

Koszinusz profilú fogaskerék és csiga kapcsolódásának szimulációja

Simulation of Reciprocate Meshing of a Cosine Gear and a Worm

GÁL Károly Istvánt¹, dr. HORVÁTH Richárd², dr. MÁTÉ Márton³, dr. TOLVALY-ROȘCA Ferenc⁴,

¹Óbudai Egyetem, Sapientia EMTE, gal.karoly@phd.uni-obuda.hu, gal.karoly@ms.sapientia.ro,

²Óbudai Egyetem, horvath.richard@bgk.uni-obuda.hu,

³Sapientia EMTE, mmate@ms.sapientia.ro,

⁴Sapientia EMTE, tferi@ms.sapientia.ro

Abstract

Gear-hobs stays as most popular and widespread gear cutting tool not only for cylindrical, but also for paloid bevel and spiroid worm drives. Cosine gears represent a relative new version of cylindrical gears, which manufacturing technology faces an accelerate development. In this context, our interest focuses on the study of the reciprocate meshing of a cosine gear and a corresponding worm. This paper deals with the mathematical modeling of the possible meshing, using a method of point clouds that differs from the classical Litvinian approach.

Keywords: cosine gear, cosine worm, meshing, point cloud,

Kivonat

A csigamaró nem csak az evolvens hengeres külső hajtópár leggyakrabban alkalmazott lefejtő szerszáma, hanem a paloid kúpkerék és a spiroid csigahajtások megmunkáló szerszáma is. Nagy termelékenységének és kiforrott gyártástechnológiájának köszönheti népszerűségét. Ennélfogva a viszonylag új hajtópár-megoldás, a koszinusz fogaskerékpár gyártástechnológiájának leginkább kézenfekvő megoldása lehet. A koszinusz-fogaskereket lefejtő csigamaró származtatását egy, a fogaskerékkel kapcsoló csigából indítjuk. Ebben az összefüggésben érdeklődésünk egy koszinusz fogaskerék és egy csiga kapcsolódására irányul. Jelen közlemény a koszinusz fogaskerék és a csiga kapcsolódásának vizsgálatát mutatja be. A Litvin-féle módszertől eltérően, pontfelhő-generálással szemléltetjük a lehetséges kapcsolódást.

Kulcsszavak: koszinusz-fogaskerék, koszinusz-csiga, burkolás, pontfelhő.

1. BEVEZETŐ

Ahogy ezt a világ fogaskerékgyártását és piacát elemző gazdasági tanulmány is kimutatta [1] a 2025-re a 39.4 milliárd USD-t is valószínűleg elérő iparágban a legnagyobb népszerűségnek a csigamaró örvend [2].

A csigamaró fejlesztése, a szerszám a múlt század első évtizedétől kezdődően, három fő irányban történik [3]: kölcsönös felületburkolás-optimalizálás, forgácsképződési feltételek optimalizálása, illetve a felépítés gazdaságosabbá tétele. A csigamaró általánosan elfogadott származtatási hipotézise az alapcsiga, amelynek egy fogasléc belső felületét érinti, és ebben elcsúszik. E modell alapján gyártott csigamaró elméleti profilhibával terhelt [4]. Számos tanulmány született a profilhiba és a helytelen, azaz a geometriai hibákkal terhelt élezés következményeiről, a gyártott kerék fogprofilját illetően [5], [6], [7].

A szakirodalomban megtalált, fentebb említett vonatkozású állításokat kutatásaink során ellenőriztük. Kimutattuk, hogy egyenesfogú lécc hibamentes kapcsolása evolvens csigával lehetséges, utóbbinak származtató egyenesei mentén [8]. Ebből viszont nem lehet arra következtetni, hogy az evolvens fogaskereket is hibamentesen fejt le az evolvens csigamaró – ezt Litvin igazolta [4].

Az evolvens fogaskerekek lefejtésének tanulmányozása során gyűjtött tapasztalatokat próbáljuk a koszinusz profilú fogaskerekek gyártására alkalmas csigamaró fejlesztésében felhasználni. A koszinusz profilú fogaskerék javaslata egy CAD-szimulációt tartalmazó publikációban jelent meg [9], amelyben bizonyítást nyert, hogy az $m \cdot \pi$ periódusú koszinoid függvény abszcisszáját két, $m \cdot \frac{z_i}{2}$, $i \in \overline{1,2}$ sugarú körökre

rácsavarjuk, akkor kapcsoló fogaskerékajtást nyerünk. Ez a felismerés kikényszeríti a gyárthatóság kérdését. A gyártási feladat megoldása lécc, kerék vagy csiga alakú gyártószerszám szintézisével válaszolható meg, akár a hengeres evolvens hajtópár esetében.

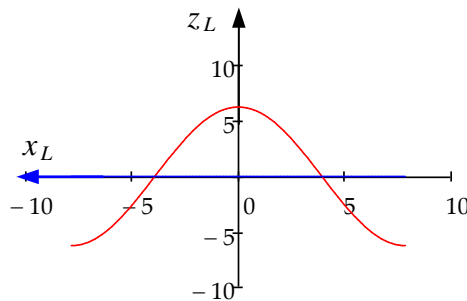
Csigamarós lefejtés esetében a szerszám származtató csigájának a definiálása az előrendű feladat. Jelen közlemény nem evolvens csiga kialakításának egy lehetséges módját tárgyalja. Speciális csigák esetében a hajtás minőségét erősen befolyásolja a csiga osztóhenger-átmérője és a csiga profilja közötti kapcsolat [10]. A legyártott csiga méretellenőrzésére is változatos módszereket dolgoztak ki [11], [12].

A kölcsönösen burkoló felületek sajátosságait figyelembe véve, jelen közleményben a csigát a gyártandó koszinusz fogaskerék fogfelületeiből, a relatív mozgás során előálló felületsereg fogja lehatárolni.

2. A KOSZINUSZ FOGASKERÉK PROFILJÁNAK ELŐÁLLÍTÁSA

2.1. A koszinusz fogasléc

A koszinusz fogasléc profilja egy koszinoid függvény, melynek paramétereit a szabványosított fogmagasság és foghézag, illetve az osztás határozza meg [13]. Figyelembe véve, hogy a lécc gyértléc, a fogfej- és a foglábmagasság egyenlő, azaz $h_a = h_b = (h_0^* + c_0^*)m$. A lécc osztása a koszinoid-függvény periódusával, azaz πm -mel kell egyenlő legyen. Így, a lécc fogának parametrikus egyenletei [13]



1. ábra. A generáló koszinusz lécc foga

$$\begin{cases} x_L(u) = u \\ y_L(u) = v \\ z_L(u) = a \cos b u, \quad a = (h_0^* + c_0^*)m, \quad b = 2/m \end{cases} \quad (1)$$

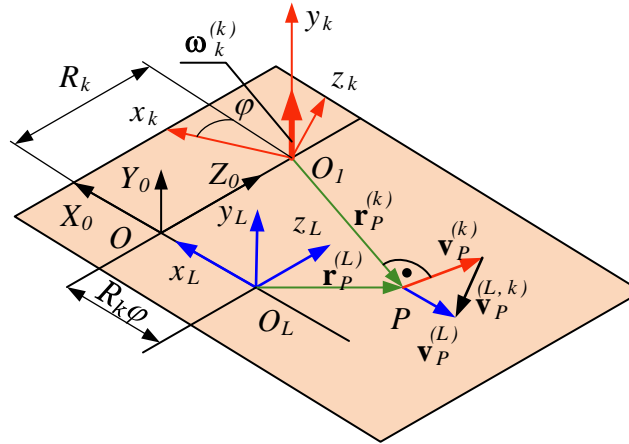
A léccprofil megfelelő parametrizálásával kapjuk meg a jobb, illetve a bal fogfelületet:

$$\begin{cases} \text{Jobb fogfelület: } u \in \left[0, \frac{m\pi}{2}\right] \\ \text{Bal fogfelület: } u \in \left[-\frac{m\pi}{2}, 0\right] \end{cases} \quad (2)$$

2.2. A generáló koszinusz fogaskerék

A generáló koszinusz fogaskerék és a generáló lécc kapcsolódását a Litvin-féle sebességmódszer alkalmazásával írjuk fel, némileg különbözően a [13]-ban ismertetett módtól. Az ott levezetett kifejezések nem vehetők át, mivel a jelen geometriai modellben a kerék tájolása más. Az alkalmazott koordináta-rendszereket a 2. ábrán szemléltetjük. Az állványhoz kötött $(X_0 Y_0 Z_0)$ nulla koordináta-rendszerhez képest a lécchez kötött $(x_L y_L z_L)$ koordináta-rendszer az $X_0 \equiv x_L$ tengely mentén elmozdul, miközben a kerékhez kötött $(x_k y_k z_k)$ koordináta-rendszer az y_k tengely körül elfordul. A kapcsolódás feltételéből adódik, hogy a φ szögnyi kerék elfordulásnak az $R_k \varphi$ lécc-elcsúsztatás felel meg.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a lécc elmozdulási sebessége $v = 1 \text{ mm/s}$, aminek következtében a kerék szögsebessége $\omega^{(k)} = \frac{1}{R_k} \text{ s}^{-1}$. A 2. ábrán feltüntetett jelölésekkel felírjuk a lécc profiljához kötött tetszőleges P pont relatív sebességét a kerékhez kötött, ezzel egybeeső ponthoz képest:



2. ábra. Az alkalmazott koordináta-rendszerek

$$\mathbf{v}_L^{(L,k)} = \mathbf{v}_L^{(L)} - \mathbf{v}_L^{(k)} = 1 \cdot \mathbf{i}_L - \boldsymbol{\omega}_L^{(k)} \times (\mathbf{r}_L^{(P)} - \mathbf{O}_L \mathbf{O}_1) \quad (3)$$

A (3) vektoregyenletet, a 2 ábra alapján a következő alakra hozzuk:

$$\underline{\mathbf{v}}_L^{(L,k)}(u, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos b u \\ 0 \\ -u + R_k \varphi \end{pmatrix} \quad (4)$$

A fogasléc profilnormálisát az (1) egyenletekből kapjuk:

$$\underline{\mathbf{n}}_L^{(L)}(u) = \begin{pmatrix} ab \sin b u \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Az ismert $\underline{\mathbf{n}}_L^{(L)}(u) \cdot \underline{\mathbf{v}}_L^{(L,k)}(u, \varphi) = 0$ kapcsolódási feltételbe [4], behelyettesítjük a (4) és (5) képletekkel megadott vektorokat, majd a műveletek elvégzése után a $\varphi = \varphi(u)$ paraméterek között kapcsolatot a következő alakban találjuk:

$$\varphi(u) = \frac{1}{R_k} \left(u - \frac{a^2 b}{2} \sin(2 b u) \right) \quad (6)$$

A (6) függvényt segítségével megkapjuk a koszinusz fogaskerék fogárkának parametrikus egyenleteit, melynek koncentrált alakja az

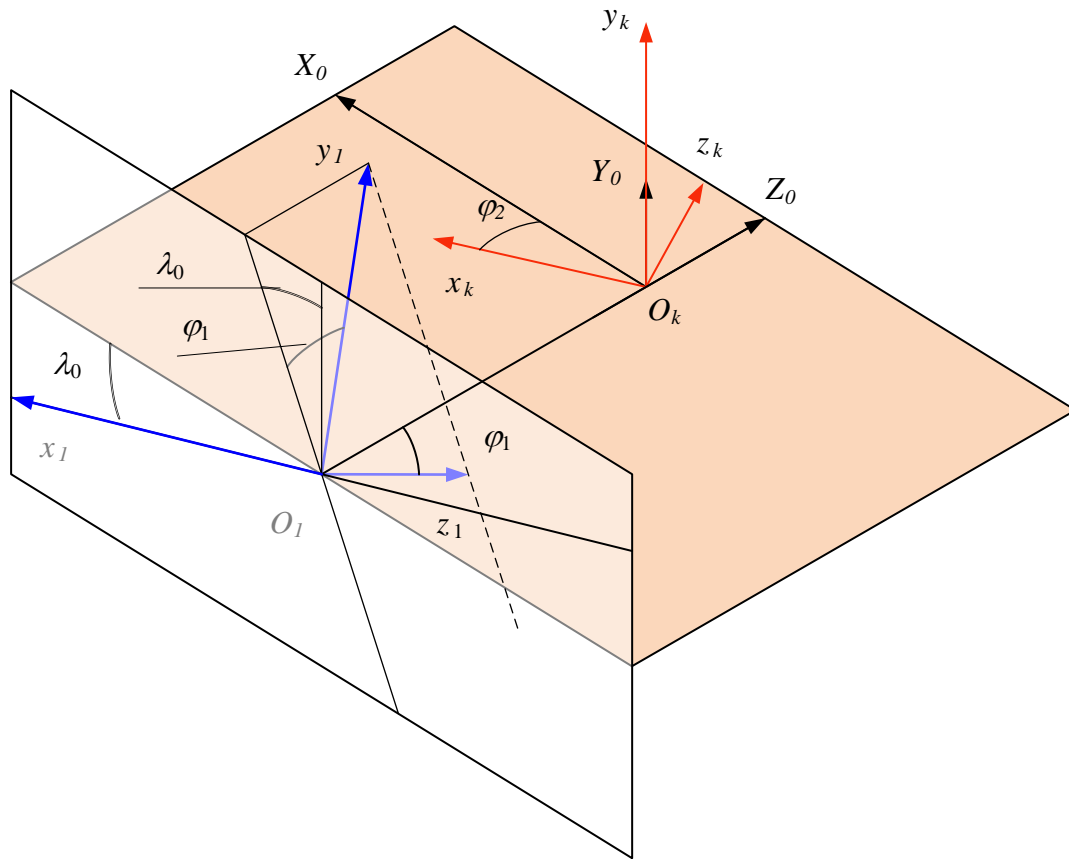
$$\begin{pmatrix} x_k(u, \varphi(u)) \\ y_k(u, \varphi(u)) \\ z_k(u, \varphi(u)) \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{kL}(\varphi(u)) \begin{pmatrix} x_L(u) \\ y_L(u) \\ z_L(u) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Mátrixegyenlettel írható fel, ahol \mathbf{M}_{kL} a léc rendszerből a kerék rendszerébe transzformáló mátrix.

A kapcsolódás szimulációjára célszerű a (7) egyenletekkel megkapott fogárok-profil elforgatni, hogy a szomszédos fogárkok pontjait is megkapjuk. Ezáltal a csiga és a fogaskerék kapcsolódása a valóságnak jobban megfelel, mivel a menteszárnyakkal nem csak egy fogárok-felület kapcsolódik.

3. A CSIGA ÉS A GENERÁLÓ KERÉK KAPCSOLÓDÁSA

Az előbbi fejezetben levezetett koszinusz fogaskerék és meghatározandó tengelyszelvényű csiga kapcsolódását a 3. ábrán szemléltettük. Az állványhoz kötött rendszert ezúttal a generáló kerék tengelyére illesztettük. A kerék koordináta-rendszere az előbbieken definiált $(x_k y_k z_k)$, míg a csiga koordináta-rendszere az $(x_1 y_1 z_1)$.



3. ábra. A csiga és a származtató kerék relatív elmozdulása és az alkalmazott koordináta-rendszerek

A csiga és a generáló kerék kapcsolódására a klasszikus [4] módszertől eltérő módszert alkalmazunk. Számos előző tanulmány igazolta, hogy bizonyos esetekben a tökéletes burkolást nem csak az alámetszés hanem az elmetszés is kísérheti. A külföldi szakirodalomban ennyire pontos megnevezést az elmetszésre, mint amit a magyar szakirodalomban dr. Drahos István állított fel [14], nem talákoztunk: az 'interference' szakszóval jellemzik a profilok vagy a felületek hibás szerelés miatti, vagy gyártáskor a hibás beállítás miatti berágást vagy utóbbi esetben belevágást; ezzel szemben az elmetszés arra az igen érdekes tranzíció-jelenségre hívja fel a figyelmet, amikor a szerszám teste és a gyártott felület között felírható és megoldható a kapcsolódási egyenlet, de a szerszám darabhoz viszonyított tovahaladtával, a szerszámtest már burkolt felületből egy részt forgásba söpör. Az ilyen esetek matematikai leírása egyenlőtlenségek vizsgálatával valósítható meg. Adott pozícióban nem lép fel az elmetszés, ha a burkoló felület – a gyártott felület –, bármely pontjára, a burkolt szerszámfelület bármely pozíciójában, nem áll fenn az $F_{sz}(x, y, z) < 0$ egyenlőtlenség, ahol a negatív jobb oldal a burkolt szerszámtest belső oldalát jelenti.

A pontról-pontra alkalmazott egyenlőtlenség helyett a pontfelhő -módszert alkalmazzuk. A pontfelhő módszer lényege abban áll, hogy előállítjuk a szerszám felületének diszkrét pontjait, a munkadarab koordináta-rendszerében, a kinematikai paraméter diszkrét érték sorára. A pontfelhőből azokat a pontokat választjuk ki, amelyek a munkadarab anyagának minimális térfogatát definiálják. Az ezekre írt numerikus függvények segítségével tudjuk a generált elem jellegzetes geometriai entitásainak egyenleteit fölírni. A módszer leírásából világosan látszik, hogy elfogadja az elmetszés következményeit. Az alkalmazása után az elméleti burkolási modellt is föl lehet írni, majd pedig a jellegzetes keresztmetszeteket összehasonlítani.

A 3 ábra alapján, a csiga (x_1, y_1, z_1) és a kerék (x_k, y_k, z_k) koordináta-rendszerei között kapcsolatot a

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{M}_{1k}(\varphi_1, \varphi_2) \mathbf{r}_k \quad (8)$$

mátrixegyenlet írja le. Ezzel, a pontfelhő előállítását a következőképpen végezzük el.

Legyen N_i a három fogárok-profil összes pontjának száma, és legyen N_j a fogaskerék szélességében felvett párhuzamos, egyenlő távolságra illeszkedő szelvények száma. Ezzel a fogaskerék rendszerében felírt

$$G_{i,j} = \{x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}, i \in \overline{1, N_i}, j \in \overline{1, N_j}\} \quad (9)$$

rendezett ponthalmazt a (8) transzformációval a következő halmazzá transzformáljuk:

$$F_{i,j,k} = \{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}, i \in \overline{1, N_i}, j \in \overline{1, N_j}, k \in \overline{1, N_k}\} \quad (10)$$

A fogaskerék φ_2 elfordulási szögének kijelölt intervallumában N_k diszkrét értéket veszünk fel. A pontfelhő számossága $N_s = i j k$, tetszés szerinti sűrűsíthető, a profil, a fogszélesség vagy pedig a lépéssűrűség növelésével.

4. SZÁMSZERŰ KIÉRTÉKELÉS

a számszerű kiértékelés jellemző adatait Az 1. Táblázat tartalmazza

1. Táblázat: a vizsgált csigamaró paraméterei

Sorszám	Megnevezés	Jelölés	Érték	Mértékegység
1.	Modul	m	5	mm
2.	Referencia profilszög	α_0	21°48'	fok
3.	Generáló kerék fogszaám	z_k	45	-
4.	Csiga fogszaama	z_1	1	-
5.	Osztóhenger-csavarvonal-dőlésszög	λ_0	3°	fok
6.	Fejhenger-sugár	R_a	54,018	mm
7.	Osztóhenger- sugár	R_0	47,768	mm
8.	Lábhenger-sugár	R_f	41,518	mm
9.	Axiális menetemelkedés	p_{ax}	15.73	mm

A 4. ábrán egy közepesen sűrített pontfelhőt szemléltetünk, A φ_2 szög kinematikai határait az adott fogfejnek a csiga fejhengeréhez érkezése pillanatától, annak elhagyási pillanatáig tekintettük

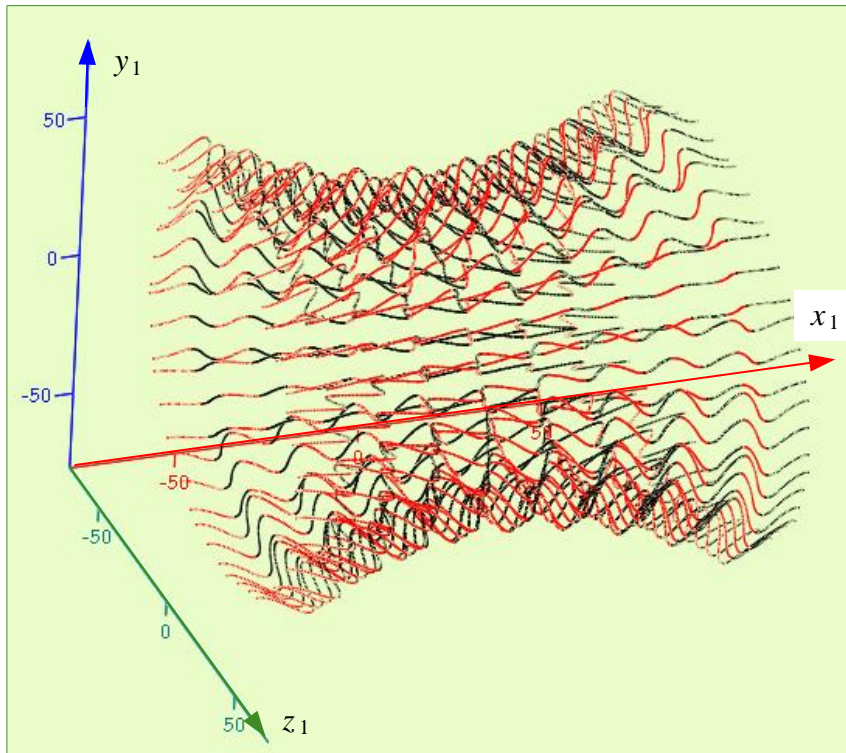
Ennek alapján a szögtartomány értéke:

$$\theta = 2 \arccos \frac{R_k - (h_0^* + c_0^*)m}{R_k + (h_0^* + c_0^*)m} \quad (11)$$

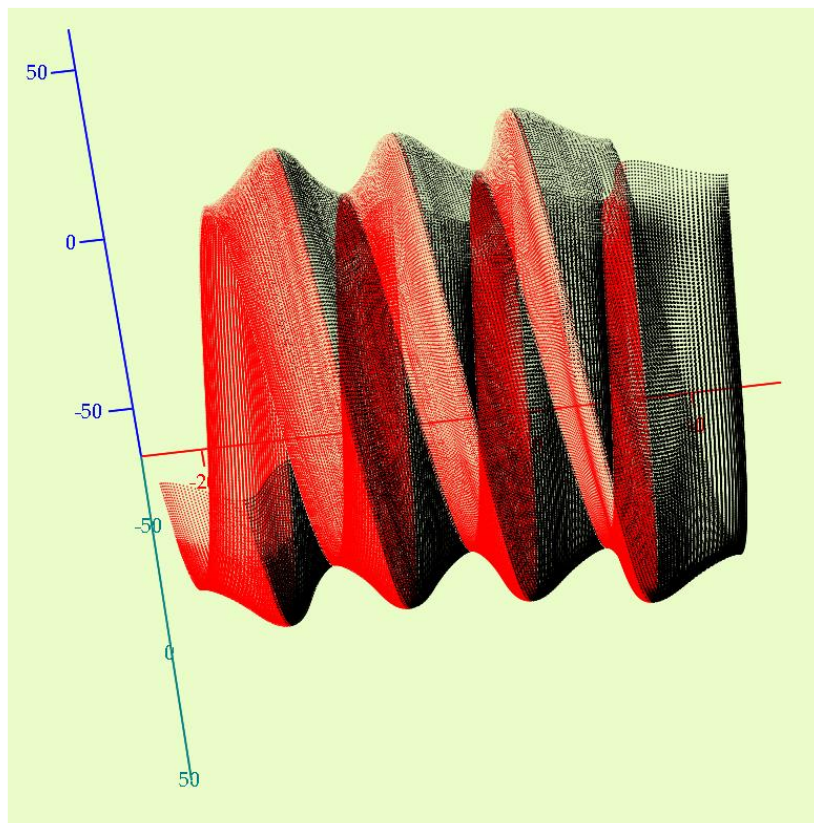
A generáló fog szélességében pedig 3 egyenlő távolságra illeszkedő szelvényt vettünk figyelembe.

A 4. ábra azt mutatja, hogy a pontfelhő jóval túllép a csiga fejhengerén, viszont ez azért szükséges, hogy az esetleges elmetszési helyzeteket ne hagyjuk figyelmen kívül.

Az 5. ábra egy olyan pontfelhőt ábrázol, ahol a fogaskerék szélességében 10 egyenlő távolságra illeszkedő profilhalmazt tekingettünk, a φ_2 tartományát pedig negyedére csökkentettük.



4. ábra. Közepesen sűrített pontfelhő



5. ábra. Fogaskerék szélességében sűrített pontfelhő

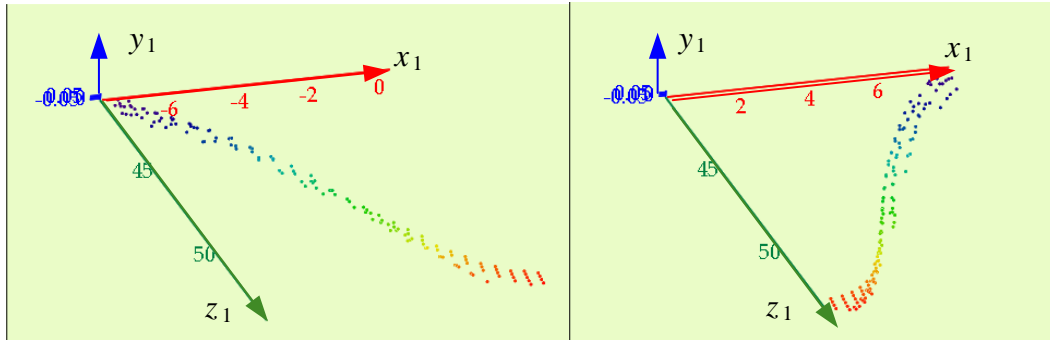
A 4. és 5. ábra összehasonlításából arra következtetünk, hogy a szélességben sűrített pontfelhővel való modellezés a célravezető, míg az előbbi arra jó, hogy a generálás határait finomítani tudjuk. Lényegében a feladat megoldása abban áll, hogy a pontfelhőből elő tudjuk állítani a csiga tengelyszelvényét.

Ehhez a generált pontalmazt meg kell szűrni. Három szűrési feltételt állítunk elő:

1. A kiválasztott pontok legyenek az x_1z_1 sík környezetében;
 2. A kiválasztott pontok legyenek a z_1 tengelytől egy osztásnyi távolságra;
 3. A kiválasztott pontok z_1 koordinátái legyenek pozitívak.
- A feltételek a következőképpen írhatók fel:

$$\begin{aligned} -\delta_{y_1} &\leq y_1 \leq \delta_{y_1} \\ -\frac{m\pi}{2} &\leq x_1 \leq \frac{m\pi}{2} \\ z_1 &> 0 \end{aligned} \quad (12)$$

A szűrt pontokat a 6 ábrán szemléltettük:



6. ábra. A csiga tengelyszelvényét definiáló szűrt pontthalmaz

A 6. ábra a menetszárny bal, illetve jobb oldalának meghatározó pontfelhő- alalmazát szemlélteti. A profil minden esetben a tengelyhez legközelebb álló pontok fogják definiálni.

4. KÖVETKEZTETÉSEK

Az előzőekben bemutatott módszer gyors és biztonságos eszköz egy adott fogaskerékkel kapcsolódó csiga tengelyszelvényének és profiljának a meghatározására.

A pontos meghatározáshoz mindenképpen el kell végezni a kölcsönösen burkoló felületek elmélete alapján előírt műveletsort, az viszont az esetleges elmetszések nem fogja kimutatni.

A módszer bármilyen generatív felület-előállítás esetében követő-ellenőrző eljárásaként alkalmazható.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] *** Verifiedmarketreports. <https://www.verifiedmarketreports.com/product/gear-manufacturing-market/> (Utolsó letöltés: 01.03.2024).
- [2] Qinge Xiao, Congbo Li, Ying Tang b e, Jian Pan, Jun Yu c, Xingzheng Chen: *Multi-component energy modeling and optimization for sustainable dry gear hobbing*. Energy, Volume 187, 15 November 2019, 115911: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2019.115911>.
- [3] Hodgyai, N., Máté, M., Oancea, Gh., Dragoi, M.V. : *Review: Gear Hobs—Cutting Tools and Manufacturing Technologies for Spur Gears: The State of the Art*. Materials 2024, 17(13), 3219; DOI: 10.3390/ma17133219 , ISSN: 1996-1944.
- [4] Litvin, F.L., Fuentes, A. *Gear Geometry and Applied Theory*. Cambridge University Press, 2009.
- [5] Hollanda, D. *Așchiere și scule*. Editura I.I.S. Tg. Mureș, 1982.
- [6] Máté, M. *Hengeres fogaskerekek gyártószerszámjai*. Erdélyi Múzeum-Egyesület, 2016.
- [7] Radzewich, Stephan: *Gear Cutting Tools: Fundamentals of Design and Computation*. 1st edition. CRC Press;, Boca Raton, UK, 2010.
- [8] Hodgyai, N., Drăgoi, M.V., Máté, M.: *Gear hob base worm modelling from a straight toothed generating rack*. Műszaki Tudományos Közlemények vol. 20. (2024) 24–29. DOI: Hungarian: <https://doi.org/10.33895/mtk-2024.20.05>. English: <https://doi.org/10.33894/mtk-2024.20.05>.
- [9] I. Shanming Luo , Yue Wu , Jian Wang , The generation principle and mathematical models of a novel cosine gear drive, Mechanism and Machine Theory 43 (2008) 1543–1556.
- [10] Balajti, Zs. *Determination of Undercutting Avoidance for Designing the Production Technology of Worm Gear Drives with a Curved Profile*. Machines 2023, 11(1), 56; <https://doi.org/10.3390/machines11010056>
- [11] Balajti, Zs., Ábel, J., Dudás, I. *Examination for post-sharpening adjustment of cutting edge of a worm gear hob with circle arched profile in axial section*. Procedia Manufacturing 2021 55(5-8):260-265, DOI: 10.1016/j.promfg.2021.10.037

- [12] Balajti, Zs., Ábel, J. *Edge geometry test method with correctly positioned CCD cameras for production geometrical development of a worm gear hob with arched profile*. *Procedia Manufacturing* 2020, 51(1):365-372, DOI: 10.1016/j.promfg.2020.10.052.
- [13] Máté, M., Gál, K.I., Tolvaly-Roşca, F. Koszinuszprofilú lefejtőléccel gyártott fogaskerékpár szintézise és CAD-vizsgálata. *Műszaki Tudományos Közlemények – International Scientific Series of the Transylvanian Museum Society*, Vol. 19. (202), pp. 25-30. <https://eda.eme.ro/handle/10598/33573>.
- [14] dr. Drahos, I. *A szerszámgeometria mozgásgeometriai alapjai*. Budapest, Tankönyvkiadó, 1981.