

# A mintavételezés hatása a mechatronikai rendszerek rezgési tulajdonságaira

## Effect of sampling on the vibration characteristics of mechatronic systems

NAGY Vanda Orsolya<sup>1</sup> hallgató, Dr. BUDAI Csaba<sup>1</sup> egyetemi docens

<sup>1</sup>Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, 1111 Budapest, Műegyetem rakpart 3.

### Abstract

*Sampling has a significant effect on the stability of mechatronic systems and the characteristics of the resulting vibrations. The present paper investigates these vibrations, through the discrete-time state feedback position control task of a one-degree-of-freedom device. The aim is to map the different characteristics and the possible ranges of the parameters describing them. The results can be used, for example in haptic systems where the position or trajectory to be realised depends on the properties of the virtual environment.*

**Keywords:** sampled-data system, discrete-time control, position control, multi-frequency vibrations, state feedback control

### Kivonat

*A mintavételezés jelentősen befolyásolja a mechatronikai rendszerek stabilitását és a kialakuló rezgések tulajdonságait. Jelen tanulmány egy egy szabadsági fokú eszköz diszkrét idejű állapot-visszacsatoláson alapuló pozíciószabályozási feladatán keresztül vizsgálja ezeket. A cél a különböző karakterisztikák és az ezeket leíró paraméterek lehetséges tartományainak feltérképezése. Az eredmények hasznosíthatóak például haptikus rendszerekben, ahol a megvalósítandó pozíció vagy pálya a virtuális környezet tulajdonságaitól függ.*

**Kulcsszavak:** mintavételes rendszer, diszkrét idejű szabályozás, pozíciószabályozás, többfrekvenciás rezgések, állapot-visszacsatoláson alapuló szabályozás

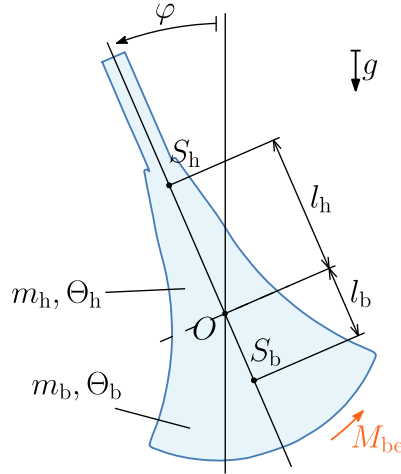
## 1. BEVEZETÉS

Napjainkban a szabályozási feladatok szinte kizárólag valamilyen digitális eszköz felhasználásával kerülnek megvalósításra. Így az eredő, szabályozott rendszer viselkedését is befolyásolja a megvalósított szabályozó diszkrét idejű működése. Érdemes megvizsgálni, hogy ennek hatására milyen lengésképek alakulhatnak ki, a szabályozási paramétereknek megfelelően. Állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozás esetében a rendszer viselkedését leíró pólusok megválaszthatóak, így befolyásolva a rendszer választ. Ennek megfelelően vizsgálható, hogy a létrejövő rezgések milyen tulajdonságokkal rendelkeznek, azaz milyen csillapítatlan körfrekvencia – relatív csillapítás pár vagy, többfrekvenciás rezgésen esetén, párok írják le. Mindez többek között akkor használható fel, ha például haptikus rendszerek esetén a cél az, hogy egy adott pálya, pozíció valósuljon meg. Leggyakrabban ezekben az esetekben a feladat, hogy a valós környezet mintájára létrehozott virtuális környezet tulajdonságainak megfelelően történjen az adott pozícióba jutás, tehát a megfelelő pálya legyen megvalósítva. Ebben jelenthet segítséget a válasz és a szabályozási paraméterek kapcsolatának ismerete.

A tanulmány során először bemutatásra kerül az egy szabadsági fokú eszközt leíró modell, majd a tervezett állapotvisszacsatoláson alapuló szabályozás. Ezek után a rendszer stabilitásának vizsgálata következik, majd a rendszer viselkedését megadó póluspárok és azok kapcsolatának további vizsgálata és a stabil tartomány ezek mentén történő felosztása. Végül a felosztott stabil tartomány egyes zónáira jellemző rezgések részletesebb vizsgálata következik, mely során ezeket a rezgéseket leíró paraméterpárok viszonyai és értékeik lehetséges tartományai kerülnek meghatározásra.

## 2. A VIZSGÁLT, EGY SZABADSÁGI FOKÚ ESZKÖZ MODELLJE

Jelen tanulmány középpontjában egy haptikus interakcióra is alkalmas berendezés áll, amelyet a Stanford Egyetem nyílt hozzáférésű Hapkit eszköze ihletett [1]. A vizsgált eszköz szerkezeti vázlata az [1. ábrán](#) látható, amely egy két részből álló (handler és body) inverz ingaként modellezhető, így a modellezés során célszerű a forgáspontja mentén két részre bontani.



1. ábra. Az eszköz modellezése

A vizsgált eszköz bemenetének a rá ható  $M_{be}$  nyomaték tekinthető, továbbá a rendszer leírásához választott állapotváltozók a  $\varphi(t)$  szögelfordulás, illetve a  $\dot{\varphi}(t)$  szögsebesség. Így a rendszer folytonos idejű

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

állapotegyenlete az alábbi alakban írható fel

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{M_{be}(t)}_{\mathbf{u}(t)}, \quad (2)$$

ahol  $K$  az inga merevségét és  $J$  pedig az inga tehetetlenségi nyomatékát jelöli, amelyek az alábbi összefüggések szerint határozhatóak meg,

$$J = \theta_h + \theta_b + m_h l_h^2 + m_b l_b^2, \quad (3)$$

$$K = (m_b l_b - m_h l_h)g, \quad (4)$$

ahol  $\theta_h$  és  $\theta_b$  a felső (handler) és az alsó (body) részek tehetetlenségi nyomatékai,  $m_h$  és  $m_b$  a két rész tömegei,  $l_h$  és  $l_b$  a súlypontok ( $S_h$  és  $S_b$ )  $O$  forgásponttól vett távolságai, illetve  $g$  a nehézségi gyorsulás. A rendszer kimenetét az inga függőleges tengellyel bezárt szöge adja.

## 3. DISZKRÉT IDEJŰ ÁLLAPOTVISSZACSATOLÁSON ALAPULÓ SZABÁLYOZÁS TERVEZÉSE ÉS VIZSGÁLATA

A következőkben bemutatásra kerül az állapotviszacsatoláson alapuló diszkrét idejű szabályozás tervezése. A szabályozás megvalósítása napjainkban valamilyen digitális eszközön keresztül megy végbe, tehát a beavatkozás mértéke csak az adott időközönként mintavételezett jelek alapján és csak ezekben az időpillanatokban változhat meg. Ebből adódóan a szabályozási paraméterek jóval kisebb tartományból választhatóak, mint folytonos idejű szabályozás esetén. Ennek megfelelően a vizsgált, diszkrét idejű rendszer stabilitásvizsgálatát célszerű elvégezni.

### 3.1. Mintavételes szabályozás tervezése a folytonos idejű szabályozott szakazhoz

Ahhoz, hogy a szabályozást meg lehessen valósítani, a rendszernek állapotirányíthatónak kell lennie. Ezt a Kálmán-féle rangfeltétel [2] segítségével lehet megállapítani, amely alapján egy rendszer akkor

irányítható, ha az  $\mathbf{M}_c$  irányíthatósági mátrix rangja megegyezik az  $n$  állapotváltozó számával. A vizsgált rendszer teljesíti a feltételt, tehát irányítható. Ezt követően megválasztható a szabályozási törvény, amely jelen tanulmány során az állapotviszacsatoláson alapuló szabályozás [2], amely esetében a szabályozási törvénynek megfelelően a rendszer bemenete

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_r \mathbf{r}(t) - \mathbf{K} \mathbf{x}(t), \quad (6)$$

ahol  $\mathbf{K}$  a visszacsatolási mátrix,  $\mathbf{K}_r$  a statikus alapjelkompenzációt megvalósító mátrix.

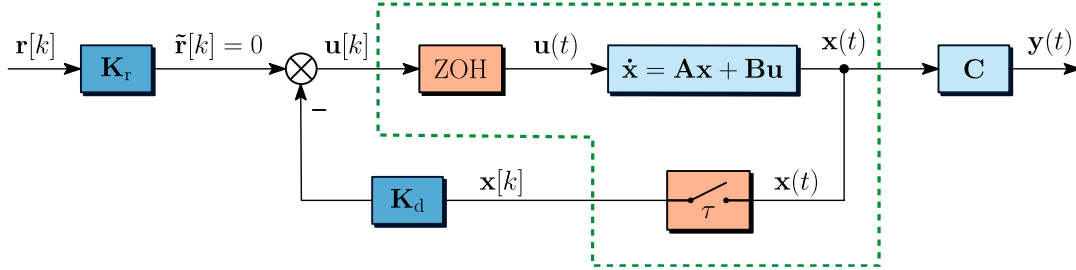
A szabályozási törvény valamilyen digitális eszközön keresztül kerül megvalósításra, így maga a beavatkozó jel diszkrét idejű, ahogy azt a 2. ábra is szemlélteti, így egy nulladrendű tartóra (ZOH – zero order hold) van szükség, mely úgy teszi folytonossá a jelet, hogy az adott mintavételezési pillanatbeli értékét megtartja a következő mintavételezési pillanatig [3]. Illetve az állapotok visszacsatolásához mintavételezésre van szükség, mivel maga a szabályozás diszkrét időben valósul meg. A 2. ábrán zölddel bekeretezett részt diszkrétizálva megkapható a diszkrét idejű állapottermodell, az állapotegyenlet ekkor

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{A}_d \mathbf{x}[k] + \mathbf{B}_d \mathbf{u}[k] \quad (7)$$

alakban írható fel, ahol

$$\mathbf{A}_d = e^{\tau \mathbf{A}}, \quad \mathbf{B}_d = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}_d - \mathbf{I})\mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C} = [1 \ 0] \quad (8)$$

és  $\tau$  a mintavételezési idő. Az irányíthatósági mátrix ebben az esetben is felírható  $\mathbf{A}_d$  és  $\mathbf{B}_d$  segítségével. Így létrehozható a diszkrét idejű állapotviszacsatolás.



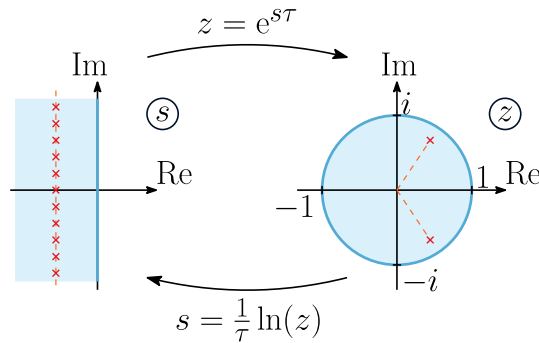
2. ábra. A mintavételezett szabályozási kör

### 3.2. Mintavételes rendszer stabilitásvizsgálata

Folytonos idejű, LTI rendszerek esetén a rendszer stabilitása a rendszer pólusainak vizsgálata alapján állapítható meg, amelyeket az alábbi

$$p(s) := \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (8)$$

ún. karakterisztikus egyenlet megoldásaiként lehet meghatározni. Ebből következik, hogy a pólusok a rendszermátrix sajátértékei lesznek. Folytonos időben a rendszer akkor lesz aszimptotikusan stabilis, ha a pólusok valós része a negatív félsíkon helyezkedik el.

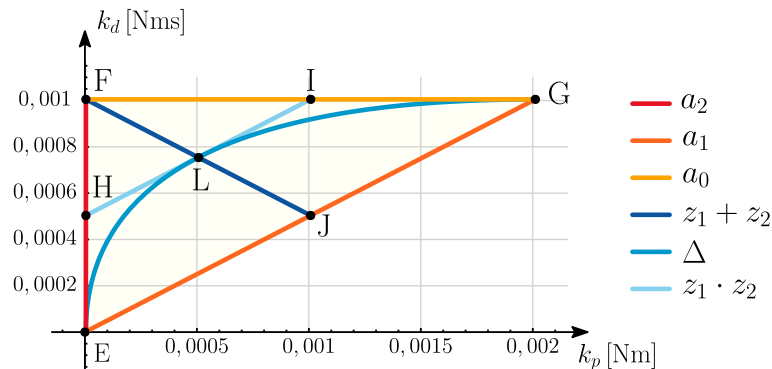


3. ábra. Stabil pólusok tartománya folytonos, illetve diszkrét LTI rendszerek esetén

Mivel a szabályozás diszkrét időben került megvalósításra a stabilitást is érdemes diszkrét időben vizsgálni. Ebben az esetben az  $s_i$  pólusok az exponenciális függvénynek megfelelően a  $z$  tartományban  $z_i = e^{s_i \tau}$  pólusoknak felelnek meg. A leképezésből adódik, hogy a diszkrét idejű LTI rendszer akkor stabil, ha a pólusok a komplex egységkörön belül helyezkednek el [4], ahogy azt a 3. ábra mutatja.

A rendszer stabilitási tulajdonsága a pólusok konkrét ismerete nélkül is meghatározható, az ún. Routh-Hurwitz kritérium segítségével [5]. A kritérium segítségével azonban a pólusok valós részének előjele vizsgálható, tehát a  $|z_i| < 1$  feltétel nem. A kritérium alkalmazásához Möbius transzformációt [6] kell végezni a  $p(z)$  karakterisztikus polinomra. A kritérium alapján három határolóegyenes adódik, melyek meghatározzák a stabil tartományt.

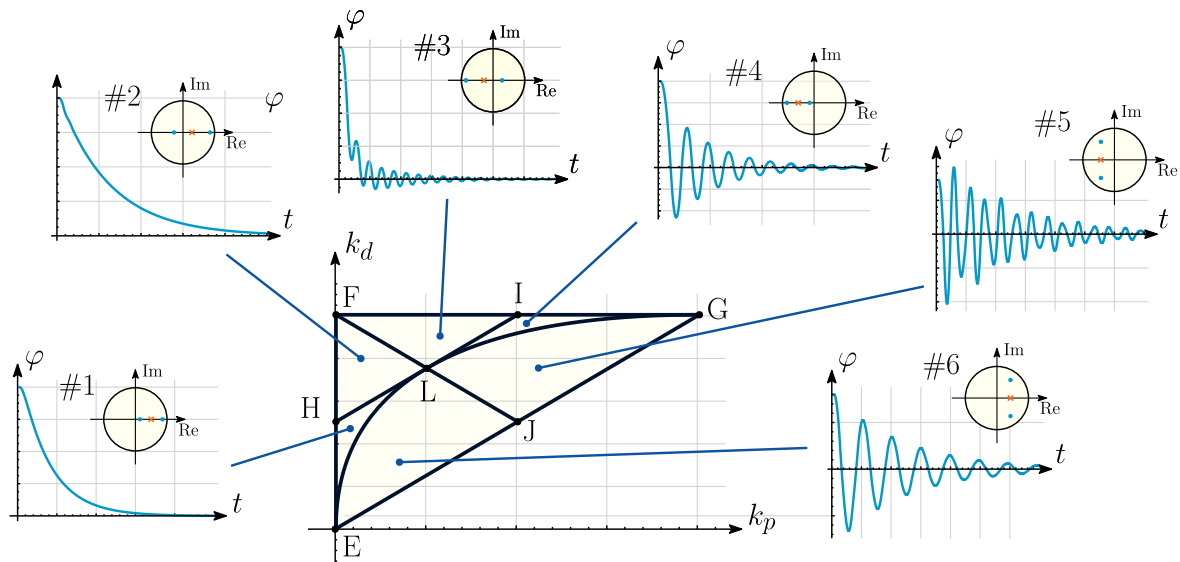
A stabil tartományon belül tovább vizsgálhatóak a pólusok, legyen szó ezek egymással való kapcsolatáról, illetve arról, hogy valós vagy komplex számok-e. A karakterisztikus polinomra felírhatóak a Viete-formulák, ezzel vizsgálva a gyökök kapcsolatát, illetve a diszkrimináns ( $\Delta$ ) vizsgálatával a komplex konjugált gyökpárok is elkülöníthetőek. Azt lehet tapasztalni, hogy a szabályozási paraméterek ( $\mathbf{K} = [k_p \ k_d]$ ) függvényében a stabil tartományt hat további zónára lehet felosztani, ez látható az 4. ábrán.



4. ábra. Stabilitástérkép,  $\tau = 1$  [s] mellett

## 4. MINTAVÉTELES RENDSZER REZGÉSI TULAJDONSÁGAINAK VIZSGÁLATA

Az előző fejezetben bemutatásra került a stabil tartomány részegységekre bontása, annak megfelelően, hogy milyen típusú a pólusok jellemzik az adott tartományrészt. A pólusok ugyanis erősen befolyásolják a lengésképet, így meghatározzák a beállási karakterisztikát [7]. Az egyes tartományokra jellemző lengésképeket, illetve a hozzájuk tartozó póluspárokat az 5. ábra szemlélteti.



5. ábra. Póluspárok csoportosítása a stabil altartományokhoz megfelelően

### 4.1. Lengésképeket leíró paraméterek

A kialakuló lengésképek alapvetően két paraméterrel jellemezhetőek, ezek a csillapítatlan sajátkörfrekvencia ( $\omega_n$ ) és a relatív csillapítási tényező ( $\zeta$ ). Ahhoz, hogy ezeket meg lehessen határozni, első lépésben a diszkrét idejű pólusokat át kell transzformálni folytonos időbe az

$$s = \frac{1}{\tau} [\ln(\rho) + \vartheta i] \quad (9)$$

egyenlet segítségével. A folytonos idejű pólusok felírhatóak az alábbi alakban

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} i. \quad (10)$$

Amennyiben az adott zónabeli folytonos idejű pólusok ismertek a diszkrét idejű pólusok nagyságának ( $\rho$ ) és fázisszögének ( $\vartheta$ ) függvényében, akkor a rezgést leíró paraméterek is kifejezhetők ezek által. Mivel a diszkrét pólusok a szabályozási paramétereiktől függenek, így az  $\omega_n - \zeta$  értékeket is meghatározzák.

#### 4.2. Komplex rezgést megvalósító tartományok további elemzése

Ahogy az [5. ábrán](#) is látható, az #5, illetve #6-os zónákban a pólusok már komplex konjugált gyökpárok lesznek, a megvalósított válasz valamilyen rezgő beállítás, sőt az #5-ös tartomány esetében az is látható, hogy valamilyen többfrekvenciás rezgés alakul ki. Továbbá a #4-es zóna esetében is rezgő válasz látható, annak ellenére, hogy a diszkrét idejű gyökök valósak. Ezeket a tartományokat érdemes részletesebben megvizsgálni.

A #4-es tartományon a pólusok negatív valós számok. Folytonos időben a domináns pólusok [\[7\]](#)

$$s_{1,2} = \ln(\rho_1) \pm \pi i \quad \text{és} \quad s_{3,4} = \ln(\rho_2) \pm \pi i \quad (11)$$

alakban írhatóak fel. Mivel  $\vartheta = \pi$ , így a csillapított sajátkörfrekvencia ( $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ) állandó, ebből következik, hogy a rezgést leíró  $\omega_n - \zeta$  párok egy adott görbe mentén helyezkednek el, amin

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (12)$$

A #6-os tartomány esetében a pólusok komplex konjugált gyökpárt alkotnak és valós részük pozitív, így folytonos időben

$$s_{1,2} = \ln(\rho) \pm \vartheta i \quad (13)$$

gyökök adódnak, ahol  $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$  [\[7\]](#). Ez alapján a rezgést leíró paraméterek

$$\omega_n = \sqrt{\ln^2(\rho) + \vartheta^2} \quad \text{és} \quad \zeta = -\frac{\ln(\rho)}{\omega_n} \quad (14)$$

értékpárok lesznek. Látható, hogy ebben az esetben is függenek egymástól az értékek, de nem egy egyenes mentén, hanem egy tartományon belül helyezkednek el.

Végül az #5-ös tartomány vizsgálata következik, ahol komplex gyökök jelennek meg, melyek valós része negatív. A folytonos idejű, domináns pólusok ekkor [\[7\]](#)

$$s_{1,2} = \ln(\rho) \pm \vartheta i \quad \text{és} \quad s_{3,4} = \ln(\rho) \pm (2\pi - \vartheta)i, \quad (15)$$

ahol  $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi$ . A #6-os tartományhoz hasonlóan az

$$\begin{aligned} \omega_{n,1} &= \sqrt{\ln^2(\rho) + \vartheta^2} \quad \text{és} \quad \zeta_1 = -\frac{\ln(\rho)}{\omega_{n,1}} \\ \omega_{n,2} &= \sqrt{\ln^2(\rho) + (2\pi - \vartheta)^2} \quad \text{és} \quad \zeta_2 = -\frac{\ln(\rho)}{\omega_{n,2}} \end{aligned} \quad (16)$$

párok egymástól függenek, egy tartományon belül helyezkednek el. A különbség, hogy a két pár domináns pólus miatt, a rezgés többfrekvenciás, összetett rezgés, így több paraméterrel írható le. Érdemes megvizsgálni a paramétertartomány határait is. Magát a tartományt az  $a_1 = 0$ ,  $z_1 + z_2 = 0$  egyenesek és a  $\Delta = 0$  görbe határolja. Ezek közül, az  $a_1 = 0$  egyenes a stabil tartomány határa, a gyökök nagysága,  $\rho = 1$  lesz. Ebből adódik, hogy

$$\omega_{n,1} = \vartheta, \quad \omega_{n,2} = 2\pi - \vartheta \quad \text{és} \quad \zeta_1 = \zeta_2 = 0. \quad (17)$$

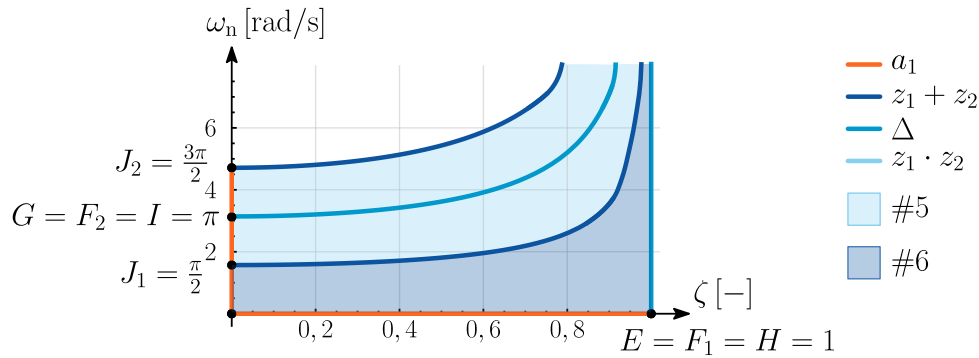
Mivel a pólusok komplex konjugált gyökpárok, így az összegük abban az esetben lehet zérus, ha a valós részük zérus. Ez akkor valósul meg ha  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ . Ebből következik, hogy ezekben az esetekben a csillapított sajátkörfrekvencia állandó, két görbét lehet meghatározni

$$\omega_{n,1} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \quad \text{és} \quad \omega_{n,2} = \frac{3\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta_2^2}}. \quad (18)$$

Végül a valós és komplex gyököket elválasztó  $\Delta = 0$  görbét lehet megvizsgálni. Ezen görbe mentén a polinom diszkriminánsa zérus, így a gyökök valósak és egymással megegyezők. Ekkor a #4-es tartományhoz hasonlóan  $\vartheta = \pi$ , így

$$\omega_{n,1} = \omega_{n,2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta_1^2}} \quad (19)$$

görbe adódik, ami megegyezik azzal a görbével, melyen a #4-es tartomány paraméterpárjai helyezkednek el. A vizsgált zónákból létrehozható rezgéseket leíró  $\omega_n - \zeta$  értékek tartományai a 6. ábrán láthatóak.



6. ábra.  $\omega_n - \zeta$  értékpárok tartományai

## 5. KONKLÚZIÓ

Az fentiekben bemutatásra került egy egy szabadsági fokú eszköz modellje, majd ehhez állapotviszacsatoláson alapuló, diszkrét idejű szabályozás tervezése. Az elvégzett stabilitásvizsgálat alapján meghatározásra került a szabályozási paraméterek függvényében a rendszert jellemző stabil tartomány. Mivel a rendszer válasza a szabályozáson keresztül meghatározott karakterisztikus polinom pólusaitól függ, így érdemes vizsgálni ezen pólusok tulajdonságait, egymáshoz képesti viszonyukat. A pólusok tulajdonságai mentén hat zónára osztható a stabil tartomány, amelyből bemutatásra kerültek azon térrészek, amelyek folytonos időben komplex konjugált gyökpárral leírható, rezgő választ okoznak, legyenek diszkrét idejű pólusok valósak vagy komplex konjugált gyökpár, illetve gyökpárok.

A vizsgálatok alapján megállapítható, hogy bár a különböző zónákból megvalósíthatóak különböző karakterisztikával rendelkező rezgések, de csak egy adott tartományon belül (vagy akár egy görbén) eső  $\omega_n - \zeta$  párok hozhatóak létre. Ezek a tartományok pedig egymástól elkülönülnek, a határok egyértelműen megadhatóak. Ez valamelyest korlátozza a létrehozható rezgéseket, azonban az látható, hogy egy egy szabadsági fokú eszköz diszkrét idejű szabályozása által is kialakíthatóak komplex lengésképek.

## IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] \*\*\*, History of the haptic padde. hapkit, <https://hapkit.stanford.edu/about.html> (Utolsó letöltés: 2025.02.26.)
- [2] Lantos B., *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I.*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2016.
- [3] S. Palani, *Sampling*. Springer International Publishing, 2021, p. 1057–1070.
- [4] Bokor J., Gáspár P., Szabó Z., *Irányításelmélet*, BME MOGI, Budapest, 2014
- [5] F. R. Gantmacher, *Lectures in Analytical Mechanics*, Moscow, Mir Publishers, 1975
- [6] H. Giuseppe, R. Giuseppe, Stépán G., *Stability and bifurcation analysis of robots subject to digital position control*. In Proceedings of ENOC 2011 Rome, Italy
- [7] Budai C., *Vibrations in single-degrees-of-freedom sampled-data linear mechanical systems*, Periodica Polytechnica Mechanical Engineering, 2022, vol. 66, no. 1, p. 90–98