

A LuGre súrlódási modell bifurkációs analízise egy egyszerű mechanikai modell esetén

Bifurcation analysis of the LuGre friction model in a minimal mechanical model

BÉKÉSI Balázs János¹, Dr. CSERNÁK Gábor²

¹PhD hallgató, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki kar, Műszaki Mechanikai Tanszék (BME-GPK-MM), H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3., bekesi@mm.bme.hu

²Egyetemi docens, BME-GPK-MM, HUN-REN-BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport, csernak@mm.bme.hu

Abstract

In the present study, we perform phase space analysis on a widely known dynamic friction model, the LuGre model. This model can describe several friction features with the help of different parameters, however, the model is also effective in numerical simulations, as well. The focus of this study is on the linear internal damping (bristle damping) parameter used by the LuGre model. We show that sufficiently large bristle damping values can lead to self-excited vibrations. In order to investigate these nonlinear vibrations, we consider a simple mechanical model: a block sliding on a horizontal surface, which is subjected to a constant external force and the LuGre friction force with a linear viscous damping term. Despite the simplicity of the mechanical model, we distinguish several different bifurcation scenarios – involving Hopf, fold and/or homoclinic bifurcations. Based on the structures of the limit cycles, we found analogies with the well-known phenomenon referred to as frictional lag.

Keywords: LuGre model, phase space analysis, Hopf bifurcation, homoclinic bifurcation, fold bifurcation of periodic solutions, limit cycles, frictional lag

Kivonat

Jelen kutatásban egy széles körben ismert dinamikus súrlódási modellt – a LuGre-modellt – elemzünk fázistérvizsgálat segítségével. E modell különböző paraméterek bevezetésével számos súrlódási jelenséget képes leírni, ugyanakkor hatékonyan használható numerikus szimulációk során is. Vizsgálataink középpontjában a LuGre-modell belső csillapítási paramétere, az ún. sörtecsillapítás áll, melynek elegendően nagy értékei mellett öngerjesztett rezgések alakulhatnak ki. A nemlineáris hatások vizsgálata érdekében egy egyszerű mechanikai modellt tekintünk: egy vízszintes felületen mozgó testet, melyre állandó külső erő, lineáris viszkózus csillapító erő és a LuGre súrlódási erő hat. A mechanikai modell egyszerűsége ellenére több különböző bifurkációs esetet azonosítottunk – köztük Hopf, fold és homoklinikus bifurkációkat. A kialakuló határciklusok a sebesség ingadozásának felelnek meg, analógiát mutatva a jól ismert súrlódási késlekedés (frictional lag) jelenségével.

Kulcsszavak: LuGre-modell, fázistér vizsgálat, Hopf-bifurkáció, homoklinikus bifurkáció, fold bifurkáció, határciklusok, súrlódási késlekedés

1. BEVEZETÉS

Napjainkban is számos kutatás foglalkozik a súrlódás komplex folyamatainak leírásával és modellezésével [1, 2]. A súrlódás modellezésének célja olyan modellek kifejlesztése, melyek leírják minden, az alkalmazások szempontjából fontos jelenséget, emellett numerikus vizsgálatuk gyorsan és megbízhatóan végezhető el. Jelen kutatásban a széles körben ismert LuGre-féle súrlódási modellt vizsgáljuk [3], mellyel azon felül, hogy számos súrlódási jelenség modellezhető, előszeretettel használják precíziós alkalmazások vizsgálata során is.

A LuGre-modell az úgynevezett dinamikus súrlódási modellek csoportjába tartozik [1, 3], melyeknek egy lehetséges fizikai reprezentációja a sörtés modell. A sörtés modellben a kontakt felület egyenetlenségeit véges merevséggel és mikro-viszkózus csillapítási tényezővel rendelkező sörtékkel modellezzük. A sörték deformációját belső állapotváltozókkal adjuk meg, melyek dinamikáját elsőrendű differenciálegyenletek írják le.

A LuGre-modell esetén a sörték átlagos deformációját leíró differenciálegyenletet a

$$\dot{z} = v \left(1 - \frac{kz}{\bar{F}_f(v)} \operatorname{sgn}(v) \right) \quad (1)$$

alakban adhatjuk meg, ahol z a sörték deformációját, k a sörték merevségét jelölő paraméter, $\bar{F}_f(v)$ pedig az ún. Stribeck-karakterisztika, mely a tapadási és csúszási súrlódási erők közötti átmenetet írja le. A Stribeck-karakterisztikát a szakirodalomban gyakran használt, Bo és Pavelescu [4] által javasolt

$$\bar{F}_f(v) = F_d + (F_s - F_d) e^{-\left(\frac{|v|}{v_s}\right)^\delta} \quad (2)$$

exponenciális jellegű összefüggés adja meg, ahol F_d a csúszási (dinamikus) súrlódási erőt, F_s a tapadási (statikus) súrlódási erőt, v_s a Stribeck-sebességet, míg δ a Stribeck-kitevőt jelöli. A szakirodalomban gyakran a $\delta = 1$ illetve a $\delta = 2$ értéket használják [1, 5]. A Stribeck-kitevő értékének *jelentős hatása van* a Stribeck-karakterisztika alakjára, így e paraméter megválasztása a bifurkációs folyamatokat is számottevően befolyásolja [6]. A $\delta = 1$ -hez és $\delta = 2$ -höz tartozó karakterisztikák közti különbséget jól szemléltetik a 3. ábrák görbéi, ahol $F = \bar{F}_f(v)$. A fent említett okok miatt jelen kutatásban is e két paraméterérték mellett végeztük vizsgálatainkat.

A LuGre-modell a következőképpen definiálja a súrlódási erőt:

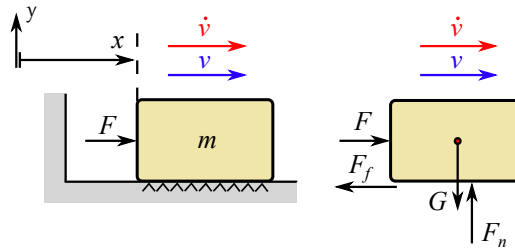
$$F_f = kz + c\dot{z} + Cv, \quad (3)$$

ahol c a sörték mikro-viszkózus csillapítási tényezőjét jelöli, továbbá C egy további viszkózus csillapítást jellemez, amely a makroszkopikus mozgásokhoz kapcsolódik. Vizsgálataink középpontjában a sörték *mikro-viszkózus csillapítási tényezője* áll, melynek meghatározó szerepe van a bifurkációs folyamatokat tekintve [7].

2. MECHANIKAI MODELL

Elemzésünkhöz a lehető legegyszerűbb mechanikai modellt választottuk: a vizsgált test egyenes vonalú mozgást végez a vízszintes felületen, állandó F külső erő és a (3) egyenlet szerinti F_f LuGre súrlódási erő hatása alatt. Az 1. ábrán látható szabadtest ábra alapján felírható a mozgásegyenlet a következő alakban:

$$m\dot{v} = -F_f + F, \quad \text{ahol} \quad F_f = kz + c\dot{z} + Cv. \quad (4)$$



1. ábra. Egyszerű mechanikai modell és annak szabadtest ábrája [7]

A c , C és k paramétereket pozitívnak feltételezzük, a test tömegét pedig – az általánosság megszorítása nélkül – egységnyinek vesszük. A mechanikai modell dinamikája egyértelműen leírható az $\mathbf{y} = [z \ v]^T$ állapotváltozók vektorával. Figyelembe véve a vizsgált test v sebességének előjelét és az (1) illetve (4) egyenleteket, a rendszer időfejlődése az alábbi alakban adható meg (ahol $v = 0$ esetén $\mathbf{F}^+ = \mathbf{F}^-$):

$$\dot{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \mathbf{F}^+(\mathbf{y}) & \text{ha } v \geq 0, \\ \mathbf{F}^-(\mathbf{y}) & \text{ha } v \leq 0, \end{cases} \quad \text{azaz} \quad \mathbf{F}^\pm(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} v \left(1 \mp \frac{kz}{\bar{F}_f(v)} \right) \\ -kz - cv \left(1 \mp \frac{kz}{\bar{F}_f(v)} \right) - Cv + F \end{bmatrix}. \quad (5)$$

3. EGYENSÚLYI PONTOK

Az egyensúlyi pontok meghatározásához az ún. nullklinák metszetének módszerét alkalmazzuk:

$$\dot{z} \equiv v \left(1 - \frac{kz}{\bar{F}_f(v)} \operatorname{sgn}(v) \right) = 0, \quad (6)$$

$$\dot{v} \equiv -kz - cv \left(1 - \frac{kz}{\bar{F}_f(v)} \operatorname{sgn}(v) \right) - Cv + F = 0. \quad (7)$$

A $\dot{z} = 0$ egyenlethez tartozó nullklina három részre bontható fel: a $v = 0$ egyenesre, illetve a $z = \pm \bar{F}_f(v)/k$ görbékre. Ez utóbbi görbék így egy elforgatott és átskálázott Stribeck-karakterisztikát rajzolnak ki (lásd az 5. ábrákat). A $\dot{v} = 0$ egyenletet leíró (7) nullklina két hiperbola jellegű függvényből áll, ezek egyikét szintén az 5. ábrán illusztráljuk.

Az egyensúlyi helyek a v sebességkoordináta előjele alapján kategorizálhatók: ha az egyensúlyi pont a $v = 0$ egyenesen helyezkedik el, akkor *letapadó típusú*nak, míg ha $v \neq 0$ (azaz az egyensúlyi pont a $z = \pm \bar{F}_f(v)/k$ Stribeck-karakterisztika görbéjén helyezkedik el), akkor *csúszó típusú*nak nevezzük.

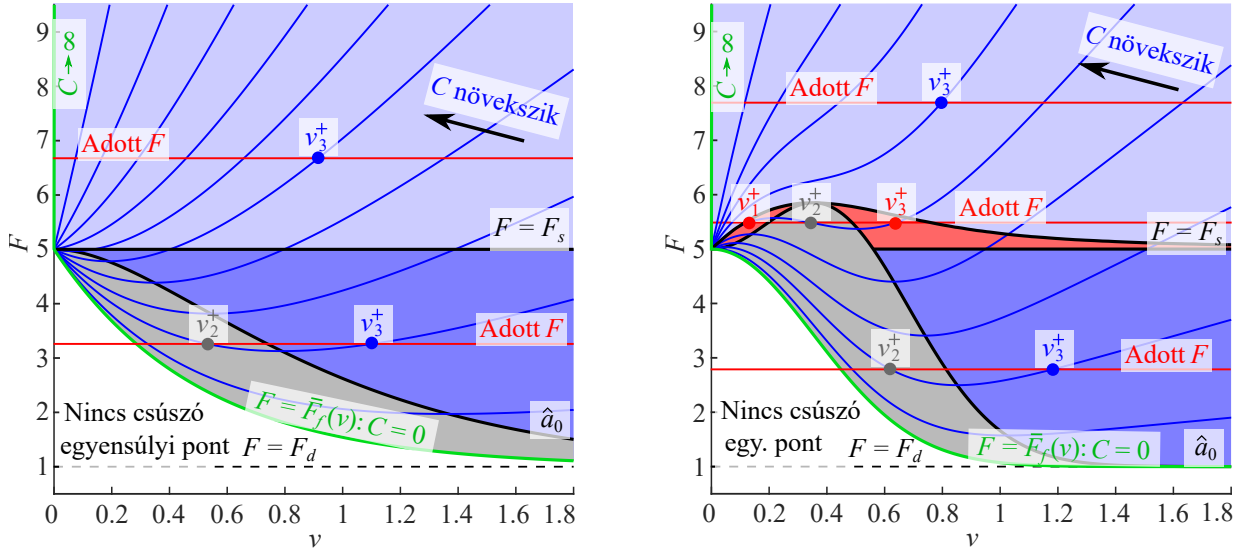
A továbbiakban – az általánosság megszorítása nélkül – a pozitív sebességű ($\text{sgn } v = 1$) csúszó típusú egyensúlyi pontokat vizsgáljuk, a negatív sebességű pontokhoz kapcsolódó számítások analóg módon elvégezhetők. Ezeknek a pontoknak a sebességkoordinátái – a (6)-(7) egyenletrendszerből következően – a

$$-\bar{F}_f(v) - Cv + F = 0 \quad (8)$$

egyenlet megoldásával számíthatók. A (8) egyenletnek a paramétereiktől függően több különböző gyöke is lehet. Így e megoldásokra a v_i^+ jelölést használjuk, ahol $i_{\max} = 2$, ha $\delta = 1$, illetve $i_{\max} = 3$, ha $\delta = 2$. A csúszó típusú egyensúlyi pontok koordinátái egyértelműen meghatározhatók v_i^+ számításával:

$$\mathbf{y}_i^+ \equiv \begin{bmatrix} z_i^+ \\ v_i^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_f(v_i^+)/k \\ v_i^+ \end{bmatrix}. \quad (9)$$

A 2. ábrán a (8) egyenlet megoldásai, azaz a rendszer $\mathbf{y}_i^+$ csúszó típusú egyensúlyi pontjainak v sebességkoordinátái láthatók az $F - v$ síkon ábrázolva a $\delta = 1$ illetve a $\delta = 2$ esetekben. Az egyensúlyi pontok a $C = 0$ és a $C \rightarrow \infty$ jelölő határgörbék közti nyílt tartományban találhatóak. E tartományon belül, minden (v, F) pontban lehet egyensúly egy megfelelő C viszkózus csillapítási paraméter esetén.



2. ábra. A csúszó típusú $\mathbf{y}_i^+$ egyensúlyi helyek v sebességkoordinátáinak reprezentációja adott F erők függvényében, $\delta = 1$ (balra), illetve $\delta = 2$ (jobbra) paraméterek esetén. A kék görbesereg a (8) egyenlet megoldásait jelöli adott C paraméter mellett. A görbesereg határgörbéit ($C = 0$ és $C \rightarrow \infty$) zöld színnel jelöljük, míg a görbesereg minimum értékeit a fekete $\hat{a}_0$ görbe jelöli. Adott F és C paraméterek mellett a színes tartományokban egy-egy csúszó egyensúlyi pont lehet. A $\delta = 1$ mellett F értékétől függően összesen egy vagy kettő, $\delta = 2$ mellett pedig egy, kettő vagy három csúszó egyensúlyi pont azonosítható; az ábrák mindegyik esetre mutatnak egy-egy példát.

4. A CSÚSZÓ EGYENSÚLYI PONTOK STABILITÁSVIZSGÁLATA

4.1. Lineáris stabilitásvizsgálat

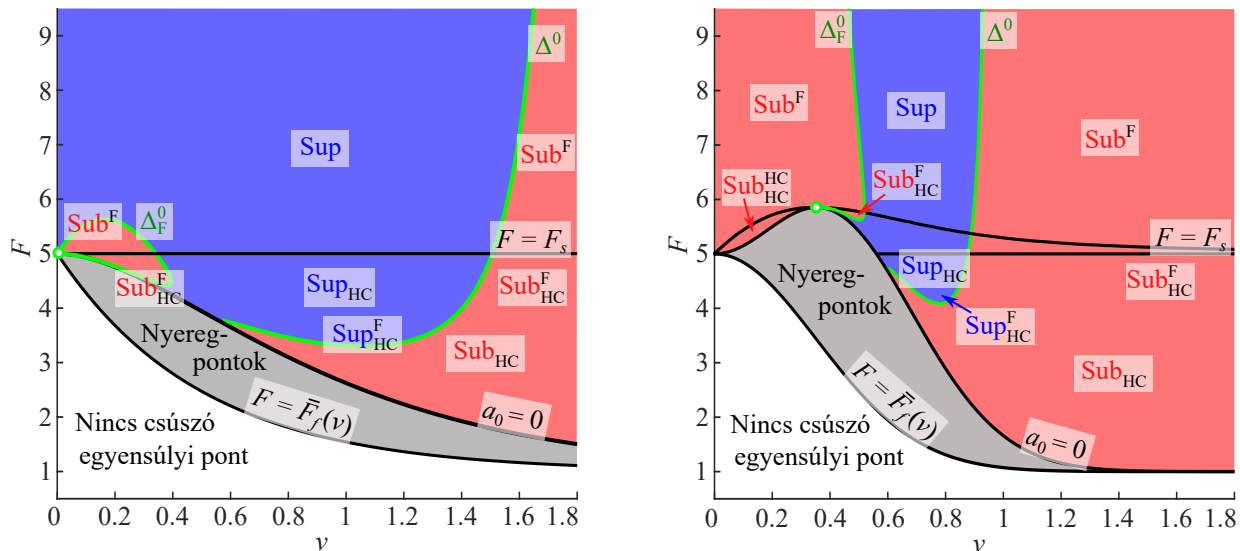
Az (5) rendszert jellemző karakterisztikus egyenlet felírható a $\det(\mathbf{J}^\pm - \lambda \mathbf{I}) = 0$ kifejezés alapján, ahol a $\mathbf{J}^\pm$ rendre az $\mathbf{F}^+$ illetve az $\mathbf{F}^-$ vektormezőket jellemző Jacobi-mátrixokat jelöli. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ alakra hozható. Az a_0 illetve a_1 együtthatók előjelei alapján a Routh-Hurwitz-kritériumot felhasználva vizsgálható az egyensúlyi helyek stabilitása: amennyiben $a_1 > 0$ és $a_0 > 0$ teljesül, akkor az adott egyensúlyi pont aszimptotikusan stabilis, ha valamelyik együttható negatív, akkor pedig instabil.

A karakterisztikus egyenlet alapján belátható, hogy az $a_0 > 0$ kritériumnak megfelelő $a_0 = 0$ határgörbe egyenlete a c sörtecsillapítástól független, és – a megfelelő δ paraméter esetén – a 2. ábrán látható $\hat{a}_0$ görbékkel azonos. Így az $a_0 = 0$ határgörbe (instabil) nyereg típusú egyensúlyi pontokat, illetve fókusz/csomó típusú egyensúlyi pontokat választ el egymástól.

Az $a_0 > 0$ kritériummal ellentétben az $a_1 > 0$ kritérium függ a c sörtecsillapítástól. Az $a_1 = 0$ határgörbe egyenlete alapján belátható, hogy megfelelően nagy c sörtecsillapítás mellett az összes fókusz/csomó típusú csúszó egyensúlyi pont elveszti stabilitását. Így a bifurkációs vizsgálatokhoz a c sörtecsillapítást választjuk változtatható paraméternek.

4.2. Hopf-bifurkációs vizsgálat

Belátható, hogy $a_1 = 0$ -nál a stabilitásvesztés *Hopf-bifurkáción* keresztül következik be, mely során periodikus pályák, ún. *határciklusok* jelennek meg az egyensúlyi pontok körül a fázistérben. Hopf-bifurkációs vizsgálat során adott fókusz/csomó típusú csúszó egyensúlyi helyek esetén – nemlineáris transzformációt követően – a Δ Poincaré-Ljapunov-konstanst számítjuk. A stabilitásvesztés típusát e konstans előjelének vizsgálatával határozzuk meg: ha $\Delta > 0$, akkor a bifurkáció *szubkritikus*, $\Delta < 0$ esetén pedig *szuperkritikus*. A Poincaré-Ljapunov-konstans az összes fókusz/csomó típusú csúszó egyensúlyi pont esetében számítható, ahol a szuperkritikus ($\Delta < 0$) és a szubkritikus ($\Delta > 0$) pontokat elválasztó határgörbe meghatározható a $\Delta = 0$ analitikus implicit egyenlet alapján. A szuper- és szubkritikus tartományok, illetve a tartományokat elválasztó $\Delta = 0$ határgörbék a 3. ábrán, az ún. *Hopf-diagramon* láthatók.



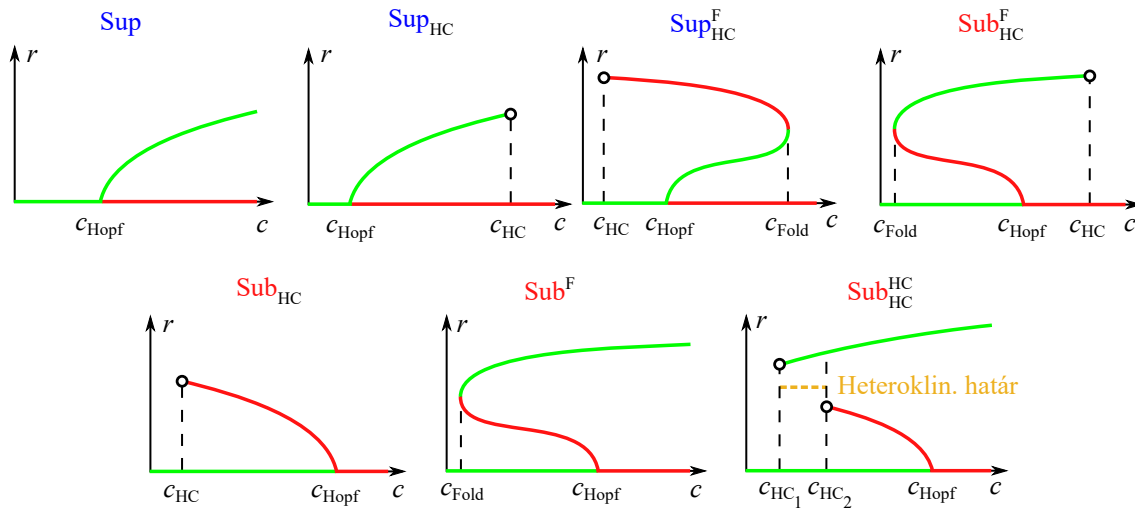
3. ábra. Hopf-diagramok $\delta = 1$ (balra) és $\delta = 2$ (jobbra) esetén. A piros tartományokban szubkritikus-, míg a kék tartományokban szuperkritikus Hopf-bifurkáció történik. A két bifurkációt elválasztó – zöld színnel jelölt – határgörbék pedig rendre a Δ_F^0 illetve a Δ^0 görbék választják el egymástól.

5. BIFURKÁCIÓK

A *Hopf-bifurkáció* az egyensúlyi pont bifurkációja határciklussá, azonban a határciklusok esetén is bekövetkezhetnek különböző típusú bifurkációk. Egy ilyen bifurkáció típus a *homoklinikus bifurkáció* (vagy röviden HC bifurkáció), mely esetén egy határciklus keletkezik, vagy szűnik meg egy nyeregponttal történő ütközés következtében. Egy másik bifurkációs típus az ún. *fold bifurkáció* két határciklus pályája közt, amikor egy stabil és egy instabil határciklus jelenik meg, vagy tűnik el a fold pontban.

Feltételezve, hogy csak egyetlen fold bifurkáció történik a c bifurkációs paraméter változtatásával, összesen hét *lehetséges bifurkációs esetet* különböztetünk meg, melyekben Hopf, fold és/vagy homoklinikus bifurkáció fordul elő. E lehetséges esetek összefoglalása a 4. ábrán látható.

A 4. ábrán látható bifurkációs esetek mindegyikét ki tudtuk mutatni a 3. ábra tartományainak valamelyikében. A legtöbb esetet részletesen elemeztük a [7] cikkben, $\delta = 1$ Stribeck-kitevő mellett. Ezért az 5. ábrán a csak $\delta > 1$ mellett tapasztalható $\text{Sub}_{\text{HC}}^{\text{HC}}$ esetet mutatjuk be, ahol szubkritikus Hopf bifurkáció mellett két homoklinikus bifurkáció is bekövetkezik, rendre a c_{HC_1} illetve c_{HC_2} paraméterek esetén. Az 5. ábra bal oldalán, adott $c_{\text{HC}_1} < c < c_{\text{HC}_2}$ bifurkációs paraméter mellett látható a fázistér, melyben az y_2^+ nyereg stabil sokaságai



4. ábra. Vázlatos ábrák a lehetséges bifurkációs esetekről a vizsgált rendszerben, ahol az r "sugár" paraméter a sebesség maximumát ($v_{\max}$) jelöli a határciklusok mentén

az y_3^+ instabil csomóból kiindulva szeparátrixokat alkotnak. E szeparátrixok egy heteroklinikus határt képeznek az y_1^+ stabil egyensúlyi pont körül, elszeparálva azt a stabil határciklustól. Az 5. ábra jobb oldalán azt mutatjuk be, hogy a $c = c_{HC_2}$ értéknél bekövetkező homoklinikus bifurkációt követően egy instabil határciklus jelenik meg a stabil egyensúlyi pont körül, miközben a heteroklinikus határ rázsugorodik e határciklusra. Szubkritikus bifurkációt követően az instabil határciklus rázsugorodik az y_1^+ egyensúlyi pontra, és $c > c_{Hopf}$ mellett már minden megoldás a stabil határciklus vonzási tartományába kerül.

6. AZ ÖNGERJESZTETT REZGÉSEK ÉS A SÚRLÓDÁSI KÉSLEKEDÉS

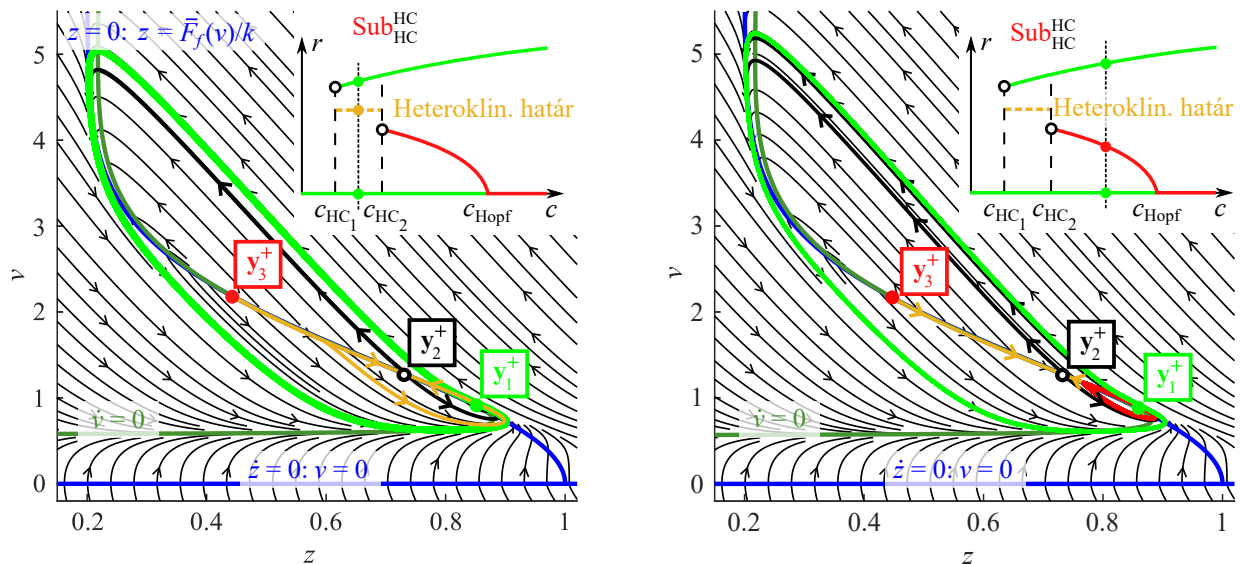
Kísérletileg bizonyítható [8], hogy egyirányú, periodikusan változó sebességű mozgás esetén a súrlódási erőt a sebesség függvényében ábrázolva, az $F_f(v)$ Stribeck-görbe körül hiszterézis görbe alakul ki a súrlódó test gyorsulásától vagy lassulásától függően. E jelenséget súrlódási késlekedésnek (frictional lag-nak) nevezzük. A súrlódási késlekedés jelensége számos mechanikai területen megjelenik ahol egyirányú csúszó mozgás valósul meg, például köszörülés, ablaktörlő berendezések, hajtáslánc rendszerek, fékrendszerek, kopási kísérletek, pin-on-disk kísérletek és egyéb súrlódásos rendszerek esetén.

Jelen cikkben bemutatott határciklusok jellege számos hasonlóságot mutat a súrlódási késlekedés jelenségét meghatározó hiszterézis görbével. Mindkét esetben egyirányú, csúszó mozgás valósul meg a sebesség periodikus változásával egyetemben, melynek eredményeképp egy zárt görbe alakul ki a Stribeck-görbe körül. Fontos azonban kihangsúlyozni a két jelenség közti meghatározó különbséget: a súrlódási késlekedés esetén a vizsgált testre ható külső erő is periodikusan változik, míg jelen munkában a külső erő értéke az időben változatlan. A határciklusok kialakulása tehát – a súrlódási késlekedés esetén tapasztalt hiszterézis görbékkel ellentétben – öngerjesztett rezgések eredménye, így e jelenséget *öngerjesztett súrlódási késlekedésnek* is nevezhetjük a két jelenség közti tagadhatatlan hasonlóságok miatt.

Mivel a LuGre-modell sörteit jellemző paraméterek – azaz a sörtemerevség és csillapítás – inkább matematikai, mintsem fizikai jellegűek, így e paraméterek kísérleti meghatározása számos problémába ütközik. E paramétereket gyakran a kísérleti eredményekre illesztett görbékből határozzák meg. Mivel a súrlódási késlekedés kísérletei során inkább a sebességet szabályozzák, így a vizsgált testre ható külső erőhatásokra kevesebb figyelmet fordítanak. Ahogy a jelen kutatás is kihangsúlyozza, az öngerjesztett rezgésekhez a sebesség periodikus változtatása mellett konstans külső erő szükséges, így e jelenség kísérleti kimutatása további kutatások témája lehet.

7. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen kutatásban egy egyenes vonalú mozgást végző testet vizsgáltunk, melyre egy *állandó külső erő* hat, az érintkezési felületen fellépő súrlódási erőt pedig a *LuGre-modell* írja le. Az egyszerű mechanikai modell ellenére a *sörtecsillapítás hatása öngerjesztett rezgésekhez* (határciklusokhoz) vezethet a fázistérben. A szakirodalomban leggyakrabban használt, a Stribeck-karakterisztikát, és a bifurkációs folyamatokat jelentősen



5. ábra. A $\text{Sub}_{\text{HC}}^{\text{HC}}$ bifurkációs eset bemutatása a fázistérben két különböző c bifurkációs paraméter mellett. A $\dot{v} = 0$ nullklina görbéit sötét zölddel, míg a $\dot{z} = 0$ görbéit kékkkel jelöljük. Az orbitálisan aszimptotikusan stabil határciklusok pályái és a stabil egyensúlyi pontok világos zöld, míg az instabil határciklusok pályái és az instabil egyensúlyi pontok piros színben láthatók. Az y_2^+ nyereg vonzó sokaságait narancssárgával, a tasztító sokaságait feketével jelöljük. A paraméterek: $\delta = 2$, $F_d = 1$ N, $F_s = 5$ N, $v_s = 2$ m/s, $k = 5$ N/m, $C = 1.6$ Ns/m, $F = 5.704$ N, $m = 1$ kg, $c = 8.25$ Ns/m (bal), $c = 8.45$ Ns/m (jobb).

befolyásoló paraméterekre, a $\delta = 1$ és $\delta = 2$ paraméterekre fókuszáltunk. Megmutattuk, hogy $\delta = 2$ mellett új egyensúlyi pontok, így további bifurkációs esetek jelennek meg a $\delta = 1$ esethez képest. Az egyszerű mechanikai modell ellenére tipikusan *három bifurkáció típus* – Hopf, fold és homoklinikus bifurkáció – jelenik meg valamennyi bifurkációs esetben. A határciklusok struktúrái alapján számos hasonlóságot találtunk a szakirodalomban is jól ismert súrlódási késlekedés jelenségével. A modellünkben a külső erő konstans, így e jelenség *sörtecsillapítás okozta öngerjesztett súrlódási késlekedésnek* is nevezhető.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A jelen kutatás a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFI K 146201) és a HUN-REN Magyar Kutatási Hálózat támogatásával valósult meg.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Marques F., Flores P., Claro J. C. P., Lankarani H. M. *A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems*. Nonlinear Dynamics. Springer, 2016, 86, 1407–1443.
- [2] Pennestrì E., Rossi V., Salvini P., Valentini P. P. *Review and comparison of dry friction force models*. Nonlinear Dynamics. Springer, 2016, 83, 1785–1801.
- [3] De Wit C. C., Olsson, H., Åström K. J., Lischinsky P. *A New Model for Control of Systems with Friction*. Transactions on Automatic Control. IEEE, 1995, 40(3), 419–425.
- [4] Bo L. C., Pavelescu D. *The friction-speed relation and its influence on the critical velocity of stick-slip motion*. Wear. Elsevier, 1982, 82(3), 277–289.
- [5] Armstrong-Hélouvry B. *Control of Machines with Friction*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 1991.
- [6] Bekesi B. J., Antal M., Csernak G. *Phase portraits and bifurcations induced by static and dynamic friction models*. Nonlinear Dynamics. Springer, 2025, 1–37 (online version first). <https://doi.org/10.1007/s11071-025-10974-y>.
- [7] Békési B. J., Csernak G. *Self-excited fluctuation of sliding velocity induced by LuGre friction in a minimal mechanical model*. International Journal of Solids and Structures. Elsevier, 2025 (Accepted).
- [8] Hess D. P., Soom A. *Friction at a Lubricated Line Contact Operating at Oscillating Sliding Velocities*. Journal of Tribology. ASME, 1990, 112(1), 147–152.