

A Mathieu-egyenlet vizsgálata Carleman-linearizációval

Investigation of the Mathieu equation via Carleman linearization

HUBAY Csanád Árpád, KALMÁR-NAGY Tamás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Áramlástan Tanszék

H-1111 Budapest, Bertalan Lajos u. 4-6. Telefon: +36-1-463-4072, Fax: +36-1-463-3464

Honlap: www.ara.bme.hu, E-mail: hubay.csanad@gpk.bme.hu, kalmar.nagy.tamas@gpk.bme.hu

Abstract

The Mathieu equation is a linear differential equation with a periodic coefficient, playing an important role in the stability analysis of parametrically excited systems. Using the Cauchy transformation, the Mathieu equation can be rewritten as a nonlinear system of differential equations, to which we apply Carleman-linearization. However, due to the neglect of higher-order nonlinear terms, the solution of the Carleman-linearized system does not provide sufficiently accurate results over a broader time interval. To address this, we propose a new method that incorporates a nonlinear mapping to improve the solution of the linearized differential equation system obtained through Carleman-linearization. The results obtained using the latter approach show significant improvements.

Keywords: Mathieu equation, Carleman-linearization, nonlinear mapping

Kivonat

A Mathieu-egyenlet egy periodikus együtthatójú lineáris differenciálegyenlet, mely fontos szerepet játszik a parametrikusan gerjesztett rendszerek stabilitásának vizsgálatában. A Mathieu-egyenlet Cauchy-átírással átalakítható egy nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerre, amelyre a Carleman-linearizációt alkalmazzuk. A Carleman-linearizált rendszer megoldása a magasabb rendű nemlineáris tagok elhanyagolása miatt nem ad megfelelően pontos megoldást tágabb időintervallumon, ezért egy nemlineáris leképezést felhasználva új módszert javasolunk a Carleman-linearizációval kapott lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldására. Az így kapott eredmények jelentős javulást mutatnak.

Kulcsszavak: Mathieu-egyenlet, Carleman-linearizáció, nemlineáris leképezés

1. BEVEZETÉS

A Mathieu-egyenlet egy periodikus együtthatójú lineáris differenciálegyenlet. A differenciálegyenlet megoldásai a Mathieu-függvények, melyeket elsőként Émile Léonard Mathieu fedezett fel 1868-ban [1], amikor (dob) membránok rezgéseivel foglalkozott elliptikus koordináta-rendszerben. Azóta Mathieu-egyenletet alkalmazták parametrikusan gerjesztett mechanikai rendszerek leírására, valamint használatos a hullámterjedés és kvantummechanika területén is [2].

A Mathieu-egyenlet kiválóan bemutatja, hogy egy lineáris differenciálegyenlet stabilitása jelentősen függhet az időfüggő együtthatójú paraméterektől, különösen akkor ha az együtthatók periodikusan változnak. Legismertebb gyakorlati példa a periodikusan változó felfüggesztési ponttal rendelkező inga stabilitásának elemzése a paraméterek függvényében [2].

A Mathieu-egyenlet a Cauchy-átírást felhasználva átalakítható egy nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerre a periodikus együttható miatt. Általában a nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerek elemzése és zárt alakú megoldása nem egyszerű feladat. Ezekben az esetekben lehetséges közelítő megoldást eredményező módszerek használata, mint például a Carleman-linearizáció.

A Carleman-linearizációt Torsten Carleman dolgozta ki 1932-ben [3]. A Carleman-linearizáció során a nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer egy magasabb rendű (több egyenletről álló) lineáris differenciálegyenlet-rendszerbe ágyazható be. Ennek eredményeként a nemlineáris differenciálegyenletek megoldása zárt alakban közelíthető. Fontos azonban megjegyeznünk, hogy a magasabb rendű nemlineáris tagok elhanyagolása miatt a Carleman-linearizált rendszerből számított közelítés egy hosszabb időintervallumon egyre pontatlanabbá

válhat [4]. Ezt a problémát próbáljuk kiküszöbölni ebben a tanulmányban bevezetett, ún. projektív Carleman-linearizáció segítségével.

A konferenciacikk célja tehát, hogy bemutassa a Mathieu-egyenlet Carleman-linearizációval történő vizsgálatát, valamint egy új, továbbfejlesztett megoldási módszert, a projektív Carleman-linearizációt. Ehhez a következő fejezetben lefektetjük a szükséges matematikai alapokat. Ezután elvégezzük a Mathieu-egyenlet Carleman-linearizációját és megvizsgáljuk a Carleman-linearizált rendszer adta közelítő megoldásokat. Javaslatot teszünk a Carleman-linearizált rendszer megoldási módjára a közelítő megoldások javítása érdekében. Összefoglaljuk az eredményeket.

2. SZÜKSÉGES MATEMATIKAI ALAPOK

Az alábbiakban bevezetünk néhány matematikai jelölést és definíciót, mely segíti a Carleman-linearizáció megértését a következőekben.

Legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ és $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ az $y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)$ változók kitevői két tetszőleges, de különböző esetben. Ekkor két tetszőleges monom m_1 és m_2 az alábbi alakban írható fel:

$$m_1 = y_1^{\alpha_1}(t) y_2^{\alpha_2}(t) y_3^{\alpha_3}(t) y_4^{\alpha_4}(t), \quad (1)$$

$$m_2 = y_1^{\beta_1}(t) y_2^{\beta_2}(t) y_3^{\beta_3}(t) y_4^{\beta_4}(t). \quad (2)$$

Az m_1 és m_2 monomok foka definíció szerint:

$$|m_1| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \quad (3)$$

$$|m_2| = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4. \quad (4)$$

Figyelembe véve az egy változóból álló monomok hagyományos sorrendjét, azaz:

$$y_1(t) > y_2(t) > y_3(t) > y_4(t), \quad (5)$$

az $y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)$ változókból álló m_1 és m_2 monomok *fokozatos lexiografikus sorrendbe* állíthatóak a következőképpen:

$$m_1 \succ m_2, \text{ ha } |m_1| < |m_2|, \quad (6)$$

vagy:

$$m_1 \succ m_2, \text{ ha } |m_1| = |m_2| \text{ és } \alpha_j < \beta_j \text{ úgy, hogy } j = \min \{i \mid i = 1, 2, 3, 4; \alpha_i \neq \beta_i\}, \quad (7)$$

azaz az m_1 monom előrébb áll a sorrendben, mint az m_2 monom.

Az $y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)$ változók által N -ed rendig felírható monomok halmaza a következő:

$$\mathcal{M}(N) = \left\{ y_1^{\alpha_1}(t) y_2^{\alpha_2}(t) y_3^{\alpha_3}(t) y_4^{\alpha_4}(t) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{Z}_0^+, \sum_{i=1}^4 \alpha_i = k, k = 1, \dots, N \right\}, \quad (8)$$

ahol felhasználjuk az $k = 1, \dots, N$ egész szám kiterjesztett partícióját. Egy egész szám kiterjesztett partíciójában a tagok egyenlőek lehetnek nullával (de legalább egy tag nem nulla), valamint számít a tagok sorrendje. Tehát a tagok permutációját vesszük figyelembe.

Az $\mathcal{M}(N)$ halmaz s számossága:

$$s = \#\mathcal{M}(N) = \binom{N+4}{4} - 1, \quad (N > 0). \quad (9)$$

Az előzőek felhasználásával bevezetünk egy, a későbbiekben használt, nemlineáris leképezést is. Legyen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$ egy négyelemű vektor. Ekkor a nemlineáris leképezés $\mathcal{P}(\xi) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^s$, amely N -rendig megadja a ξ vektor elemeiből alkotott monomokat, a következőképpen írható fel:

$$\mathcal{P}(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ -\frac{\xi_4^2}{\xi_1^2} \\ \xi_1 \xi_2 \\ \vdots \\ -\frac{\xi_4^2}{\xi_1^2} \\ \vdots \\ \xi_3 \xi_4^{N-1} \\ \xi_4^N \end{pmatrix}. \quad (10)$$

3. A MATHIEU-EGYENLET CARLEMAN-LINEARIZÁCIÓJA

Tekintsük az ún. Mathieu-egyenletet, melynek alakja:

$$x''(t) + (\delta + \varepsilon \cos(t))x(t) = 0, \quad \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

és a kezdeti feltételek legyenek:

$$x'(t_0) = h, \quad x(t_0) = 0. \quad (12)$$

A továbbiakban megvizsgáljuk a Mathieu-egyenlet megoldását az ún. Carleman-linearizáció [3] felhasználásával. Ehhez elsőként bevezetjük az $y_1(t) := x(t)$, $y_2(t) := x'(t)$, $y_3(t) := \cos(t)$ és $y_4(t) := -\sin(t)$ jelöléseket, ekkor a (11)-es egyenlet átírható a következő alakra:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= -\delta y_1(t) - \varepsilon y_1(t)y_3(t), \\ y_3'(t) &= y_4(t), \\ y_4'(t) &= -y_3(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Ebben a lépésben lényegében átirtuk a (11)-es Mathieu-egyenletet egy nemlineáris differenciálegyenlet-rendszerre. A (13)-as nemlineáris differenciálegyenlet-rendszeren alkalmazni tudjuk a Carleman-linearizációt, melynek segítségével a nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert egy magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerre írjuk át.

Jelölje $z_i(t)$ az $y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)$ változók i -edik monomját a fokozatos lexiografikus sorrend szerint, ekkor az $y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)$ változók legfeljebb N -ed rendű monomjait tartalmazó monomvektor:

$$\mathbf{z}_N(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_s(t)), \quad (14)$$

ahol

$$z_i(t) \in \mathcal{M}(N) \text{ és } z_{i+1}(t) \in \mathcal{M}(N) \text{ úgy, hogy } z_i(t) \succ z_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, \dots, s-1. \quad (15)$$

Vegyük a $\mathbf{z}_N(t)$ monomvektor idő szerinti deriváltját és helyettesítsük be a (13)-as egyenletek jobb oldalát, ekkor a (11)-es Mathieu-egyenlet N -ed rendű Carleman-linearizáltja a következőképpen írható fel:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ \vdots \\ y_1^2(t) \\ y_1(t)y_2(t) \\ \vdots \\ y_4^2(t) \\ \vdots \\ y_3(t)y_4^{N-1}(t) \\ y_4^N(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}'_N(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} & \dots & \mathbf{A}_{1,N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{2,2} & \dots & \mathbf{A}_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{N,N} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_N} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ \vdots \\ y_1^2(t) \\ y_1(t)y_2(t) \\ \vdots \\ y_4^2(t) \\ \vdots \\ y_3(t)y_4^{N-1}(t) \\ y_4^N(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}_N(t)}, \quad (16)$$

ahol az $\mathbf{A}_{j,k}$ ($j, k = 1, \dots, N$) mátrixok tartalmazzák a k -ad rendű monomok együtthatóit a j -ed rendű monomok differenciálegyenleteihez tartozóan. A $\mathbf{C}_N$ mátrix pedig az ún. Carleman mátrix.

A Carleman mátrix elemeinek szemléltetésére vegyük a (11)-es Mathieu-egyenlet másodrendű ($N = 2$) Carleman-linearizáltját, ami a következő alakú:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_1^2(t) \\ y_1(t)y_2(t) \\ y_1(t)y_3(t) \\ y_1(t)y_4(t) \\ y_2^2(t) \\ y_2(t)y_3(t) \\ y_2(t)y_4(t) \\ y_3^2(t) \\ y_3(t)y_4(t) \\ y_4^2(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}'_2(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_2} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \\ y_1^2(t) \\ y_1(t)y_2(t) \\ y_1(t)y_3(t) \\ y_1(t)y_4(t) \\ y_2^2(t) \\ y_2(t)y_3(t) \\ y_2(t)y_4(t) \\ y_3^2(t) \\ y_3(t)y_4(t) \\ y_4^2(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}_2(t)}. \quad (17)$$

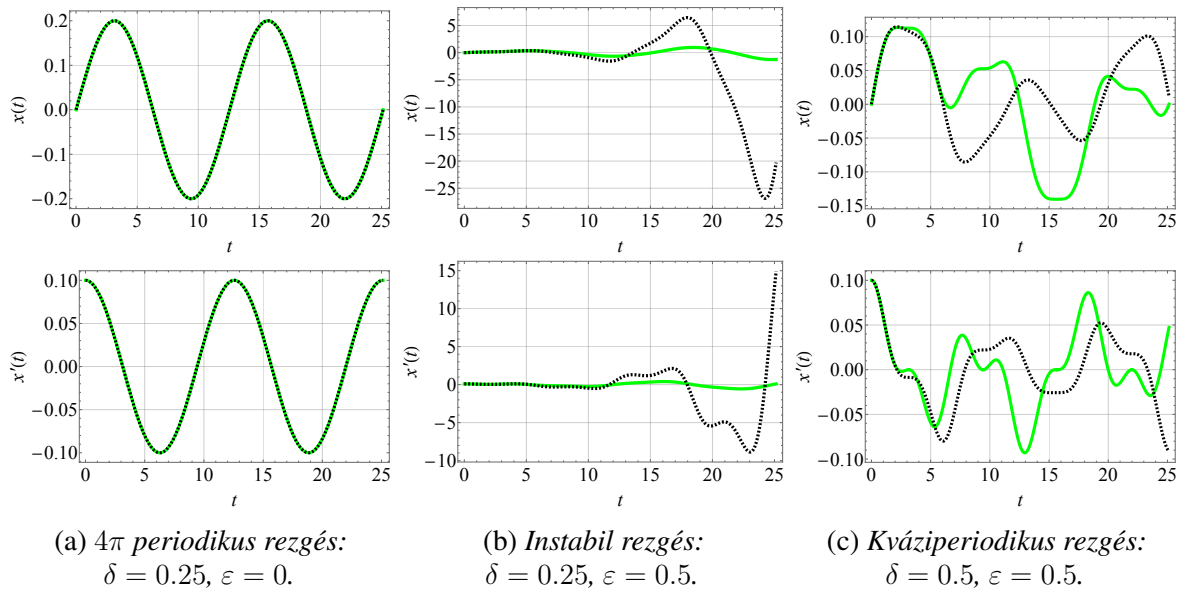
A (17)-es egyenlet megoldása megadható a következő alakban:

$$\mathbf{z}_2(t) = e^{\mathbf{C}_N t} \mathbf{z}_2(t_0), \quad (18)$$

ahol a kezdeti feltételek vektora:

$$\mathbf{z}_2(t_0) = (0, h, 1, 0, 0, 0, 0, h^2, h, 0, 1, 0, 0)^T. \quad (19)$$

Az 1. ábra mutatja a (11)-es Mathieu-egyenlet (fekete, szaggatott) és a (17)-es Carleman-linearizált egyenlet (zöld) megoldását $h = 0.1$ kezdeti feltétel és különböző δ, ε paraméterek esetén $t \in [0, 8\pi]$ időintervallumon. Jól látható, hogy a Carleman-linearizáció csak abban az esetben ad jó közelítő megoldást a (11)-es Mathieu-egyenletre a teljes időintervallumon, amikor $\varepsilon = 0$. Az $\varepsilon > 0$ paraméterértékekre a (17)-es Carleman-linearizált egyenlet $t_{appr.} = \pi$ ideig ad elfogadható közelítést a (11)-es Mathieu-egyenletre. Megjegyezzük, hogy $\varepsilon = 0$ esetében nincsen nemlineáris tag az átírt (13)-as egyenletekben, azonban $\varepsilon > 0$ esetében már igen. Könnyen belátható, hogy az $\varepsilon > 0$ esetben a (17)-es másodrendű Carleman-linearizált felírásakor a másodrendűnél magasabb rendű monomok elhanyagolásra kerülnek, ami a pontatlan megoldást okozza $t > t_{appr.}$ esetén.



1. ábra. A (11)-es Mathieu-egyenlet (fekete, szaggatott) és a (17)-es Carleman-linearizált egyenlet megoldásának (zöld) összehasonlítása $h = 0.1$ kezdeti feltételnél, különböző δ, ε paraméterek esetén $t \in [0, 8\pi]$ időintervallumon.

A Carleman-linearizáció $N \rightarrow \infty$ esetén az eredeti nemlineáris differenciálegyenlet való megoldásával ekvivalens megoldást ad [4]. A hipotézisünk, hogy az eredeti nemlineáris differenciálegyenlet megoldásgörbéje egy levetülése a Carleman-linearizációval, $N \rightarrow \infty$ esetén kapott végtelen dimenziós megoldásgörbének. Azonban amikor N véges, a Carleman-linearizált rendszer megoldásként egy s dimenziós időbeli megoldásgörbét kapunk, melyben az N -nél magasabb rendű monomok (nemlineáris tagok) hatását nem tudjuk figyelembe venni. Így az s dimenziós görbe vetületének csak egy kis része (rövid időintervallum) esik egybe az eredeti nemlineáris differenciálegyenlet megoldásgörbéjével. A Carleman-linearizált rendszerből számított megoldásgörbe időbeli, elhanyagolt monomok okozta hibafelhalmozásának elkerülése érdekében egy nemlineáris konzisztenciafeltételt tudunk kikényszeríteni. Ehhez minden időlépésben biztosítjuk, hogy a Carleman-linearizált rendszer megoldásgörbéje megfeleljen az eredeti nemlineáris rendszer megoldásgörbéjének s dimenzióra vetítéséből származó polinomiális összefüggéseknek, azaz minden időlépésben elvégezzük a Carleman-linearizált rendszer megoldásgörbéjének nemlineáris leképezését az s dimenziós térbe.

4. PROJEKTÍV CARLEMAN-LINEARIZÁCIÓ

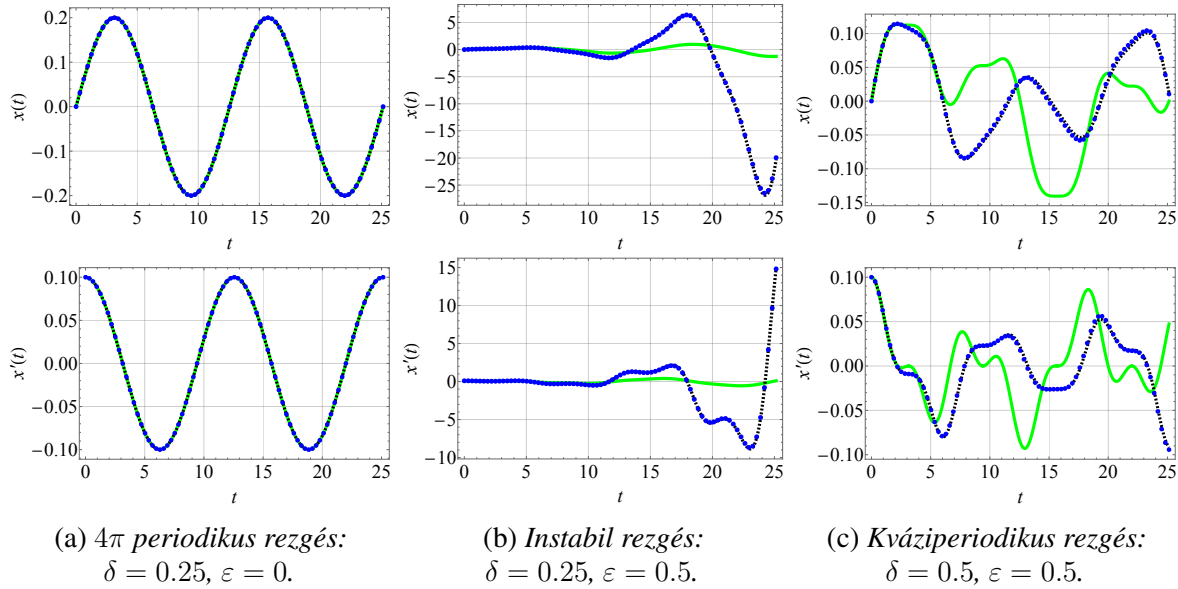
A hipotézisünk alapján tehát az a célunk, hogy általános esetben a (16)-os Carleman-linearizált egyenlet megoldása során időben minél tovább közel maradjunk a valós megoldás görbéjéhez. Ehhez legyen Δt egy időlépés, t_{max} a vizsgálni kívánt időintervallum felső határa, ezáltal $n = t_{max}/\Delta t$ az időlépések száma. Ekkor felírható a (16)-os egyenlet ún. projektív Carleman-linearizáció általi diszkrét megoldása:

$$\mathbf{z}_N(t_i) = e^{\mathbf{C}_N \Delta t} \mathcal{P}(\mathbf{z}_N(t_{i-1})_{1:4}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (20)$$

ahol $\mathbf{z}_N(t_{i-1})_{1:4}$ jelöli a $\mathbf{z}_N(t_{i-1})$ vektor első négy elemét.

A (17)-es Carleman-linearizált egyenletet kiegészítve a (10)-es nemlineáris leképezéssel, azaz megoldva a (20)-es formában a 2. ábrán látható eredményeket kapjuk. A 2. ábrán tehát a (11)-es Mathieu-egyenlet (fekete, szaggatott), a (17)-es Carleman-linearizált egyenlet (zöld) és a (17)-es projektív Carleman-linearizáció (kék pontok) megoldások kerülnek összehasonlításra $h = 0.1$ kezdeti feltételnél, különböző δ, ε paraméterek esetén $t \in [0, 8\pi]$ időintervallumon.

A projektív Carleman-linearizáció használatával egyértelműen jobb közelítő megoldásokat kapunk, mint a normál Carleman-linearizált megoldásával. Ezek alapján a (10)-es nemlineáris leképezés használata az időlépésekben akadályozza a valós megoldásgörbétől való eltávolodást.



2. ábra. A (11)-es Mathieu-egyenlet (fekete, szaggatott), a (17)-es Carleman-linearizált egyenlet (zöld) és a (17)-es projektív Carleman-linearizáció (kék pontok) megoldásának összehasonlítása $h = 0.1$ kezdeti feltételnél, különböző δ, ε paraméterek esetén $t \in [0, 8\pi]$ időintervallumon.

A valós megoldásgörbe (fekete, szaggatott) és a két különböző Carleman-linearizáció megoldásgörbéjének (zöld - normál, kék pontok - projektív) térbeli illusztrálására szolgál a 3. ábra. Megjegyezzük, hogy a (17)-es Carleman-linearizált egyenlet (zöld) megoldása csak 2π -ig lett kirajzolva, hogy ne zavarja a másik két (valós és projektív Carleman-linearizáció) megoldásgörbék illeszkedésének vizualizációját.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

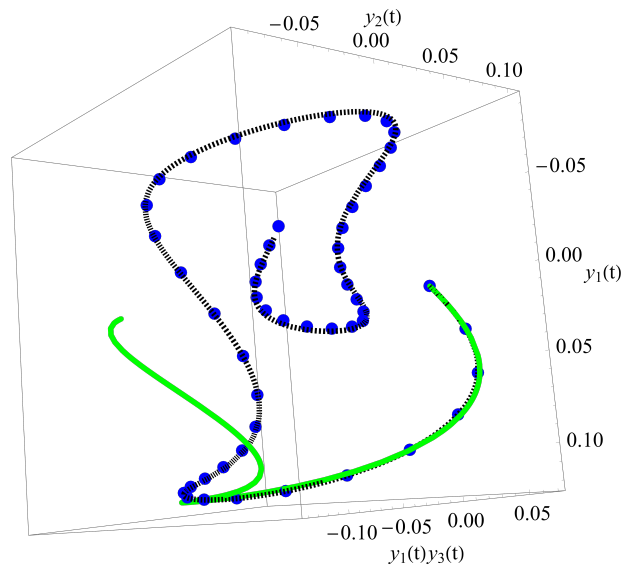
A munka keretében elvégeztük a Mathieu-egyenlet vizsgálatát a Carleman-linearizáció felhasználásával. A Mathieu-egyenlet egy periodikus együtthatóval rendelkező lineáris differenciálegyenlet, melyet Cauchy-átírást felhasználva felírtunk egy nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer alakban. A nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert közelítettük egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerrel, a Carleman-linearizáció felhasználásával. Bevezettük az ehhez szükséges matematikai alapokat és jelölésrendszert.

A Carleman-linearizált egyenletet megoldva az eredmények az mutatták, hogy a Carleman-linearizáció tágabb időintervallumon nem képes a valós megoldás megfelelő közelítésére. A Carleman-linearizáció térbeli viselkedésének elemzésével felállítottunk egy hipotézist, melyet felhasználva egy új, diszkrét módszert, az ún. projektív Carleman-linearizáció használatát javasoltuk. Az eredményekből látható, hogy a projektív Carleman-linearizáció megfelelő pontossággal tudja a valós megoldást közelíteni.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal K 137726 and K 137699 projektjének a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával, és a Kulturális és Innovációs Minisztérium, valamint a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem DKÖP-25-1-BME-54 kódszámú Doktoranduszi Kiválósági Ösztöndíj Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból, valamint a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem által nyújtott támogatása alapján valósult meg. A bemutatott kutatás a TKP-6-6/PALY-2021 számú projekt részeként a Kulturális és Innovációs

Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP2021-NVA pályázati program finanszírozásában valósult meg.



3. ábra. A (11)-es Mathieu-egyenlet (fekete, szaggatott), a (17)-es Carleman-linearizált egyenlet (zöld) és a (17)-es projektív Carleman-linearizáció (kék pontok) megoldásának összehasonlítása $h = 0.1$ kezdeti feltételnél, $\delta = 0.5$, $\varepsilon = 0.5$ paraméterek esetén $t \in [0, 5\pi]$ időintervallumon.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Arfken G. B., Weber H. J. *Mathematical methods for physicists*, 6th ed. London: Elsevier Academic, 2005.
- [2] Ruby L. *Applications of the Mathieu equation*. American Journal of Physics, 1996, 64(1), 39-44.
- [3] Carleman T. *Application de la théorie des équations intégrales linéaires aux systèmes d'équations différentielles non linéaires*. Acta Mathematica, 1932, 59, 63-87.
- [4] Forets M., Pouly A. Explicit error bounds for Carleman-linearization. arXiv preprint, 2017, arXiv:1711.02552.