltételezzük, hogy a kompozit rétegek anyaga lineárisan rugalmas és ortotróp, [1].

1.1. Az egyenértékű rétegek módszere

Az egyenértékű rétegek módszere röviden annyit jelent, hogy a háromdimenziós problémát síkbeli problémává redukáljuk. Ezt már az elmozdulásmező definiálásával megtettük, hiszen az ismeretlen paraméterek csak az x és y változóktól függenek. Az 1. ábrának megfelelően két darab egyenértékű réteget alkalmazunk, a delamináció síkja feletti (top) és az alatti (bottom) részre. Mindkét rétegre fel kell írni az elmozdulásmezőt az adott rétegekhez tartozó referencia koordináta-rendszerben, [2].



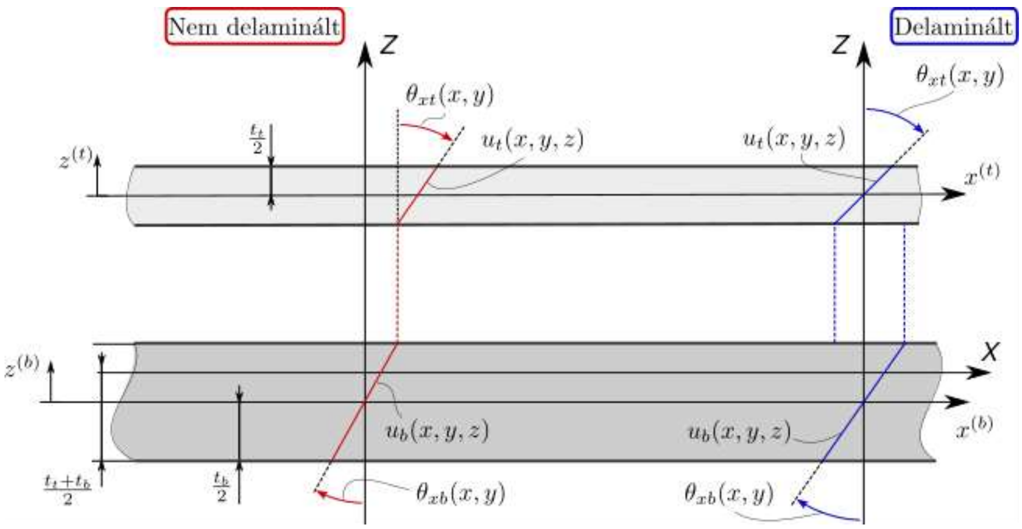
1. ábra. *Az egyenértékű rétegek értelmezése*

Fontos, hogy a delamináció mentén nem engedjük szétnyílni a lemezt, ezért az alsó és felső egyenértékű rétegben a transzverzális elmozdulás azonos, azaz $w_{0b}=w_{0t}=w_0$. A nem delaminált részen elő kell írnunk az alsó és felső réteg síkbeli elmozdulásainak folytonosságát. Ezt az ún. határfelület kényszerrel tesszük meg. Ha az alsó lemezfél vastagabb a felsőnél, akkor a következő négy egyenlet írható fel, [2].

$$u_0 = u_{0b} + \theta_{xb} \cdot \frac{t_t}{2}, \quad v_0 = v_{0b} + \theta_{yb} \cdot \frac{t_t}{2}, \tag{2}$$

$$u_{0b} + \theta_{xb} \cdot \frac{t_b}{2} = u_{0t} - \theta_{xt} \cdot \frac{t_t}{2}, \quad v_{0b} + \theta_{yb} \cdot \frac{t_b}{2} = v_{0t} - \theta_{yt} \cdot \frac{t_t}{2}, \tag{3}$$

ahol u_0 és v_0 a globális membrán elmozdulások. Ezek bevezetésével a nem delaminált részt csak 7 független változó, míg a delaminált részt 9 független változó írja le. Ezt szemlélteti a 2. ábra.



2. ábra. *A határfelület kényszer szemléltetése*

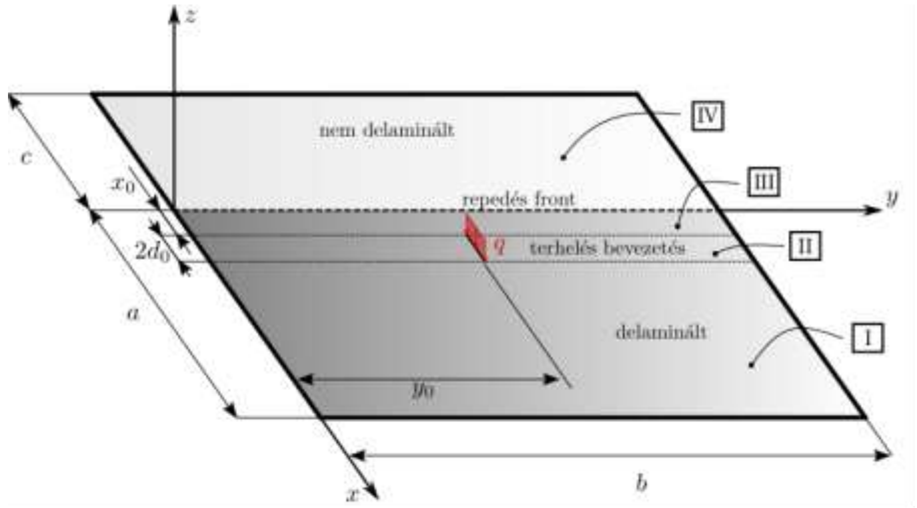
1.2. A matematikai modell megoldása, folytonossági feltételek

Matematikai szempontból a 3. ábrán látható modell a legösszetettebb, ezért ezt az esetet vizsgáljuk. A konstitutív egyenlet felhasználásával, a vastagság mentén integrálva definiálhatók az élerők és élnyomatékok, ahol a nyíró élerőket a Timoshenko-rúdelméletben is alkalmazott korrekciós konstanssal kell figyelembe venni. Ezeket felhasználva az egyensúlyi egyenletek levezethetők a virtuális munka elve alapján. A leíró egyenletek parciális differenciálegyenletek, de ezek a Lévy-féle (Fourier-soros) megoldással végtelen sok, x koordinátától függő közönséges differenciálegyenletre írhatók át, [1]. Az így kapott KDE rendszerekből véges sokat oldunk meg az állapottér modell segítségével, mellyel az általános megoldás, [4].

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Z} + \mathbf{F}, \tag{4}$$

$$\mathbf{Z}(x) = e^{\mathbf{T}x}\left(\mathbf{K} + \int_{x_0}^{x} e^{-\mathbf{T}x}\mathbf{F}\mathrm{d}x\right), \tag{5}$$

ahol **Z** a leíró paramétereket, **F** a külső terhelést tartalmazza, **T** pedig a rendszer mátrix, melyben a merevségi jellemzők szerepelnek, illetve a **K** az integrálási konstansok vektora. Belátható, hogy véges sok megoldással a Fourier-sorok konvergálnak, [1].



3. ábra. *A vizsgált lemez geometriai jellemzői*

Minden egyes megoldáshoz tartozik 68 darab ismeretlen konstans, [2]. Ezek közül a delaminált és nem delaminált rész határán a nyomatékok illesztésére nincs egyértelmű előírás, az a jó illesztés, amely jó eredményt ad. A probléma oka, hogy a nem delaminált részen megjelennek a síkbeli élerők nyomatékai is, viszont nem egyértelmű, hogy azokat az illesztésnél is figyelembe kell-e venni, [3]. Ezért három lehetséges illesztési feltétellel is megoldjuk a feladatokat:

$$\left(M_{x\delta}, M_{xy\delta}\right)\big|_{x=0+} = \left(\widehat{M}_{x\delta}, \widehat{M}_{xy\delta}\right)\big|_{x=0-}, \tag{6}$$

$$\left(\widehat{M}_{x\delta}, \widehat{M}_{xy\delta}\right)\big|_{x=0+} = \left(\widehat{M}_{x\delta}, \widehat{M}_{xy\delta}\right)\big|_{x=0-}, \tag{7}$$

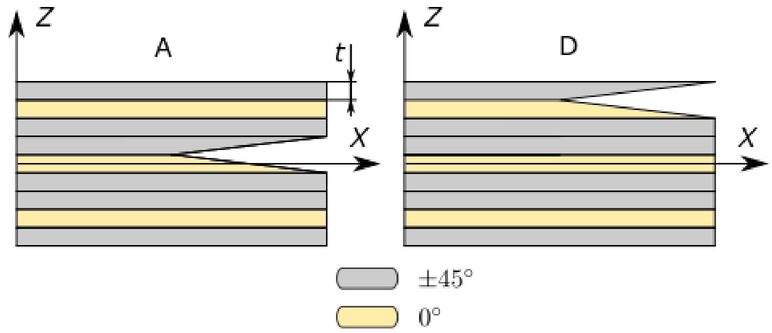
$$\left(M_{x\delta}, M_{xy\delta}\right)\big|_{x=0+} = \left(M_{x\delta}, M_{xy\delta}\right)\big|_{x=0-}, \tag{8}$$

ahol M az élnyomaték, $\widehat{M}$ az egyenértékű élnyomaték, amelyben szerepelnek a síkbeli élerők nyomatékai is és a δ index pedig azt jelöli, hogy az alsó és a felső egyenértékű rétegre is előírjuk ezeket. Továbbá levezethető a J-integrál képlete, melyben szintén megjelennek az igénybevételek, [2, 5].

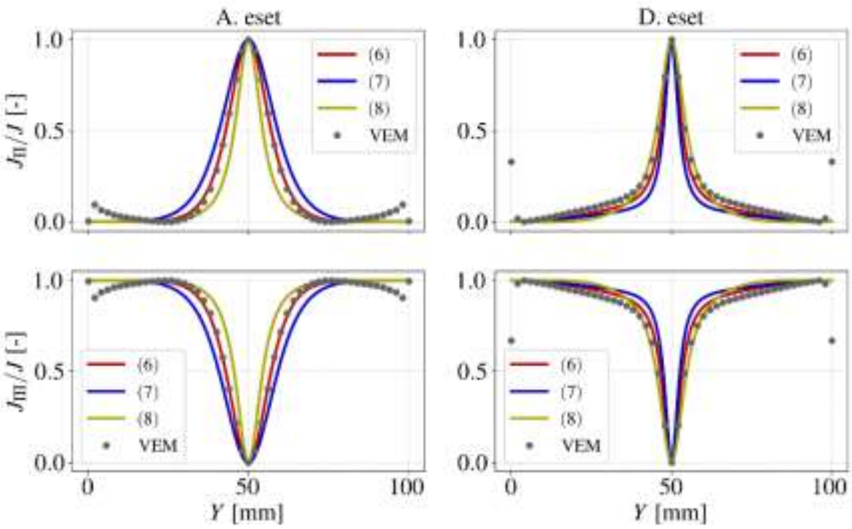
2. A MODELL ALKALMAZÁSA

A modellt két azonos rétegfelépítésű, de a delamináció rétegek közötti elhelyezkedésében különböző esetre oldjuk meg. A megoldást korábbi VE számítások eredményeivel hasonlítjuk össze és ez alapján következtetünk az illesztési típusok helyességére. A 4. ábrán látható két legszélsőségesebb esetet vizsgáljuk. Az illesztési típusok vizsgálatára a repedésfeszítő erő eloszlását hasonlítjuk össze a repedés front mentén. A vizsgált lemezek geometriai jellemzői: a=105 mm, b=100 mm, d_0=1 mm, x_0=31 mm, y_0=50 mm, c=45 mm, t=0.5 mm. A lemez keresztszövésű, illetve unidirekcionális karbon/epoxi rétegekből épül fel, [2].

A repedésfeszítő erő eloszlását a repedés frontban az 5. ábra mutatja. Itt a II. és III. törési módushoz tartozó repedésfeszítő erők aránya látható a teljes J repedésfeszítő erőhöz viszonyítva. Ez alapján azt mondhatjuk, hogy a (6) illesztéssel az analitikus és a végeselemes megoldások jól illeszkednek egymásra, ha a delamináció közel van a globális középsíkhoz. Viszont, ha a delamináció közel van a lemez felszínéhez, akkor egyik illesztéssel sem kapunk a VE eredményekre kellően jól illeszkedő megoldást. Emiatt az analitikus modellnek van egy alkalmazhatósági határa, amely a delamináció rétegek közötti helyétől függ. Ennek meghatározására további példa megoldások és VE számítások szükségesek.



4.ábra. *A vizsgált példák rétegfelépítése*



5. ábra. *A repedésfeszítő erő eloszlása a repedés front mentén a különböző illesztésekkel*

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerző részvételét a az OGÉT 2021 konferencián az emberi Erőforrás Támogatáskezelő NTP-HHTDK-20 pályázata támogatta.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

[1] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*, CRC Press, Boca Raton, London, New York, Washington D. C., 2004.
[2] Szekrényes András, *Nonsingular delamination modeling in orthotropic composite plates by semi-layerwise analysis*, MTA doktora dolgozat, Budapest, 2016.
[3] Szekrényes András, *Higher-order semi-layerwise models for doubly curved delaminated composite shells*, Archive of Applied Mechanics, 2020.
[4] Farkas Miklós, *Matematika, VIII. kötet, Differenciálegyenletek*, Budapesti Muszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar, Budapest, 1972.
[5] T. L. Anderson, *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, CRC Press, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.