

Örvénydetektálás Kolmogorov-áramlásban

Vortex identification in Kolmogorov flow

KOVÁCS Kinga Andrea¹, Dr. KRISTÓF Gergely¹

¹Áramlástan Tanszék, Gépészmérnöki Kar, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem,
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

Email: kingaandrea.kovacs@edu.bme.hu, kristof.gergely@gpk.bme.hu

Abstract

The Kolmogorov flow is a periodic flow driven by a sinusoidal force field, which can be well studied using DNS simulations. However, eddy viscosity models do not describe this flow well, and the reason for this remains unclear in the literature. The aim of this paper is to understand the dynamics of vortex motion in Kolmogorov flows using various vortex detection methods, which may help make Reynolds-averaged turbulence models suitable for studying similar flows with quasi-stationary turbulence.

Keywords: Kolmogorov flow, vortex, vortex identification, turbulence, shear flow

Kivonat

A Kolmogorov-áramlás egy szinuszos erőter által hajtott periodikus áramlás, mely DNS szimulációval jól vizsgálható. Az örvényviszkózitás modellek azonban nem írják le megfelelően, és ennek oka nem egyértelmű a szakirodalomban. Jelen tanulmány célja az örvénymozgás dinamikájának megismerése Kolmogorov-áramlásban különféle örvénydetektálási módszerek alkalmazásával, mely segíthet alkalmassá tenni Reynolds-átlagolt turbulencia modelleket hasonló, kvázistacionárius turbulenciát tartalmazó áramlások vizsgálatára.

Kulcsszavak: Kolmogorov-áramlás, örvény, örvénydetektálás, turbulencia, nyíróáramlás

1. BEVEZETÉS

1.1. A tanulmány célja

A Kolmogorov-áramlás egy periodikus áramlási tér adott irányában szinuszosan változó intenzitású erőter által hajtott áramlás, melynek sajátossága, hogy az áramlási tér nem tartalmaz szilárd falat, ezért a turbulencia hosszleptéke térben meglehetősen homogén, azonban a nyírás intenzitása és a turbulens produkció több nagyságrendet változik az áramlási térben. Ez az áramlás nagyjából 70 éve ismert, illetve előnyt jelent, hogy a Kolmogorov-áramlás direkt numerikus szimulációval (DNS) viszonylag kis számítási költségek mellett vizsgálható, így az áramlás fő sajátosságai már közel harminc éve ismertek [1]. Ennek ellenére, a jelenleg használatban lévő örvényviszkózitás modellek nem képesek a Kolmogorov-áramlás megfelelő leírására. E modellezési probléma okára a szakirodalom nem ad egyértelmű magyarázatot. Jelen tanulmány célja örvénydetektálás Kolmogorov-áramlásban (mely áramlás DNS szimulációk eredménye) különböző Euler-féle detektálási módszerek segítségével, mely lehetővé teszi az örvénymozgás dinamikájának jobb megismerését.

1.2. Örvénydetektálási módszerek

Epps [2] szerint az örvénydetektálási módszereket alapvetően két csoportba lehet sorolni, Euler-féle és Lagrange-féle örvénydetektálási módszerek. Az Euler-féle módszerek Euler-féle mennyiségekből vannak származtatva (pl. sebességgradiens tenzor), míg a Lagrange-féle módszerek Lagrange-féle mennyiségekből vannak származtatva (pl. részecske trajektóriák). Az Euler-féle módszereket tovább lehet bontani lokális és nem lokális módszerekre, és az Euler-féle lokális módszerek tovább csoportosíthatók úgy, mint térrész-alapú és vonal-alapú módszerek. Az Euler-féle, lokális, térrész-alapú módszerek a legelterjedtebbek, mert szimplán a pillanatnyi sebességmezőből számíthatók pontszerűen. A térrész alapú módszerek (pl. ω -kritérium, Q -kritérium, λ_2 -kritérium) tetszőlegesen választott határértékektől függenek, és az örvényt egy olyan tartományon belül definiálják, amelyben egy adott skalárfüggvény egy előre meghatározott határérték alá, vagy fölé esik.

2. A VIZSGÁLT DETEKTÁLÁSI MÓDSZEREK

Jelen tanulmány során hat különböző detektálási módszer került vizsgálatra, melyek az alábbiak: ω -kritérium, Q -kritérium, λ_2 -kritérium, Ω -módszer, Rortex-módszer, és Omega-Liutex módszer. Alább, az említett detektálási módszerek kerülnek részletezésre. A módszerek alkalmazása egyéb példákra szintén megtalálható a szakirodalomban [3].

2.1. ω -kritérium

Az ω -kritérium alapján létezik örvény egy adott térrészen belül amennyiben:

$$|\boldsymbol{\omega}| > \omega_{\text{thresh}}, \quad (1)$$

ahol $\boldsymbol{\omega}$ az örvényesség, mely a sebességmező rotációja ($\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$), és ω_{thresh} egy előre beállított határérték.

2.2. Q -kritérium

Az egyik legismertebb örvénydetektálási módszert Hunt és mtsai. vezették be [4]. A Q -kritérium Galilei-invariáns, és a sebességgradiens tenzoron alapul, melyet jelöljön $\mathbf{G}$. A sebességgradiens tenzor az alábbiak szerint határozható meg:

$$\mathbf{G} = \nabla \mathbf{v}, \quad (2)$$

illetve, felbontható szimmetrikus és antiszimmetrikus részekre:

$$\mathbf{G} = \mathbf{S} + \boldsymbol{\Omega}, \quad (3)$$

ahol $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)$ az alakváltozási tenzor (szimmetrikus), és $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{G}^T)$ a szögsebesség tenzor (antiszimmetrikus). A sebességgradiens tenzor egy folyadék részecske átlagos deformációját és szögsebességét adja meg. Hunt és mtsai. [4] az alábbiak szerint definiálták az örvényeket (Q a sebességgradiens tenzor második skalár invariánsa):

$$Q = \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{\Omega}\|^2 - \|\mathbf{S}\|^2) > 0, \quad (4)$$

ahol $\|\cdot\|$ a Frobenius normát jelöli. Az örvénydetektálás során a (4)-es egyenlet helyett általában viszont az alábbi formulát használjuk:

$$Q > Q_{\text{thresh}}, \quad (5)$$

ahol Q_{thresh} egy előre meghatározott tetszőleges határérték.

2.3. λ_2 -kritérium

A λ_2 -kritériumot Jeong és Hussain vezették be [5], és a Q -kritériumhoz hasonlóan ez a módszer is Galilei-invariáns. A kritérium szerint örvényről beszélünk akkor, ha az $\boldsymbol{\Omega}^2 + \mathbf{S}^2$ tenzornak két negatív sajátértéke van, ezeket jelölje $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ha az alábbiak szerint rendezzük a sajátértékeket: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, akkor ez a definíció ekvivalens az alábbi összefüggéssel:

$$\lambda_2 < 0.$$

A Q -kritériumhoz hasonlóan ennél a módszernél is általában a nulla helyett egy másik λ_{thresh} tetszőlegesen választott határértéket alkalmazunk.

2.4. Ω -módszer

A Galilei-invariáns Ω -módszert Liu és mtsai. [6] vezették be az alábbiak szerint:

$$\Omega = \frac{\|\boldsymbol{\Omega}\|^2}{\|\mathbf{S}\|^2 + \|\boldsymbol{\Omega}\|^2 + \varepsilon}, \quad (6)$$

ahol ε egy kis pozitív szám, amely a nullával való osztás elkerülése végett került bevezetésre. Dong és mtsai. [7] nagyszámú kísérlet alapján az alábbi értéket javasolták az ε paraméterre vonatkozóan:

$$\varepsilon = 0,002 \cdot Q_{\text{max}}. \quad (7)$$

Az Ω -módszer előnye a fentebb említett kritériumokkal szemben, hogy empirikus módon meghatározásra került egy határérték ($\Omega = 0,52$), mely elméletben megfelelő detektálási eredményeket biztosít valamennyi esetre.

2.5. Rortex-módszer

A Rortex-módszert Tian és mtsai. [8] dolgozták ki, és a módszer alap gondolata, hogy az örvényességet felbontják egy rotációs és egy nem-rotációs részre. A rotációs rész megnevezése Liutex/Rortex vektor, mely képes megadni mind az irányát, mind a nagyságát a rotációs mozgásnak. A módszer részletes levezetése alább nem kerül bemutatásra, de megtalálható [8-10]-ben.

Kihagyva a levezetés lépéseit, a Rortex vektor nagysága az alábbiak szerinti:

$$R_Z = \begin{cases} 2(\beta - \alpha), & g_{Z\min} > 0 \\ 0, & g_{Z\min} \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

ahol:

$$g_{Z\min} = \beta^2 - \alpha^2 > 0, \quad (9)$$

ahol α a lokális alakváltozása és β az átlagos szögsebessége a folyadékrészecskének. A Rortex vektor pedig az alábbiak szerint számítható:

$$\mathbf{R} = R_Z \mathbf{r}, \quad (10)$$

ahol $\mathbf{r}$ a forgástengely irányába eső egységvektor.

2.6. Omega-Liutex módszer

Az Omega-Liutex módszert Dong és mtsai. [11] vezették be. Ezen módszer az Ω -módszer, illetve a Rortex-módszer előnyeit hivatott ötvözni a következők szerint. A Rortex-módszer során meghatározott α , illetve β értékek segítségével lehet számítani az Ω_R értékeket (mely az Omega-Liutex mezőt hivatott reprezentálni), majd ezt követően az $\Omega_R = 0,52$ határérték segítségével az örvényes struktúrák megjeleníthetők, hasonlóan az Ω -módszerhez. Az Ω_R értékek az alábbi egyenlet szerint számíthatók:

$$\Omega_R = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \varepsilon}, \quad (11)$$

ahol ε (hasonlóan az Ω -módszerhez) a kerekítési hibákat kiküszöbölendő került bevezetésre, és értéke az alábbi egyenlet szerinti:

$$\varepsilon = 0,001 \cdot (\beta^2 - \alpha^2)_{\max}, \quad (12)$$

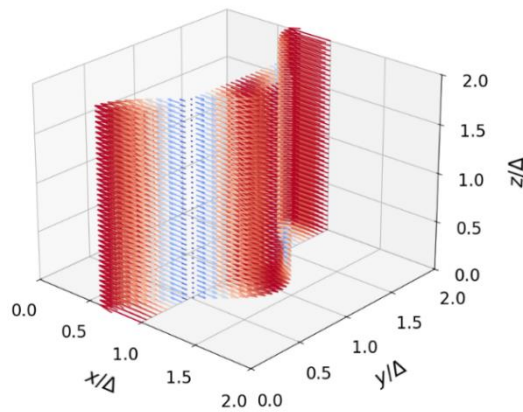
ahol $(\beta^2 - \alpha^2)_{\max}$ értéke minden időlépésre fix, és egyszerűen számítható.

3. SZIMULÁCIÓS BEÁLLÍTÁSOK ÉS EREDMÉNYEK

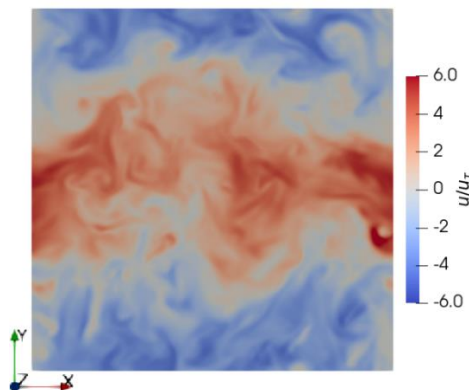
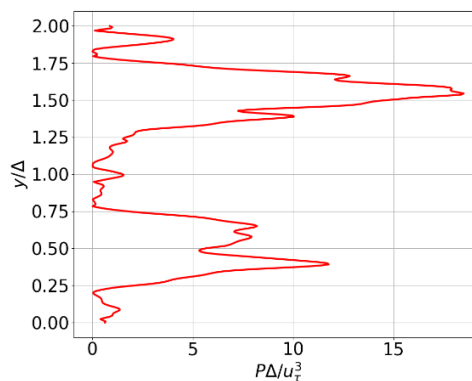
A Kolmogorov-áramlásra vonatkozó DNS szimulációkat a NEK5000 [12] szoftver segítségével futtattuk. Jelen cikkben egy szimulációs esetet mutatunk be ($Re_\tau = 1000$). A Kolmogorov-áramlás térben, az 1. ábra szerint szinuszosan változó erőter által periodikus modelltartományban keltett nyíróáramlás. Az áramlási tér egy $2\Delta = 0,05$ m oldalhosszúságú kockából áll, és a háló elemszáma 128^3 . A hajtóerő az alábbi egyenlet szerinti:

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{F}} \cdot \cos(\kappa \cdot \mathbf{y}), \quad (13)$$

ahol $\hat{\mathbf{F}} = 0.2 \text{ m/s}^2$ az amplitúdó, $\kappa = 2\pi/2\Delta = \pi/\Delta$ az ún. hullámszám. Az időlépést a szimuláció során változtattuk, ezzel biztosítva a 0,5 körüli Courant-szám értéket. A szimulációt egy tetszőleges sebességmezővel inicializáltuk, és 10 s-ig futtattuk, ezt követően kimentettünk 100 időlépést. A posztprocesszálas során a sebességmezőket interpoláltuk egy 256^3 elemszámú egyenközű hálóra 15-öd fokú Lagrange-féle interpolációs polinomokkal. A 2. ábrán látható az x-irányú sebességmező $u_\tau = \sqrt{\hat{\mathbf{F}}/\kappa}$ -val dimenziótlanítva az x-y síkban $t = 10,25$ s-nál. A 3. ábrán a pillanatnyi turbulens produkció rétegátlagos látható y mentén ábrázolva.



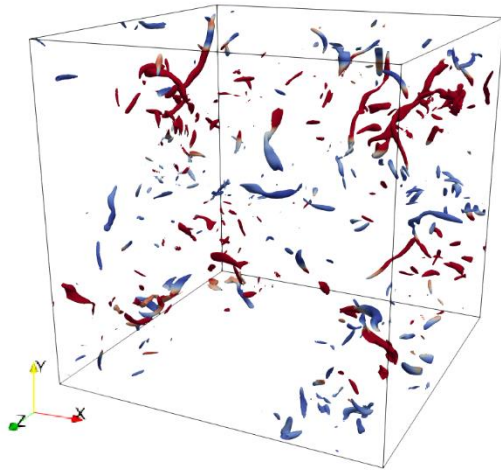
1. ábra. A hajtóerő térbeli megoszlása.

2. ábra. x -irányú sebességeloszlás az x - y síkban.

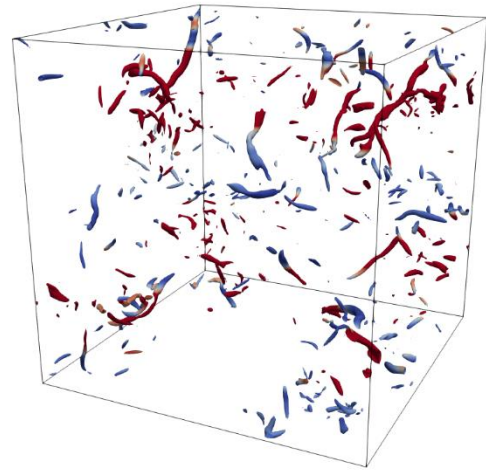
3. ábra. Pillanatnyi rétegátlagolt turbulens produkció.

4. ÖRVÉNYDETEKTÁLÁSI EREDMÉNYEK

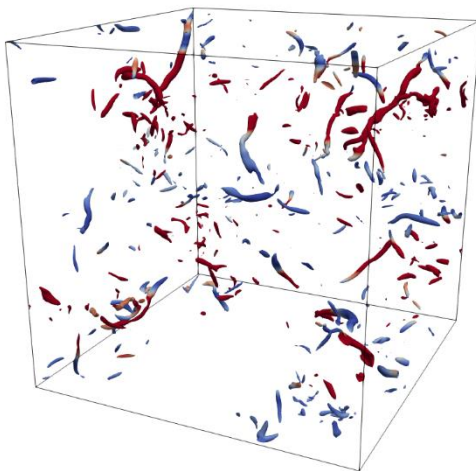
Az örvénydetektálást $t = 10,25$ s-nál végeztük, a már egyenközü hálóra interpolált sebességmező felhasználásával, és valamennyi módszert Python-ban implementáltunk. A különböző módszerekkel kinyert detektálási eredmények a 4.-9. ábrákon láthatók. Az örvényes térrészek a dimenziótlán, pillanatszerű, rétegátlagolt turbulens produkció alapján vannak színezve. A 7., illetve 9. ábrák alapján látni lehet, hogy az Ω -, illetve Omega-Liutex módszerek nem szolgáltatott megfelelő eredményeket, ugyanis nagyjából az egész tartományt örvényként detektálták. A 4.-6. ábrákból látható, hogy Kolmogorov-áramlás esetében az ω -, Q - és λ_2 -kritériumok alkalmazása közel azonos eredményre vezetett, azonban a Rortex-módszerrel számított örvények jelentősen eltérő képet mutatnak: ebben az esetben az örvények nagyobb mértékben igazodnak az áramlás irányához. Az eredmények, valamint az alábbi videónk [13] alapján látható, hogy az örvények létrejötte, illetve növekedése a nyírórétegben figyelhető meg (ahol nagyobb a produkció), viszont az örvények aprózódása mindenhol jelen van.



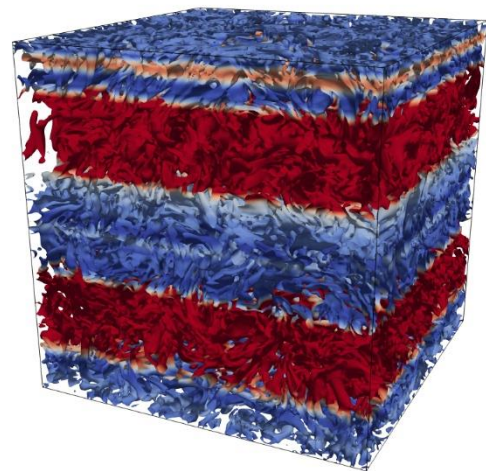
4. ábra. ω -kritérium ($\omega_{iso} = 320 \text{ 1/s}$).



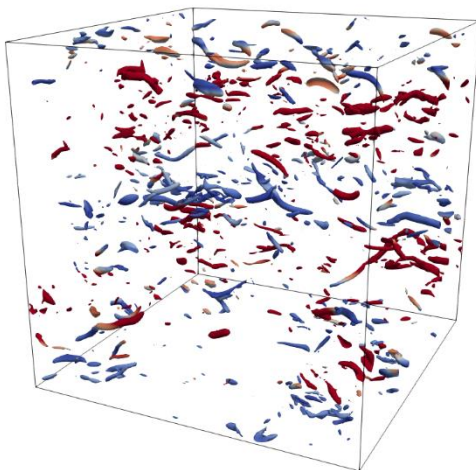
5. ábra. Q -kritérium ($Q_{iso} = 2 \cdot 10^4 \text{ 1/s}^2$).



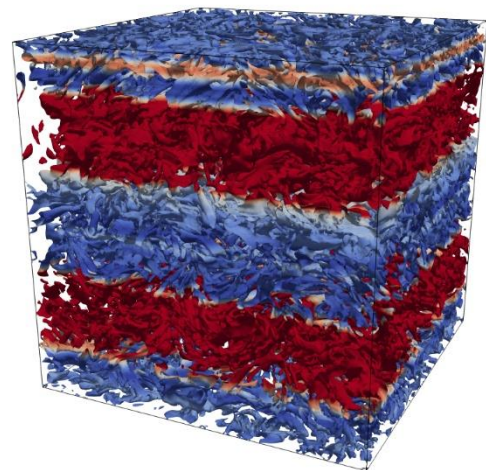
6. ábra. λ_2 -kritérium ($\lambda_{2,iso} = -2 \cdot 10^4 \text{ 1/s}^2$).



7. ábra. Ω -módszer ($\Omega_{iso} = 0.52$).



8. ábra. Rortex-módszer ($R_{iso} = 125 \text{ 1/s}$).



9. ábra. Omega-Liutex módszer ($\Omega_{R,iso} = 0.52$)



5. KONKLÚZIÓ

A tanulmány eredményeként örvénydetektálást hajtottunk végre Kolmogorov-áramlásban különböző Euler-féle detektálási módszerekkel. Az alkalmazott detektálási módszerek közül az Ω - és Omega-Liutex módszerek nem bizonyultak megfelelőnek, mivel az egész térrészt örvényként azonosították. Az ω -, Q - és λ_2 -kritériumok nagyjából azonos eredményeket adtak, viszont a Rortex-módszer által detektált örvények eltérő képet mutattak, ugyanis nagyobb mértékben igazodtak az áramlás irányához. A produkció által színezett detektálási eredmények alapján megállapítható, hogy az örvények a nagy nyírású helyeken jönnek létre, illetve növekednek, ugyanakkor az örvények felaprózódása mindenütt jelen van.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A TKP-6-6/PALY-2021 számú projekt a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP2021-NVA pályázati program finanszírozásában valósult meg. A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal támogatta az NKFI K 143204 projekt keretében.

A kutatást a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal **OTKA K23-146158** számú pályázat támogatta.

A Kulturális és Innovációs Minisztérium **EKÖP-24-3-BME-194** kódszámú Egyetemi Kutatói Ösztöndíj Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Borue, V., Orszag, S. A. *Numerical study of three-dimensional Kolmogorov flow at high Reynolds numbers*. Journal of Fluid Mechanics, 1996, 306, 293-323.
- [2] Epps, B. *Review of vortex identification methods*. In 55th AIAA aerospace sciences meeting, 2017, (p. 0989).
- [3] Kovács, K. A., Balla, E. *Quantitative comparison of vortex identification methods in three-dimensional fluid flow around bluff bodies*. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2025, 113.
- [4] Hunt, J. C., Wray, A. A., & Moin, P. *Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows*. Studying turbulence using numerical simulation databases, 2. Proceedings of the 1988 summer program, 1988.
- [5] Jeong, J., Hussain, F. *On the identification of a vortex*. Journal of Fluid Mechanics, 1995, 285, 69-94.
- [6] Liu, C., Wang, Y., Yang, Y., Duan, Z. *New omega vortex identification method*. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2016, 59, 1-9.
- [7] Dong, X. R., Wang, Y. Q., Chen, X. P., Dong, Y., Zhang, Y. N., Liu, C. *Determination of epsilon for Omega vortex identification method*. Journal of Hydrodynamics, 2018, 30, 541-548.
- [8] Tian, S., Gao, Y., Dong, X., Liu, C. *Definitions of vortex vector and vortex*. Journal of Fluid Mechanics, 2018, 849, 312-339.
- [9] Liu, C., Gao, Y., Tian, S., Dong, X. *Rortex—A new vortex vector definition and vorticity tensor and vector decompositions*. Physics of Fluids, 2018, 30(3).
- [10] Gao, Y., Liu, C. *Rortex and comparison with eigenvalue-based vortex identification criteria*. Physics of Fluids, 2018, 30(8).
- [11] Dong, X., Gao, Y., Liu, C. *New normalized Rortex/vortex identification method*. Physics of Fluids, 2019, 31(1).
- [12] Fischer, P., Lottes, J., Tufo, H. Nek5000 (No. NEK5000). Argonne National Laboratory (ANL), Argonne, IL (United States), 2007.
- [13] Karmanwtl. 2025.02.27. *Vortex detection in Kolmogorov flow*. YouTube. <https://youtu.be/O1dQ2s1rBA8>