Sztochasztikus kollokációs módszer és alkalmazása esztergálási feladatokra

Stochastic collocation method and its application for turning operations

FODOR Gergő[1], PhD hallgató, BACHRATHY Dániel[2], PhD, egyetemi docens

[1]Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar,

Műszaki Mechanikai Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5., Telefon: +36 1 463 1369, Fax: +36 1 463-1369, E-mail: gergo.fodor@mm.bme.hu, honlap: www.mm.bme.hu
[2]Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar,
Műszaki Mechanikai Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.,
Telefon: +36 1 463 1369, Fax: +36 1 463-1369, E-mail: bachrathy@mm.bme.hu, honlap: www.mm.bme.hu

Abstract

Delay differential equations are often used to describe mechanical systems. Usually the stochastic effects are attributed to measurement problems. However, these stochastic processes can be significant and can modify the behavior of the system. Stochastic differential equations are suitable to represent these phenomena, but the equations are mathematically very challenging. In this study a collocation based numerical approach is introduced. During the analysis the well known turning model is extended by a multiplicative noise process. The stability borders are calculated both for the deterministic and the stochastic model with different white noise intensities.

Keywords: collocation, stochastic, numerical method, turning, stability

Kivonat

Késleltetett differenciálegyenletek széles körben alkalmazhatók mechanikai rendszerek leírására. Általában a sztochasztikus hatásokat a mérési problémáknak tulajdonítják, de ezek a zajhatások jelentősek lehetnek és meghatározhatják a rendszer viselkedését. Sztochasztikus késleltetett differenciálegyenletek alkalmasak a zajos folyamatok kezelésére, azonban matematikailag nagy kihívást jelentenek. Ebben a munkában egy kollokáció alapú numerikus módszert mutatunk be. A jól ismert esztergálási modellt egészítjük ki multiplikatív jellegű zajfolyamattal. A stabilitás határait meghatározzuk determinisztikus és sztochasztikus modelleken különböző zajintenzitások figyelembe vételével.

Kulcsszavak: kollokáció, sztochasztikus, numerikus módszer, esztergálás, stabilitás

1. BEVEZETÉS

Számtalan értekezés és tanulmány készül szerszámgép rezgések témakörben az elmúlt évtizedekben. A megmunkálások stabilitását már egyszerűbb mechanikai modellekel is vizsgálhatjuk [1], azonban a jósolt és mért stabilitási határok nem feltétlenül egyeznek. Gyakran a stabilnak vélt paramétertartományokban is kilalakulnak veszélyes rezgések és ennek egy lehetséges oka, hogy nem vesszük figyelembe a forgácsolóerő sztochasztikus jellegét [2].

Általában az egyenletekben alkalmazott erőmodellek determinisztikusak, mert a erőmérések során tapasztalható fluktuációkat mérési bizonytalanságnak tulajdonítják, azonban ezek a zajhatások módosíthatják a forgácsolás karakterisztikáját és a mechanikai rendszer stabilitását is befolyásolhatják. Annak érdekében, hogy pontosabb képet kapjunk a szerszámgépekkel kapcsolatos rezonancia jelenségekről egy stochasztikus erőmodellt használunk a jól ismert eszetergálási modell kiegészítésére [3]. Hasonló számításokat végeztünk korábban sztochasztikus szemidiszkretizáció segítségével és bemutattuk a zajos erő modell relevanciáját a sztochasztikus rezonancia jelenségén keresztül [2]. Ezeket a számításokat szeretnénk validálni és gyorsabbá tenni egy kollokáció alapú sztochasztikus késleltetett differenciálegyenlet megoldó algoritmus segítségével is.

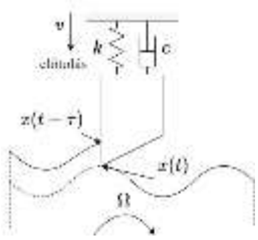
2. ALKALMAZOTT MÓDSZEREK

2.1. Mechanikai modell

Az esztergálási feladat modellezéséhez a gyakran használt tömeg-rugó-csillapítás rendszert választottuk, ahol a regeneratív hatást egy késleltetett tagon keresztül vesszük figyelembe [3]. Az (1) linearizált egyenlet írja le a szerszám mozgását az egyensúlyi helyzet körül. A dimenziótlan mozgásegyenletben dimenziótlan időkésést $\hat{\tau}$, a dimenziótlan forgácsoló erő együtthatót $\hat{H}$ jelöli.

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\dot{x}(t) + x(t) = \hat{H}\big(x(t-\hat{\tau}) - x(t)\big)\,. \tag{1}$$

A determinisztikus stabilitási határok analitikusan is meghatározhatók D-szeparáció segítségével. Ha figyelembe szeretnénk venni sztochasztikus hatásokat, akkor az erőmodellt reprezentáló $\hat{H}$ paraméterrel arányos multiplikatív zajt adunk a rendszerhez. A zajt a Wiener folyamattal modellezzük [4], melynek főbb tulajdonságai, hogy a zajhatások várható értéke nulla, a szórásuk pedig a folyamat során eltelt idő gyöke. Ezeket a jellemzőket használjuk fel amikor a sztochasztikus késleltetett differenciálegyenlet kollokációs megoldását vezetjük le.



1. ábra: Az esztergálás mechanika modellje.

2.2. Kollokáció

A kollokáció egy széles körben alkalmazott numerikus módszer differenciálegyenletek kezelésére. Az alapgondolata az, hogy a megoldást közelítjük bázisfüggvényekkel (4) és a differenciálegyenletet előre definiált kollokációs poontokban értékeljük ki. Ezekben a kollokációs pontokban a közelítés kielégíti az eredeti egyenletet. Ebben a munkában bázisfüggvényként a Chebyshev függvényeket használjuk Chebyshev kollokációs pontokkal [5]. Az n-edik bázisfüggvényt a $\varphi_n(\eta) = cos(n\, arccos(\eta))$ összefüggéssel határozhatjuk meg.

A megoldandó differenciálegyenletet (2) szerint írjuk fel. Az egyenletben szereplő együtthatók mátrixok is lehetnek. Erre az általános formára dolgozzuk ki a kollokációs egyenleteket.

$$dx(t) = (Ax(t) + Bx(t-\tau) + c)dt\,, \tag{2}$$

ahol az együttható mátrixok a forgácsolási modell esetén:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\hat{H}) & -2\zeta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \hat{H} & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Tegyük fel, hogy egyetlen τ késés van a rendszerben, ahogy az tipikus az esztergálási modellekben. Ebben az esetben fel tudunk írni egy leképezést a $[-\tau, 0]$ és $[0, \tau]$ intervallum között. A differenciálegyenlet inkrementális alakját felhasználva úgy jutunk el a $t = \tau$ időpillanatig, hogy integráljuk az inkrementumot az adott intervallumon.

$$x\big(t(\eta)\big) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \varphi_i(\eta)\,, \tag{4}$$

$$x(\tau) = \int_0^\tau dx_t = \int_0^\tau Ax_t + Bx_{t-\tau} + c\; dt\,. \tag{5}$$

Behelyettesítjük az (4) egyenletben szereplő kollokációs közelítést a (5) egyenletbe és felbontjuk az integrálást több lépésre. Erre azért van szükség, mert azt feltételezzük, hogy a közelítés a kollokációs pontokban kielégíti az egyenletet (az intervallum tetszőleges pontján csak közelíti). Használjunk $n+1$ kollokációs pontot és bázisfüggvényt. Az integrálást kollokációs ponttól kollokációs pontig írjuk fel, ezzel n darab egyenletünk lesz a (6) egyenlet szerint, ahol $x_1(t)$ a megoldás $t \in [0, \hat{\tau}]$ darabját és $x_0(t)$ a $t \in [-\hat{\tau}, 0]$ darabját jelöli, valamint. A megoldás a bázisfüggvények lineáris kombinációjával áll elő, ami $n+1$ ismeretlen a_i együtthatót tartalmaz, így még egy egyenletre szükségünk van. Az utolsó egyenlet a leképezés felírásához a késés és a jelen közötti kapcsolatot leíró összefüggés az (7) egyenlet szerint.

$$x_1(\eta_I) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(\eta_{I-1}) a_{1,i} + \int_{\eta_{I-1}}^{\eta_I} \left[A \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(\eta) a_{1,i} + B \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(\eta) a_{0,i} + c \right] \delta dt \,, I = 1, 2, \dots, n \,. \tag{6}$$

$$x_0(\tau) = x_1(\tau) \;\Rightarrow \sum_{0}^{n} a_{0,i}\, \varphi_i(\eta_n) = \sum_{0}^{n} a_{1,i}\, \varphi_i(\eta_0) \,. \tag{7}$$

A leképezést mátrix egyenletbe tudjuk rendezni:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{E} a_1 = \left(\boldsymbol{S} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\varphi}}\right) a_1 + \left(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\varphi}}\right) a_0 + \boldsymbol{f}, \\ \boldsymbol{F}_1 a_1 = \boldsymbol{F}_0 a_0 + \boldsymbol{f} \,, \end{gathered} \tag{8}$$

ahol az egyes mátrixok jelentése egyértelműen meghatározható. $\boldsymbol{E}$ mátrix jelöli az integrálások végpontjait, $\boldsymbol{S}$ a kezdőpontokat, $\boldsymbol{C}$ írja le a kapcsolódást a késés és a jelen között és $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\varphi}}, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\varphi}}$ tartalmazza a bázisfüggvények intergáljait. A bázisfüggvények ismeretlen együtthatóit az a_1, a_0 vektorok tartalmazzák.

A leképezés stabilitását meghatározhatjuk a $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F}_1^{-1} \boldsymbol{F}_0$ leképezési mátrix sajátértékeinek vizsgálatával. Ha a legnagyobb sajátérték is kisebb mint 1, akkor a rendszer stabil. Ezt a tulajdonságot használjuk ki amikor a stabilitási térképet elkészítjük a forgácsolás modelljére.

2.3. Kiterjesztés sztochasztikus rendszerekre

A kollokációs módszer kiterjeszthető sztochasztikus rendszerekre néhány megfontolással. Az egyenletek felépítése nagyon hasonlóan történik mint determinisztikus esetben, azonban megjelennek sztochasztikus integrálok, melyek matematikai kezelése nehéz. Sztochasztikus integrálok esetén nem idő az inkrementum, hanem egy zajfolyamat, esetünkben a Wiener folyamat. A determinisztikus rendszert leíró mátrix egyenlet (8) kibővül sztochasztikus mátrixokkal, amelyek sztochasztikus integrálokat tartalmaznak.

$$(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{G}_1) a_1 = (\boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{G}_0) a_0 + \boldsymbol{f} + \boldsymbol{w}, \tag{9}$$

ahol $\boldsymbol{G}_1$ és $\boldsymbol{G}_0$ tartalmazzák a multiplikatív jellegű zajokat, míg $\boldsymbol{w}$ a rendszert leíró egyenletben megjelenő additív zajt. A Wiener folyamat tulajdonságaiból adódóan ezeknek a mátrixoknak a várható értéke nulla, mivel a bennük szereplő sztochasztikus integrálok várható értéke nulla. Ezzel a megfontolással az elsőrendű dimanika, ami az átlagos viselkedést írja le, megegyezik a determinisztikus rendszerével. Sztochasztikus rendszereknél érdemes vizsgálni a másodrendű dinamikát is, ami a szórás átlagos viselkedésére vonatkozik. A második momentum stabilitása megadja, hogy az átlag körüli szórás korlátok között marad, vagy folyamatosan növekszik és a sztochasztikus rezonancia jelenségéhez vezet.

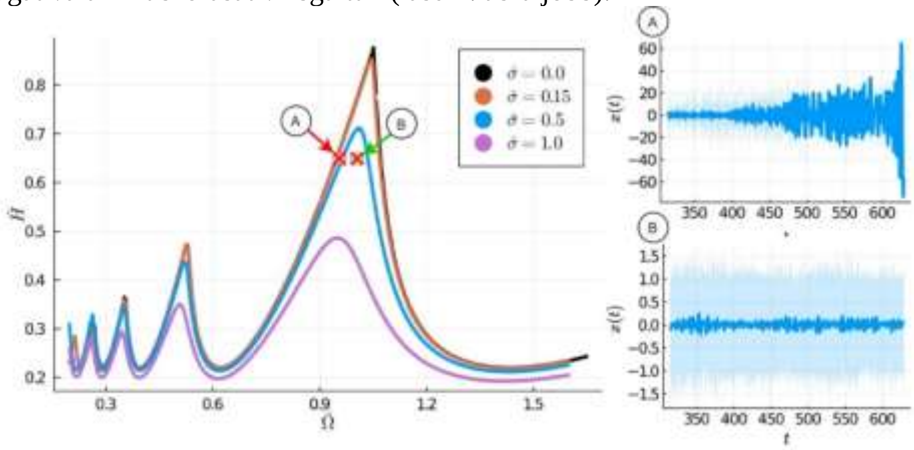
3. EREDMÉNYEK

Egy korábbi munkában széleskörű méréssorozattal vizsgáltuk a forgácsolóerő sztochasztikus jellegét és a jellemző zaj intenzitását az átlagos forgácsolóerőhöz viszonyítva [2]. Ezekből a mérésekből megállapítható, hogy a zaj Gauss eloszlást követ az erőjelek jelentős hányadánál, így a Wiener folyamat megfelel a sztochasztikus hatások modellezésére. A zajfolyamattal kiegészített mozgásegyenlet alakja a következő:

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\dot{x}(t) + x(t) = \hat{H}\big(x(t-\hat{\tau}) - x(t)\big) + \hat{\sigma}\hat{H}\big(1 + x(t-\hat{\tau}) - x(t)\big)\Gamma(t)\,. \qquad (10)$$

Ha a mérések során tapasztalt zajintenzitással építjük fel az esztergálást leíró differenciálegyenletet (10), akkor a stabilitási térképen azt láthatjuk, hogy a stabil tartomány gyakorlatilag megegyezik a determinisztikus rendszer stabil tartományával. Amikor a $\hat{\sigma}$-val jelölt zaj intenzitást növeljük, akkor azonban csökken a stabil rész. A (10) egyenletben szereplő $\Gamma(t)$ reprezentálja a Gauss eloszlású fehér zajt.

Ahol a determinisztikus modell stabil működést jósol, ott a sztochasztikus modell szerint instabil üzemállapot is előfordulhat. Ez különösen érdekes bistabil zónák esetén, ahol egy erősebb lökés hatására a rendszer átléphet egy nagyobb amplitúdójú periódikus pályára. Ilyen lökések akár a zajfolyamatok hatása miatt is bekövetkezhetnek. A 2. ábrán látható a forgácsolási modell stabilitás térképe különböző intenzitású zajok mellett. Az elvárásoknak megfelelően a rendszerben megjelenő zaj a stabil tartomány csökkenéséhez vezet. A bázisfüggvények számának növelése jelentős mértékben növeli a számítási igényt, így 24 függvényt alkalmaztunk a térkép meghatározásához. Az „A” és „B”-vel jelölt pontokhoz tartozó paraméterértékek mellett futtatott szimulációk is megerősítik, hogy a határok eltolódása miatt a determinisztikus modell által jósolt stabil tartomány instabillá válhat. Ezekben a pontokban 100 trajektóriát szimuláltunk megfelelően hosszú ideig és az eredmények átlagát valamint szórását vizsgáltuk (lásd 2. ábra jobb).



2. ábra: bal: Forgácsolás stabilitási térképe. A feketével jelölt vonal a determinisztikus modell stabilitási határát jelöli. Jobb: Szimulációs eredmények egy instabil „A” és egy stabil „B” pontban $\hat{\sigma} = 0.5$ zajintenzitás mellett. Az alkalmazott bázisfüggvények száma $n + 1 = 24$.

4. ÖSSZEFOGLALÁS

A kollokációs módszerrel hatékony numerikus megoldást kaphatunk sztochasztikus rendszerek stabilitási tulajdonságaira. A determinisztikus modellel meghatározott stabilitási határok eltolódnak a rendszerhez adott zaj intenzitásától függően, amely jelenséget szimulációkkal is igazolhatjuk.

Kollokációs módszerrel ugyanazokat a stabilitási határokat kapjuk az esztergálás determinisztikus modelljére, mint szemidiszkretizációval, vagy D-szeparációval. A sztochasztikus modell is jó egyezést mutat a referencia számításokkal. A módszer jelenleg is fejlesztés alatt áll, de az eddig tesztelt mechanikai rendszerekre jól alkalmazható és megbízható eredményt ad.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

[1] Tobias S (1965) Machine-tool vibration. Blackie, Glasgow

[2] Fodor, G., Sykora, H.T., Bachrathy, D. Stochastic modeling of the cutting force in turning processes. Int J Adv Manuf Technol 111, 213–226, 2020.

[3] Insperger, T., Schmitz, T. L., Burns, T. J., & Stépán, G. (2003). Comparison of Analytical and Numerical Simulations for Variable Spindle Speed Turning. Manufacturing. doi:10.1115/imece2003-41809

[4] Durrett, Rick (2019). "Brownian Motion". Probability: Theory and Examples (5th ed.). ISBN 9781108591034.

[5] Mason, J. C.; Handscomb, D.C. (2002). Chebyshev Polynomials. Taylor & Francis.