

Állapot-visszacsatolással szabályozott rendszerek mintavételközi dinamikája

Intersample dynamics of systems with state-feedback control

HABA Tamás¹, BUDAI Csaba²

^{1,2}Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar,
Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
email: ¹haba@mogi.bme.hu, ²budai@mogi.bme.hu

Abstract

In a sampled-data system, a discrete-time controller regulates a continuous-time plant. Traditional discretization-based design approaches result in information loss as they usually ignore the intersample dynamics of the plant. This paper introduces a novel method for reconstructing the continuous-time output of sampled-data systems by reformulating their state-space representations into boundary value problems. The proposed method is demonstrated by simulations of numerical examples.

Keywords: intersample dynamics, sampled-data systems, state feedback, boundary value problems

Kivonat

A mintavételes rendszerekben a folytonos idejű folyamatok irányítását diszkrét idejű szabályozók végzik. A rendszer diszkrétizációján alapuló hagyományos tervezési módszerek azonban gyakran információvesztéshez vezetnek, ugyanis elhanyagolják a szabályozott szakasz mintavételközi dinamikáját. Jelen tanulmány egy újszerű módszert mutat be, amellyel mintavételes rendszerek válasza rekonstruálható folytonos időben, kihasználva, hogy a rendszer állapotér-modellje átfogalmazható peremérték-problémává. A bemutatott módszer alkalmazását szimulációs eredmények igazolják.

Kulcsszavak: mintavételközi dinamika, mintavételes rendszerek, állapot-visszacsatolás, peremérték-problémák

1. BEVEZETÉS

A mintavételes rendszerek alapvető szerepet töltenek be mérnöki alkalmazásokban, ugyanis fizikai rendszerek irányítását legtöbbször beágyazott eszközök végzik [1][2]. Az így létrejövő, számítógépekkel irányított folyamatok hibrid rendszereket eredményeznek, hiszen a szabályozott szakaszt folytonos idejű dinamika írja le, míg a beavatkozás periodikusan kiváltott események sorozatának tekinthető [3][4][5].

A mintavételes rendszerek hibrid természetéből adódó nehézségek kiküszöbölhetők különféle diszkrétizációs módszerek alkalmazásával. A szükséges diszkrét idejű matematikai modellek meghatározására két fő megközelítés terjedt el a műszaki gyakorlatban: Az egyik lehetőség, hogy a feladat-specifikációt kielégítő szabályozót először folytonos időben határozzák meg, amit ezután diszkrétizálnak a digitális implementáláshoz [6]. A másik módszer család magát a szabályozott szakaszt diszkrétizálja, ami után a teljes szabályozótervezési folyamat diszkrét időben végezhető el [7]. Az alkalmazott megközelítéstől függetlenül a zárt szabályozási lánc modellje diszkrét időben áll elő, így a szabályozott szakasz mintavételközi dinamikájáról elvesz az információ.

A mintavételközi dinamika szerepét a szakirodalom egyre jobban elismeri, ami bizonyos optimális szabályozási problémákban is megjelenik, például H_∞ módszerek [8], modell prediktív szabályozás [9] és lineáris kvadratikus optimalizálás [10] során. A mintavételközi dinamika figyelembe vehető bizonyos speciális jel-reprezentációk, például módosított z-transzformáció [11] vagy Zak-transzformáció [12] segítségével, emellett elterjedtek a rendszer túlmintavételezésén alapuló ún. „lifting” eljárások [13] is. A felsorolt módszerek alapvető hiányossága azonban, hogy a teljes mintavételközi tartalom helyett csak adott számú közbülső időpillanatban írják le a rendszer viselkedését egy mintavételi intervallumon belül.

Jelen tanulmány célja egy újszerű módszer bemutatása, amellyel a mintavételes rendszerek teljes folytonos idejű kimenete rekonstruálható a rendelkezésre álló diszkrét idejű jelek alapján. Bemutatásra kerül, hogy bizonyos esetekben a rendszert leíró állapotér-modell átfogalmazható kétpontos peremérték-problémává az

egymást követő mintavételi pontok között, melynek megoldásával a mintavételközi tartalom szakaszonként rekonstruálhatóvá válik. A javasolt módszer analitikus levezetése mellett annak alkalmazása is bemutatásra kerül szimulációs példákon keresztül.

A tanulmány az alábbi fő tartalmi részekből épül fel: A 2. fejezet bemutatja a vizsgált szabályozási rendszer modelljét és annak diszkrét idejű megoldását. A 3. fejezet az új módszert ismerteti, amellyel peremérték-problémákra keresztül rekonstruálható a rendszer mintavételközi válasza. A 4. fejezet szimulációs példák illusztrálja a bemutatott módszer alkalmazását, és végül az 5. fejezet összefoglalja az eredményeket.

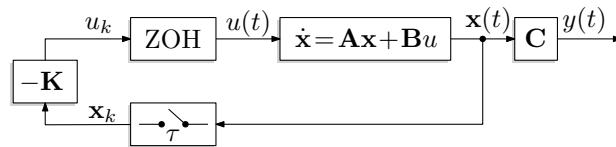
2. RENDSZERMODELL

Tekintsük az alábbi egy bemenetű egy kimenetű (SISO) lineáris időinvariáns (LTI) rendszert, melynek állapotter reprezentációját az

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \quad \text{és} \quad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \quad (2)$$

egyenletek írják le, ahol $u(t)$ és $y(t)$ a rendszer be- és kimenetét jelölik, valamint $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ az n -dimenziós állapotvektor. A rendszer paraméterei rendre az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rendszer-, a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ bemeneti- és a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ kimeneti mátrixok. A szabályozási feladat célja tetszőleges kiindulási állapotból az állapottér origójába juttatni a rendszert, ami állapot-visszacsatolással valósítható meg az 1. ábrán látható mintavételes rendszerben.



1. ábra. Az állapot-visszacsatolással megvalósított mintavételes rendszer blokkvázlata

A szabályozó által végzett beavatkozás az

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\tau) \quad (3)$$

mintavételezett állapot alapján történik, ahol τ a mintavételi időt és $k = 0, 1, \dots$ az időlépés indexét jelöli. A szabályozott szakasz $u(t)$ bemenetét egy zérusrendű tartószerv (ZOH) állítja elő az alábbiak szerint

$$u(t) = u_k, \quad \text{ahol} \quad k\tau \leq t < (k+1)\tau, \quad (4)$$

melyben az u_k diszkrét idejű beavatkozási állapot-visszacsatolás állítja elő

$$u_k = -\mathbf{K} \mathbf{x}_k \quad (5)$$

szerint, ahol $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ a szabályozó erősítési tényezőit tartalmazó visszacsatolási mátrix.

2.1. A zárt szabályozási lánc diszkrét idejű modellezése

A zárt szabályozási lánc vizsgálatához először az (1) állapotegyenlet megoldása szükséges, ami az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti feltételből kiindulva

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \left(\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\vartheta} \mathbf{B} u(\vartheta) d\vartheta \right), \quad (6)$$

ahol az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrix-exponenciális a $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{A}^i t^i$ Taylor-sor definiálja. A rendszer időinvariáns tulajdonságát kihasználva a (6) egyenlet alapján megadható a rendszer

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d u_k \quad (7)$$

diszkrét idejű állapotegyenlete az

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}\tau} \quad \text{és} \quad \mathbf{B}_d = \int_0^{\tau} e^{\mathbf{A}\vartheta} \mathbf{B} d\vartheta \quad (8)$$

együtthatókkal. A rendszer zárt láncú viselkedése megadható az (5) szabályozási törvény és a (7) diszkrét idejű állapotegyenlet alapján az alábbi

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K})^k \mathbf{x}_0 \quad (9)$$

n -dimenziós mértani sorozatként.

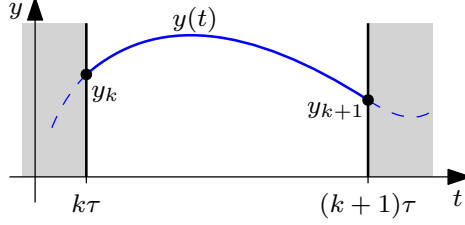
Azzal együtt, hogy a (9) egyenletben szereplő $\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K}$ mátrix leírja a rendszer alapvető dinamikai jellemzőit (például stabilitását), a diszkrét idejű modell nem reprezentálja annak mintavételközi viselkedését. További kihívást jelent, hogy a gyakorlati megvalósítás során legtöbbször nem áll közvetlenül rendelkezésre az $\mathbf{x}_k$ állapot, hanem ehelyett csak az $y_k = y(k\tau)$ mintavételezett kimenet ismert.

3. MINTAVÉTELKÖZI VÁLASZ MEGHATÁROZÁSA

Az alábbiakban bemutatásra kerül, hogy a zárt szabályozási lánc folytonos idejű $y(t)$ válasza rekonstruálható a kimeneti y_k minták sorozatából. Ehhez minden $t \in [k\tau, (k+1)\tau]$ mintavételi intervallumon felírható a 2. ábrán látható peremérték-probléma az alábbi

$$y(k\tau) = y_k \quad \text{és} \quad y((k+1)\tau) = y_{k+1} \quad (10)$$

peremfeltételek mellett.



2. ábra. A mintavételközi peremérték-probléma feladatkitűzésének illusztrációja

A megoldás meghatározásához felhasználható, hogy az u_k beavatkozási jel kizárólag az állapot függvénye az (5) egyenlet alapján, így a zárt szabályozási lánc autonóm dinamikai rendszerként kezelhető, melyben az állapot időfüggvénye az $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ kezdeti feltételből kiindulva az

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}_0 \quad (11)$$

alakban kereshető, ahol $\Phi(t)$ a kezdetiérték-probléma alapláncmátrixa, vagy más néven fundamentális megoldása. A továbbiakban az általánosság megszorítása nélkül elegendő csak az első mintavételi intervallumon, azaz $k = 0$ illetve $t \in [0, \tau]$ esetén vizsgálni a megoldást. Ekkor az (5) és (6) egyenletek felhasználásával a fundamentális megoldás

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} \left(\mathbf{I} - \int_0^t e^{-\mathbf{A}\vartheta} \mathbf{B} \mathbf{K} d\vartheta \right), \quad (12)$$

ahol $\mathbf{I}$ az $n \times n$ -es egységmátrixot jelöli. Jelen esetben azonban kezdeti feltételek helyett a (10) peremfeltételek adottak, melyek szintén felírhatóak mátrixos formában az alábbi módon

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_0} \mathbf{x}_0 + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_1} \mathbf{x}_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}, \quad (13)$$

melyben az $\mathbf{x}_1 = \Phi(\tau)\mathbf{x}_0$ helyettesítést elvégezve a

$$(\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \Phi(\tau)) \mathbf{x}_0 = \mathbf{v} \quad (14)$$

egyenlet adódik, amelyben bevezethető a $\mathbf{Q} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \Phi(\tau)$ mátrix, ami a peremértékek átszámítását teszi lehetővé kezdeti értékekké $\mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}$ módon. Az egyértelmű megoldás létezése csak és kizárólag $\mathbf{Q}$ mátrix invertálhatósága esetén áll fenn, amely azt is feltételezi, hogy a rendszer $n = 2$ dimenziós állapotter-modellel reprezentálható. Magasabb dimenziószám esetén a (10) peremfeltételek kiegészítése szükséges további kimeneti minták figyelembevételével a soron következő mintavételi pillanatokban.

Az előzőek alapján a (11) egyenlet felírható

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\Phi(t) \mathbf{Q}^{-1}}_{\Psi(t)} \mathbf{v} \quad (15)$$

alakban, ahol $\Psi(t)$ segítségével közvetlenül előállíthatóak a megoldások a tetszőleges peremértékeket tartalmazó $\mathbf{v}$ vektorból. Következésképp a $\Psi(t)$ mátrixot a peremérték-probléma alapláncmátrixának nevezzük. A (2) kimeneti egyenletet és a rendszer időinvariáns tulajdonságát felhasználva a (15) egyenlet átírható az alábbi alakra

$$y(t) = \mathbf{C} \Psi(t - k\tau) \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

amellyel már tetszőleges $t \in [k\tau, (k+1)\tau]$ intervallumon rekonstruálható a kimenet folytonos idejű $y(t)$ időfüggvénye az ismert mintavételi pontok alapján.

4. ILLUSZTRATÍV PÉLDÁK

Tekintsünk egy szabadsági fokú mechanikai rendszert, melynek elmozdulását vizsgáljuk egy külső, aktív erő hatására. A példák könnyebb átláthatósága érdekében a rendszer be- és kimenetét dimenziótlan viszonyszámoknak tekintjük, valamint az egyes együttható mátrixok elemei is dimenzió nélkül kerülnek feltüntetésre. A számítások további egyszerűsítése érdekében egységnyi tömeget feltételezünk, rugalmas vagy egyéb disszipatív hatások figyelembevétele nélkül, így a szabályozott szakasz állapotter-modeljét az alábbi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad (17)$$

mátrixok írják le. Legyen a szabályozó mintavételi ideje $\tau = 1$, valamint a visszacsatolási mátrix $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$ alakú. A (12) egyenlet alapján a kezdetiérték-probléma fundamentális megoldását a

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}k_1t^2 & t - \frac{1}{2}k_2t^2 \\ -k_1t & 1 - k_2t \end{bmatrix} \quad (18)$$

mátrix írja le, illetve a kezdeti- és peremértékek közötti átváltást a

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2}k_1 & 1 - \frac{1}{2}k_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

mátrixszal leírható lineáris leképezés adja meg.

4.1. Első példa

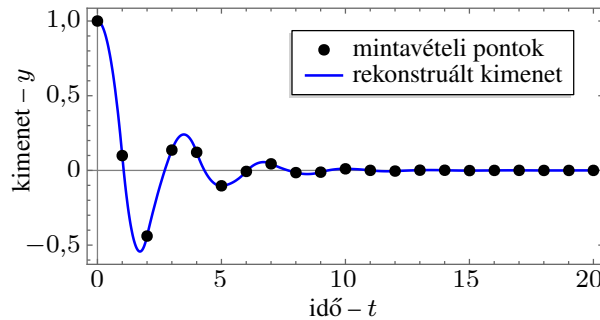
Az első példában a visszacsatolási mátrix értéke $\mathbf{K} = [1,8 \quad 1,5]$, így a mintavételközi peremérték-probléma fundamentális megoldása a (15) egyenlet alapján

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 1 - 0,4t - 0,6t^2 & 4t - 3t^2 \\ -0,4 - 1,2t & 4 - 6t \end{bmatrix}, \quad (20)$$

valamint a folytonos idejű kimenet a (16) egyenlet szerint az

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 - 0,4(t-k) - 0,6(t-k)^2 \\ 4(t-k) - 3(t-k)^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

formulával rekonstruálható. A rendszer válaszát az $\mathbf{x}_0 = [1 \quad 0]^T$ kezdeti állapotból kiindulva a 3. ábra mutatja. A mintavételközi dinamika jelentőségét jól hangsúlyozza, hogy a rekonstruált folytonos idejű kimenet jelentős kilengéseket mutat a mintavételi pontok között.



3. ábra. A rendszer diszkrét idejű válasza és a rekonstruált folytonos idejű kimenet az első példa esetén

4.2. Második példa

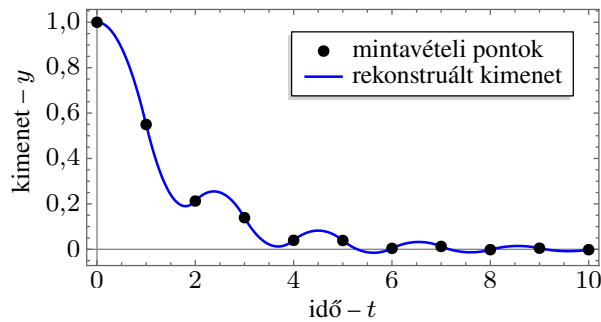
A második példában a visszacsatolási mátrix értéke $\mathbf{K} = [0,9 \quad 1,8]$, így a mintavételközi peremérték-probléma fundamentális megoldása a (15) egyenlet alapján

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 1 - 5,5t + 4,5t^2 & 10t - 9t^2 \\ -5,5 + 9t & 10 - 18t \end{bmatrix}, \quad (22)$$

valamint a folytonos idejű kimenetet a (16) egyenlet szerint az

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 - 5,5(t-k) + 4,5(t-k)^2 \\ 10(t-k) - 9(t-k)^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

függvény állítja elő. A rendszer válaszát az $\mathbf{x}_0 = [1 \quad 0]^T$ kezdeti állapotból kiindulva a 4. ábra mutatja. A mintavételi pontok sorozata jellegében egy túlszillapított beállást mutat, azonban a javasolt módszerrel mintavételközi oszcillációk is kimutathatók.



4. ábra. A rendszer diszkrét idejű válasza és a rekonstruált folytonos idejű kimenet a második példa esetén

4.3. Harmadik példa

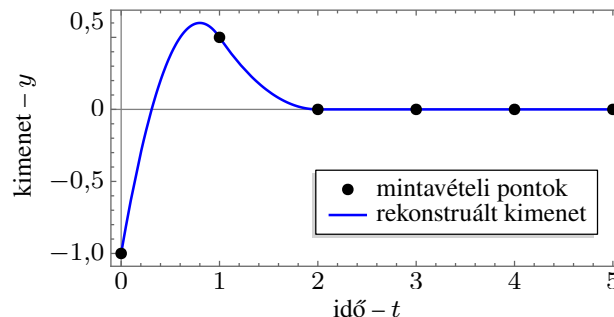
A harmadik példa egy véges beállású szabályozót mutat be $\mathbf{K} = [1 \ 1,5]$ paraméterekkel. Ebben az esetben a (9) egyenletben szereplő $\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K}$ mátrix nilpotens, így az állapot véges számú lépés után eléri az origót. A mintavételközi peremérték-feladat fundamentális megoldása az előzőekhez hasonlóan a (15) egyenlet alapján

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 4t-3t^2 \\ 2t-2 & 4-6t \end{bmatrix}, \quad (24)$$

amit felhasználva a kimenetet rekonstruáló (16) egyenletben az alábbi

$$y(t) = \begin{bmatrix} (1-(t-k))^2 \\ 4(t-k)-3(t-k)^2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

formula adódik. A rendszer válaszát az $\mathbf{x}_0 = [-1 \ 4]^T$ kezdeti állapotból kiindulva az 5. ábra mutatja. Jól látszik, hogy $n = 2$ lépés alatt a kimenet elérte az $y(t) = 0$ egyensúlyi helyzetet, azonban a rekonstruált folytonos idejű válaszból a beállítás tranziens tulajdonságai pontosabban értékelhetők, mint a diszkrét idejű kimenet alapján.



5. ábra. A rendszer diszkrét idejű válasza és a rekonstruált folytonos idejű kimenet a harmadik példa esetén

5. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen tanulmány olyan mintavételes rendszereket vizsgált, melyekben egy állapotter-reprezentációval leírható, folytonos idejű szakasz szabályozását egy diszkrét időben megvalósított állapot-visszacsatolás látja el. Bemutatásra került, hogy az ilyen rendszerek analízisére alkalmazott diszkrét idejű modellek pontatlan eredményekhez vezethetnek, hiszen a mintavételi pillanatok közötti viselkedést nem kezelik. A tanulmány egy újszerű módszert mutatott be, amellyel a mintavételi pontok alapján a teljes folytonos idejű kimenet rekonstruálható, beleértve a mintavételközi dinamikát is. A módszer alapja, hogy a rendszert leíró differenciálegyenletek az egymást követő mintavételi pillanatok között átfogalmazhatók peremérték-feladatokká, melyek megoldása a mintavételközi választ adja meg. Szimulációs példák igazolják, hogy a rendszer modelljének ismeretében a bemutatott módszerrel visszanyerhető a mintavételközi információ, ezzel pontosabb képet adva a rendszer minőségi jellemzőiről, mintavételközi kilengéseiről és tranziens viselkedéséről. Az eljárás robusztusságának ellenőrzéséhez további vizsgálatok szükségesek, melyek során a kimeneti minták mérési bizonytalanságának hibaterjedése is figyelembe vehető a számított mintavételközi megoldásra vonatkozóan.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium és a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap támogatásával valósult meg az Egyetemi Kutatói Ösztöndíj EKÖP-24-3-315 számú pályázatának keretein belül.

A Doktoranduszi Kiválósági Ösztöndíj Program (DKÖP) által támogatott projekt a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott, valamint a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem közös támogatásával, a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatallal kötött támogatási szerződés alapján valósult meg.

A TKP-6-6/PALY-2021 számú projekt a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP2021-NVA pályázati program finanszírozásában valósult meg.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Åström K. J. *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice Hall, 1996. ISBN 9780133148992
- [2] Franklin G. F. *Digital control of dynamic systems*, Addison-Wesley, 1998. ISBN 9780201331530
- [3] Branicky M. S. *Introduction to Hybrid Systems*. Handbook of Networked and Embedded Control Systems. Birkhäuser Boston, 2005, 91–116. ISBN 9780817644048, doi: [10.1007/0-8176-4404-0_5](https://doi.org/10.1007/0-8176-4404-0_5)
- [4] Goebel R., Sanfelice R. G., Teel A. R. *Hybrid dynamical systems*. IEEE Control Systems. IEEE, 2009, 29(2), 28–93. doi: [10.1109/mcs.2008.931718](https://doi.org/10.1109/mcs.2008.931718)
- [5] Ferrante F., Seuret A. *Observer Design for Linear Aperiodic Sampled-Data Systems: A Hybrid Systems Approach*. IEEE Control Systems Letters. IEEE, 2022, 6, 470–475. doi: [10.1109/lcsys.2021.3081345](https://doi.org/10.1109/lcsys.2021.3081345)
- [6] Kuo B. *Automatic control systems*, John Wiley & Sons, 2003. ISBN 9780471134763
- [7] Nesić D., Teel A. R. *Sampled-data control of nonlinear systems: An overview of recent results*. Perspectives in robust control. Springer London, 2001, 221–239.
- [8] Sideris A. *Intersample ripple-free multirate optimal controller design*. International Journal of Robust and Nonlinear Control. Wiley, 2012, 24(4), 744–757. doi: [10.1002/rnc.2916](https://doi.org/10.1002/rnc.2916)
- [9] Izumi N., Kiyama T., Iriya S. *Model Predictive Control Satisfying Constraints of Intersample Behavior*. 2023 62nd Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers (SICE). IEEE, 2023, 459–464. doi: [10.23919/sice59929.2023.10354091](https://doi.org/10.23919/sice59929.2023.10354091)
- [10] Akiyoshi T., Imai J., Funabiki S. *Optimal Digital Controller Design for a Servo Motor Taking Account of Intersample Behavior*. Electrical Engineering in Japan. Wiley, 2014, 188(3), 39–45. doi: [10.1002/eej.22489](https://doi.org/10.1002/eej.22489)
- [11] Stojić Đ. M., Šekara T. B. *A new digital resonant current controller for AC power converters based on the advanced Z-transform*. ISA Transactions. Elsevier, 2022, 129, 535–545. doi: [10.1016/j.isatra.2022.02.008](https://doi.org/10.1016/j.isatra.2022.02.008)
- [12] Janssen A. *The Zak transform: a signal transform for sampled time-continuous signals*. Philips Journal of Research, 1988, 43(1), 23–69.
- [13] Yamamoto Y., Yamamoto K. *Nonlinear Sampled-data Systems—A lifting framework*. IFAC-PapersOnLine. Elsevier, 2023, 56(2), 6406–6410. doi: [10.1016/j.ifacol.2023.10.840](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.840)