

Nemlineáris anyagi viselkedés adataalapú mechanikai modellezése neurális hálózatok segítségével

Data-driven mechanical modeling of nonlinear material behavior using neural networks

SZÁSZ Zsolt, MSc hallgató¹, Dr. KOSSA Attila, egyetemi docens¹

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar,
Műszaki Mechanikai Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3. tel.: +36-1463-1369, fax: +36-1463-3471

Abstract

The development of constitutive models is challenging due to the complex, path- and time-dependent nonlinear behavior of materials, making purely analytical approaches difficult. Numerical solutions often require solving nonlinear equations, which can be computationally demanding, especially in finite element simulations. Data-driven methods offer a promising alternative by creating accurate models from large and diverse datasets, even for unknown nonlinear systems. Using a well-known one-dimensional elastic-plastic model, we generate sample data to validate this approach. The goal is to model the next state as a function of past states and current strain, requiring high accuracy to prevent error accumulation. We implement and optimize several neural network-based approaches and compare their efficiency.

Keywords: data-driven, neural network, LSTM, finite element method, constitutive law

Kivonat

A mechanikai konstitutív modellek fejlesztése kihívást jelent, mivel az anyagok összetett, út- és időfüggő nemlineáris viselkedést mutathatnak, ami megnehezíti az analitikus megközelítést. A megoldások gyakran nemlineáris egyenletek numerikus megoldását igénylik, ami jelentős számítási igénnyel járhat, különösen végesselemes szimulációk esetén. Az adatvezérelt megközelítés viszont lehetőséget ad arra, hogy nagyméretű és változatos mintaadat alapján pontos modelleket alkossunk, még ismeretlen, nemlineáris rendszerek esetén is. Egy ismert egydimenziós rugalmas-képlékeny anyagmodellt használunk, amely numerikusan megoldható, így tetszőleges számú mintaadat előállítható a módszer validálására. A cél a következő állapot modellezése múltbeli állapotok és az aktuális alakváltozás függvényében, amely nagy pontosságot igényel a hibák felhalmozódása miatt. A dolgozatban több neurális hálón alapuló megközelítést vizsgálunk, optimalizálunk, majd összehasonlítjuk azok hatékonyságát.

Kulcsszavak: adatvezérelt, neurális hálózat, LSTM, végeselem módszer, anyagmodell

1. BEVEZETÉS

A konstitutív modellek fejlesztése egy nagyon fontos, viszont ugyanakkor egy kiemelkedően nehéz feladat is, hiszen az alapanyag viselkedése rendkívül összetett és ebből kifolyólag a legtöbb anyag a modellezni kívánt tartományban erős nemlineáris viselkedést mutathat, ami megnehezíti a tisztán analitikus megközelítést. Továbbá az analitikus modellek alkalmazása esetén gyakran nemlineáris egyenletek numerikus megoldásához kell folyamodnunk, ami egy sok elemből és időlépésből álló végesselemes szimuláció esetén viszonylag magas számítási igénnyel bírhat, ugyanis ezek megoldása szintén csak numerikusan, iteráció segítségével lehetséges. Egy megoldás lehet ezekre a nehézségekre az adataalapú megközelítés, ugyanis lehetőséget biztosít arra, hogy pusztán kellő mennyiségű és megfelelően változatos minta adat alapján pontos modelleket hozzunk létre. Az adataalapú modellezés legelterjedtebb és legszélesebb körben alkalmazott eszközei a neurális hálózatok, melyek legfőbb előnye, hogy megfelelően megválasztott adatok és optimalizációs eljárás segítségével képesek akár ismeretlen, nemlineáris viselkedést mutató rendszerek pontos modellezésére is. Viszont a legkézenfekvőbb előnyük, akkor mutatkozik meg, amikor a konstitutív modellek végesselemes szimulációkban történő alkalmazását vizsgáljuk.

Ezeket az előnyöket már viszonylag korán felismerték. Az irodalomban Ghaboussi 1991-es munkája [1] számít az úttörőnek ebben a témában. Azóta ez a terület, a többi neurális hálók alkalmazására alapuló területhez hasonlóan, rohamosan növekvő tendenciát mutat. A terület fejlődését és a különböző megközelítési módok összegzését remekül körüljárja Dornheim 2024-es irodalmi áttekintője [2].

Esetünkben egy egydimenziós rugalmas-képlékeny anyagi viselkedést próbálunk majd reprodukálni, mely egy állapotfüggő viselkedés, hiszen a folyáshatárt elérve az anyag válasza nemcsak a pillanatnyi terheléstől, hanem az előző állapotoktól is függ. Általánosan az állapot függést a legegyszerűbben az alábbi egyenlet szerint fogalmazhatjuk meg:

$$\sigma_{n+1} = f(\sigma_n, \varepsilon_{n+1}), \quad n = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (1)$$

Ezzel a megközelítéssel, és az irányítástechnikai feladatokkal való párhuzamba állítással már a 1998-ban Furukawa munkájában [3] is találkozhatunk. A korai munkák [1], [3], [4] esetén sikerült interpolatíván eredményes modelleket alkotni. A későbbiekben már természetesen születtek extrapolatív módon alkalmazható modellek is, melyek esetén pontosság érdekében gyakori megkötés a szigorúan meghatározott karakterisztikájú terheléstörténetekre való alkalmazhatóság. Például Gorji [5] munkájában egy rugalmas-képlékeny, síkfeszültség feladatot vesz példaként és oly módon generál terhelés idősorokat, hogy azok a fémek megmunkálása során jellemzően előforduló terheléstörténeteket tükrözzenek. A módszer esetünkben is hasonló lesz, viszont ebben a dolgozatban nagyobb hangsúlyt kap a változatos terheléstörténetre való alkalmazhatóság, ugyanis így biztosítható az, hogy a modell ne illeszkedjen túl a bemenő adatokra és ezáltal magát a belső, háttérben húzódó törvényt modellezze.

A korábban említett munkák mind egyszerű MLP (Multi Layer Perceptron) hálózatokat használtak a modellezésre, ugyanakkor léteznek olyan hálózatok is, amelyeket célszerűen sorok modellezésére fejlesztettek ki, ezek az RNN (Recurrent Neural Network) hálózatok, melyek már alapvetően állapotfüggő viselkedéssel rendelkeznek. Bár kisebb számban, de léteznek olyan publikációk is, ahol ilyen rekurrens hálózatokkal próbálkoznak konstitutív modellek létrehozására, egy korai példa erre [6]. Az LSTM (Long-Short Term Memory) hálózat egy tovább fejlesztett és széleskörben alkalmazott rekurrens hálózat, LSTM-el történő modellezésről olvashatunk Zhang [7] és [8] cikkében.

Ahogy már hangsúlyoztuk, ebben a munkában igyekszünk minél általánosabban megközelíteni a problémát, hiszen így lehetőségünk nyílik arra, hogy ne csak a neurális háló alapú konstitutív modellezés területén elért eredményekre támaszkodjunk, hanem figyelembe vegyük a nemlineáris diszkrét dinamikai rendszerek és idősorok neurális hálózatokkal történő modellezésében elért eredményeket is, mint például Gonzalez [9] munkáját, melyben felméri a klasszikus struktúrák modellezési lehetőségeit a diszkrét dinamikai rendszerekre vonatkozóan. Emellett az olyan értekezések esetén, ahol ugyancsak rugalmas-képlékeny modellt járnak körül, egyaránt a régebbi [3], illetve újabb [5] publikációk esetén a modell tanítása során felhasználják a felhalmozódott képlékeny alakváltozást is. Mi arra törekszünk, hogy egy általánosan használható modellezési módszert alkossunk, mely független a belső változóktól, ezért mi kizárólag a feszültség és alakváltozás értékeit használjuk fel a modellalkotás során.

2. A PROBLÉMA FELVETÉSE

Egy végeselemes szimuláció során az a célunk, hogy az $\mathbf{U}$ csomóponti elmozdulás vektor és az $\mathbf{F}$ csomóponti erő vektor segítségével kifejezett rendszer egyenletet megoldjuk. Ehhez először kapcsolatot kell teremtenünk a két vektor között. Ezt úgy tudjuk megtenni, ha elemenként felírjuk a szerkezeti egyensúly egyenletét. A belső feszültségekből eredő erők kifejezéséhez szükségünk van az elemre vonatkozó alakváltozási és feszültség értékekre, melyek kifejezéséhez először a csomóponti elmozdulások és a megfelelő $\mathbf{N}$ interpolációs mátrix segítségével előállítjuk az elem elmozdulásmezijét mint $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U}$. Ezt követően a megfelelő alakváltozás definíció és az annak megfelelően definiált $\mathbf{D}$ elmozdulás-alakváltozás mátrix segítségével előállítjuk az alakváltozás vektoros alakját mint $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{NDU} := \mathbf{BU}$. Az így előállított alakváltozásból a konstitutív modell segítségével fejezhető ki a feszültség, mely a legegyszerűbben, állapotfüggetlen nemlinearitást feltételezve nem jelent más mint, hogy

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (2)$$

Természetesen ezt a kapcsolatot komplexebb, állapotfüggő modellek esetén akár egy közös differenciálegyenlet is definiálhatja, mely esetekben értelemszerűen többnyire diszkretizálással tudjuk megoldani az

egyenletet. Ezt követően felírva a szerkezeti egyensúly egyenletét, a probléma a [10] könyvben szereplő módon egy

$$P(U) = F \quad (3)$$

alakú nemlineáris egyenletrendszerként fogalmazható meg. Látható, hogy a konstitutív modell nemlinearitása mindenképp nemlineáris egyenletek megoldásához vezet, melyek megoldása iteratíván lehetséges, például a Newton-Raphson iterációval, vagy az arc-length módszerrel. Nagyobb elmozdulások esetén, ezen módszerek konvergenciájának segítésére, gyakran alkalmazzák a növekményes terhelés módszerét, mely még egy további iterációs ciklust eredményez a megoldás során. Itt fontos kiemelni, hogy az említett módszerek esetén szükségünk van a konstitutív modell deriváltjára is, mely a neurális háló alapú modellek esetén is rendelkezésünkre áll, hiszen a tanításuk is a differenciálhatóságon alapszik.

Amennyiben egy a dolgozatban is vizsgált modellhez hasonló, egydimenziós rugalmas-képlékeny modellt veszünk, ahol mondjuk a rugalmas alakváltozáshoz tartozó rugalmassági modulus E és a folyáshatár változását a λ felhalmozódott egyenértékű képlékeny alakváltozás függvényében egy nemlineáris $Y(\lambda)$ függvény írja le, a numerikus megoldás során, a felhalmozódott képlékeny alakváltozás inkrementjét a

$$|\sigma_n + E\Delta\varepsilon| - E\Delta\lambda - Y(\lambda_n + \Delta\lambda) = 0 \quad (4)$$

alakú nemlineáris egyenletből tudjuk kiszámolni. Viszont ennek a megoldása szintén egy iteratív numerikus megoldót igényel. Például ez az iteráció megkerülhető a neurális háló alapú modellekkel, ugyanis a tanítást követően azok működése egyenes vonalú.

3. A PROBLÉMA ÁLTALÁNOSÍTÁSA

A végeselemes megoldó szemszögéből egy alakváltozás vezérelt anyagmodell, egy matematikai értelemben vett diszkrét dinamikai rendszerként, egy alakváltozás idősor ismeretében állít elő egy feszültség idősor választ. Az alakváltozást tekinthetjük egyfajta bemenetnek, míg a feszültséget egyfajta kimenetnek. Vegyünk egy általános, nemlineáris, ismeretlennek tekintett sebességfüggő modellt:

$$\dot{\sigma} = \gamma(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon}). \quad (5)$$

Ez azt feltételezi, hogy a viselkedés modellezhető a feszültséggel, alakváltozással, valamint ezen mennyiségek időszerinti megváltozásával. A fenti összefüggés, az idő deriváltak k -ad rendű közelítése után, átalakítható a (6) és (7) általános diszkrét alakokra, mely átalakítás során csak azt tartjuk szem előtt, hogy mi minek a függvénye, ugyanis a neurális háló szemszögéből ez lesz majd a lényeges. Fontos továbbá azt is belátni, hogy k -ad rendű derivált közelítés esetén, k darab kezdeti feszültség értékre van szükségünk a kezdeti érték probléma megoldásához.

$$\sigma_{n+1} = \sum_{i=0}^k a_i \cdot \sigma_{n-i} + f \left(\{\sigma_i\}_{i=n-k}^n, \{\varepsilon_i\}_{i=n-k}^{n+1} \right), \quad (6)$$

$$\sigma_{n+1} = F \left(\{\sigma_i\}_{i=n-k}^n, \{\varepsilon_i\}_{i=n-k}^{n+1} \right), \quad (7)$$

ahol $\{a_i\}_{i=0}^k$ a derivált közelítést definiáló együtthatók. Ebben a két formában az ismeretlen függvények a kimenet és a bemenet adott hosszúságú múltjától, valamint a pillanatbeli bemenettől függenek. Amennyiben magát a kapcsolatot is időfüggőként definiáljuk, úgy a modellt a (8) és (9) általános alakokban is megfogalmazhatjuk.

$$\sigma_{n+1} = \sum_{i=0}^k a_i \cdot \sigma_{n-i} + f_n \left(\{\sigma_i\}_{i=0}^k, \{\varepsilon_i\}_{i=0}^{n+1} \right), \quad (8)$$

$$\sigma_{n+1} = F_n \left(\{\sigma_i\}_{i=0}^k, \{\varepsilon_i\}_{i=0}^{n+1} \right). \quad (9)$$

Ilyenkor az ismeretlen függvények, csak a k darab kezdeti kimeneti értéktől, valamint a bemenet teljes múltjától függenek. Ebből a négy alakból fogunk kezdeti megfontolásokat tenni a modellek kialakításával kapcsolatban.

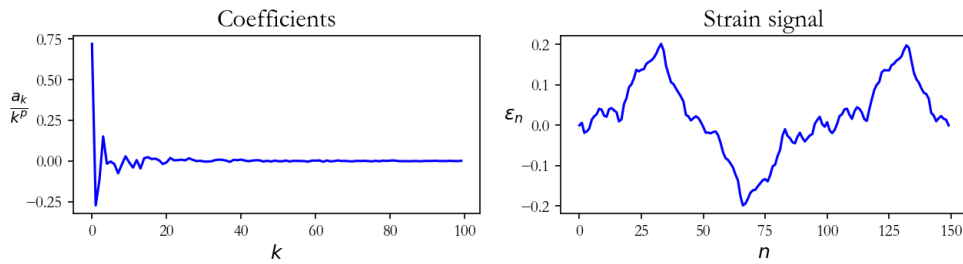
4. LEHETSÉGES MEGOLDÁSOK

Közelítendő anyagi viselkedésnek jelen esetben célszerű egy analitikus modell által leírt viselkedést választani, ugyanis ez is elegendő az adatalapú anyagmodellezés módszerének validálásához, viszont lehetőséget biztosít mérések nélkül, pusztán szimuláció által, korlátlan mennyiségű feszültség-alakváltozás idősorok létrehozására, ezáltal a modell tanításához és annak a teszteléséhez szükséges adatmennyiség is adott. Mi egy egydimenziós rugalmas-képlékeny Swift-modellt választunk közelítendő, "ismeretlen" viselkedésnek, mely esetén a folyáshatár változását a (10) egyenlet írja le.

$$Y(\bar{\varepsilon}) = a \cdot (\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon})^n \quad (10)$$

Ekkor numerikus algoritmus segítségével képesek vagyunk tetszőleges alakváltozás (bemenet) történet esetén előállítani a neki megfelelő feszültség (kimenet) választ. Viszont egy adatalapú modell alkotásához viszonylag sok változatos és ugyanakkor életszerű kimenet-bemenet párra lesz szükségünk, ezért ezen felül szükségünk lesz egy módszerre, amivel képesek vagyunk véletlenszerű bemeneteket készíteni. Mivel a kezdeti alakváltozások nullák, ezért célszerű a bemenetet különböző frekvenciájú szinusz függvények összegeként előállítani, ahol ezek együtthatói véletlenszerűen kerülhetnek majd kiválasztásra, így véletlen és ugyanakkor folytonos jelek állíthatók elő. Annak érdekében, hogy kellően "simák" legyenek a bemenetek, a jel generálást ellátjuk egy felülaterezítő jelleggel. Az így kialakított generálási módot a (11) egyenlet ismerteti. Valamint a 1. ábrán látható egy példa jel is, mely ezzel a módszerrel lett létrehozva.

$$\varepsilon_n = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{k^p} \cdot \sin\left(2\pi n \frac{k}{N}\right), \quad n \in \overline{1, T}. \quad (11)$$

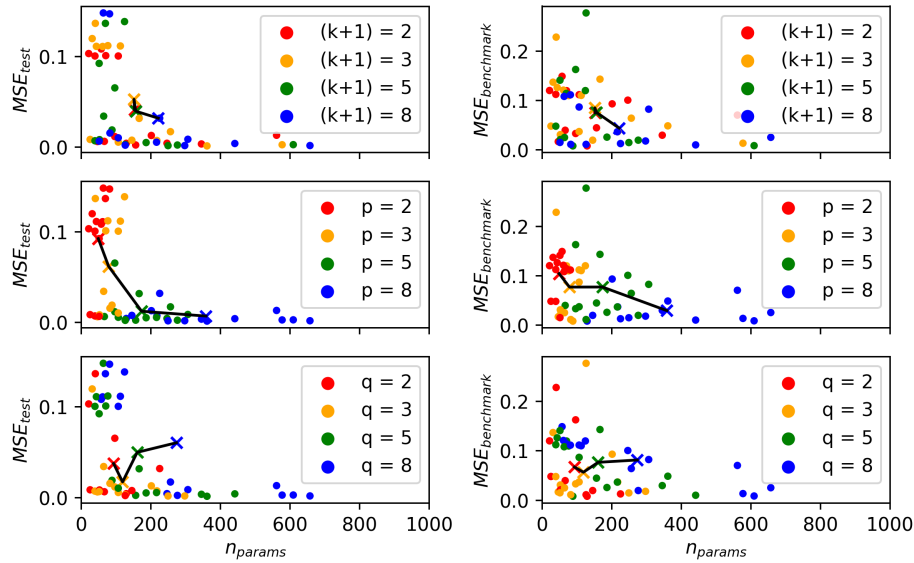


1. ábra. Példa véletlenjel generálásra. Bal: a szinusz hullámok együtthatói. Jobb: az eredményezett jel

Ilyen módon generálunk $n_{samples} = 200$, egyenként $T = 150$ időlépésből álló bemenet-kimenet párt (összesen $200 \times 150 = 30000$ adatpont), majd cél szerint felosztjuk tanító (165), validációs (25) és teszt (10) halmazokra. A tanító és validációs adatok a modell létrehozását szolgálják, míg a teszt adatok pedig a háló (tanító adatoktól független) kiértékelését. Ezen felül, ugyancsak kiértékelési céllal még létrehozunk egy a generálási módtól független és eltérő hosszúságú $T = 400$ időlépésből álló benchmark bemenet-kimenet párt is. A kiértékelés során figyelembe kell vennünk még azt, hogy mi nem csak egyszerűen predikcióra, hanem szimulációra alkalmas modellt szeretnénk alkotni. Ez azt jelenti, hogy a modell által tett predikció pontossága nem csak egy lépés előrejelzésére kell elfogadható legyen, hanem a kezdeti értékekből kiindulva kellő pontossággal kell tudja előre jeleznie a rendszer által adott időbeli választ. Ezért a későbbiekben szereplő hibamértékek nem a háló közvetlen pontosságára vonatkoznak, hanem a háló által szimulált idősor és a valós idősor közti eltérésre. Tehát ezek a hibamértékek már magukban hordozzák a háló hibájának a szimuláció során történő felhalmozódását is.

A korábbi diszkrét alakokból kiindulva, négy különböző modellezéssel fogunk próbálkozni. Egyaránt próbáljuk memória nélküli neurális háló architektúrával (MLP) modellezni a feszültség értéket (6) és a feszültség inkrementet (7), illetve memóriával rendelkező neurális háló architektúrával (LSTM) ugyancsak a feszültség értéket (8) és a feszültség inkrementet (9). Annak érdekében, hogy megtaláljuk a legeredményesebb konstrukciót, mind a négy esetben meg fogunk vizsgálni több háló struktúrát. Ennek érdekében paraméterezhetővé tesszük a rétegek számát q , illetve a rétegek neuronjainak a számát p , valamint a modell "emlékezetét" azaz, hogy hány múltbéli lépést vegyen figyelembe a modell k . Mind a négy esetben több modellt is betanítunk mind a három paraméter mentén, fejenként 100 epoch-ig. Majd az így keletkező modellek alapján próbálunk valamilyen következtetést levonni a paraméterek hatásáról, a modell struktúrájára vonatkozólag. Ez a vizsgálat figyelhető meg az inkrementális MLP hálózati példáján a 2. ábrán, ahol a háló összpáraméter számának

függvényében ábrázoltuk az inkrementális MLP modellek pontosságát a teszt és benchmark halmazokon. Ezt követően, paraméterenként csoportosítva a hibaértékeket, vettük az így alakult csoportok középértékeit és összekötöttük őket. Így megsejthető a q paraméter növelésének negatív, míg a p paraméter növelésének pozitív hatása a hibamértékre. Ez alapján vélhetően nagyobb p és kisebb q értékekkel lehet érdemes próbálkozni.



2. ábra. k, p és q hatása inkrementális MLP modellek esetén

5. ÖSSZEGZÉS

Mind a négy modellezési módszerre tanítottunk egy modell halmazt, majd vizuálisan próbáltuk megsejteni az ideális struktúrát és finomítottunk a vélhetően legjobban illeszkedő modelleken. Az így keletkezett modellek közül a teszt halmazon legjobban teljesítő modelleket a 1. táblázat, míg a benchmark halmazon legjobban teljesítőket a 2. táblázat számszerűleg összegzi. Emellett a modellek vizuális kiértékelése is látható a 3. ábrán. Látható, hogy a teszt halmazon legjobban teljesítő modellek a hosszban és karakterisztikában teljesen független benchmark adathalmazon már nagyságrendileg rosszabbul teljesítenek. Ezzel szemben a benchmarkon jól teljesítő modellek, a teszt halmazon is jól teljesítenek. Ez alapján kijelenthető, hogy a benchmark szerint vett legjobb modellek jobban közelítik a modellezni kívánt "ismeretlen" viselkedést.

1. táblázat. A legjobb modellek a teszt halmazon

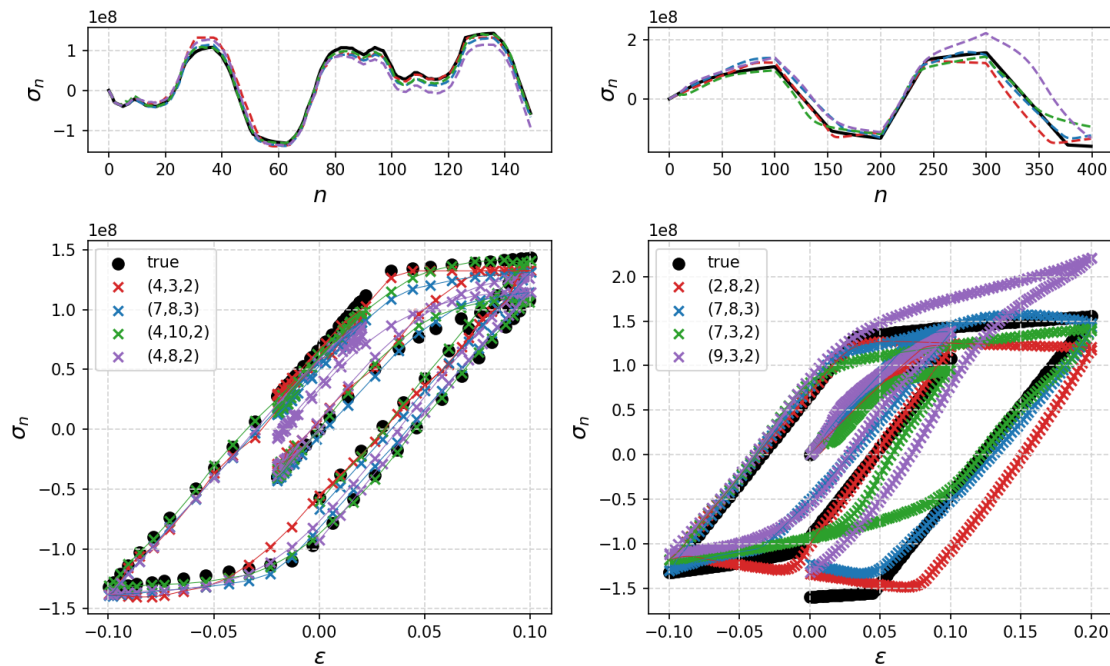
Hálózat	Módszer	Epoch	(k,p,q)	n_{params}	MSE_{test}	$MSE_{benchmark}$
MLP	Direkt	50	$(4,3,2)$	52	1.944×10^{-3}	10.955×10^{-3}
MLP	Inkrementális	200	$(7,8,3)$	281	1.147×10^{-3}	8.369×10^{-3}
LSTM	Direkt	100	$(4,10,2)$	1531	0.466×10^{-3}	59.276×10^{-3}
LSTM	Inkrementális	100	$(4,8,2)$	1033	2.224×10^{-3}	364.714×10^{-3}

2. táblázat. A legjobb modellek a benchmark halmazon

Hálózat	Módszer	Epoch	(k,p,q)	n_{params}	MSE_{test}	$MSE_{benchmark}$
MLP	Direkt	150	$(2,8,2)$	129	4.881×10^{-3}	7.312×10^{-3}
MLP	Inkrementális	150	$(7,8,3)$	281	2.452×10^{-3}	4.184×10^{-3}
LSTM	Direkt	50	$(7,3,2)$	244	2.987×10^{-3}	6.925×10^{-3}
LSTM	Inkrementális	100	$(9,3,2)$	268	12.621×10^{-3}	32.555×10^{-3}

Az általunk kitalált bemenőjel generálásnak és paraméterbecslésnek köszönhetően sikerült több olyan modellezési módszert is alkotni, amely mellőzi a belső változók használatát és a tanító adatokra való túlilleszkedés nélkül, szimulációs értelemben véve is kellően pontos modelleket tud eredményezni. Ezek közül a legeredményesebb módszer a $(7,8,3)$ inkrementális MLP, mely esetén a hiba mind a benchmark, mind a teszt halmazon

0.5% alatt van. Ugyan egy elméleti anyagi viselkedésre alkottunk modellt, viszont az általunk bemutatott módszer átültethető bármilyen anyagi viselkedésre, amelyet képesek vagyunk megmérni, hiszen a probléma alaptermészete minden anyag esetén hasonló. Ez lehetőséget ad a nehezen modellezhető, erős nemlinearitást mutató anyagok eredményes modellezésére. Mind emellett mivel diszkrét rendszerként modelleztük az anyagot, így a modell egyenesen alkalmazható egy végelelemes szimuláció során.



3. ábra. Bal: a teszt halmazon legjobban teljesítő modellek vizuális kiértékelése a teszt halmaz első idősorán. Jobb: a benchmark halmazon legjobban teljesítő modellek vizuális kiértékelése a benchmark halmazon

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Jelen kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával valósult meg. Pályázati azonosító: FK 142457. Jelen TDK dolgozatban bemutatott tudományos eredmények az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készültek.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Ghaboussi J., Garrett Jr J., Wu X. *Knowledge-based modeling of material behavior with neural networks*. Journal of engineering mechanics. American Society of Civil Engineers, 1991, 117(1), 132–153.
- [2] Dornheim J., Morand L., Nallani H. J., Helm D. *Neural networks for constitutive modeling: From universal function approximators to advanced models and the integration of physics*. Archives of Computational Methods in Engineering. Springer, 2024, 31(2), 1097–1127.
- [3] Furukawa T., Yagawa G. *Implicit constitutive modelling for viscoplasticity using neural networks*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Wiley Online Library, 1998, 43(2), 195–219.
- [4] Lefik M., Schrefler B. *Artificial neural network as an incremental non-linear constitutive model for a finite element code*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192(28), 3265–3283. doi: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(03\)00350-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00350-5)
- [5] Gorji M. B., Mohr D. *Towards neural network models for describing the large deformation behavior of sheet metal*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2019, 12102.
- [6] Oeser M., Freitag S. *Modeling of materials with fading memory using neural networks*. International journal for numerical methods in engineering. Wiley Online Library, 2009, 78(7), 843–862.
- [7] Zhang P., Yin Z.-Y., Jin Y.-F., Ye G.-L. *An AI-based model for describing cyclic characteristics of granular materials*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Wiley Online Library, 2020, 44(9), 1315–1335.
- [8] Zhang N., Shen S.-L., Zhou A., Jin Y.-F. *Application of LSTM approach for modelling stress–strain behaviour of soil*. Applied Soft Computing, 2021, 100, 106959. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106959>
- [9] Gonzalez J., Yu W. *Non-linear system modeling using LSTM neural networks*. IFAC-PapersOnLine, 2018, 51(13), 485–489. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.07.326>
- [10] Kim N.-H. *Introduction to nonlinear finite element analysis*. Springer Science & Business Media, 2014.