

# Rázórosták forgórész-elrendezésének hatása a mechanikai szinkronizációra

## Numerical study of self-synchronization phenomenon in vibrating screens

SZABÓ Márton<sup>1</sup>, Dr. HABIB Giuseppe<sup>2</sup>

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék,  
MTA-BME Lendület Globális Dinamika, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.,  
+36 1 463 1369<sup>1</sup>, [marton.szabo@mm.bme.hu](mailto:marton.szabo@mm.bme.hu)<sup>1</sup>, +36 1 463 3678<sup>2</sup>, [habib@mm.bme.hu](mailto:habib@mm.bme.hu)<sup>2</sup>

### Abstract

*The goal of this study is to investigate the dynamic behavior of vibrating screens. The research focuses on machines with two rotors, which utilize mechanical synchronization phenomenon for their operation. The analysis explores the effects of parameters, like eccentricity, position, and orientation of the eccentric shafts on the variation of the phase angle with regard of the angular velocity of the rotors. The provided results make the determination of the optimal positioning of eccentric shafts possible in order to optimize synchronization.*

**Keywords:** vibrating screen, linear screen, equation of motion, mechanical synchronisation, numerical simulation

### Kivonat

*A tanulmány célja a különböző rázórosta típusok dinamikai viselkedésének vizsgálata. A kutatás a két forgórészes gépekre összpontosít, amelyek a mechanikai szinkronizációt használják fel a működésükhöz. Az elemzés feltárja az excentricitás mértékének, az excentrikus tengelyek pozíciójának és orientációjának hatásait a szinkronizációs fázisszögre, és hogy ez hogyan függ a forgási frekvenciától. Az eredmények segítik a forgórészek megfelelő elhelyezésének meghatározását a szinkronizáció optimalizálásához.*

**Kulcsszavak:** rázórosta, vízszintes rosta, mozgásegyenlet, mechanikai szinkronizáció, numerikus szimuláció

## BEVEZETÉS, VÍZSZINTES ROSTÁK MECHANIKAI MODELLJE

### 1.1. Rosták osztályozása

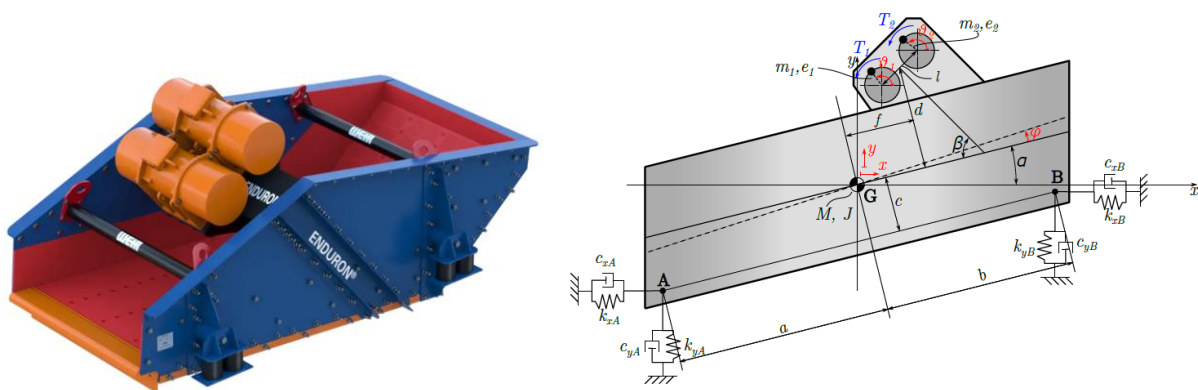
Az ipari gyakorlatban sokféle rázórostát alkalmaznak az üzemi körülményektől, a szitálendő anyagtól és még más, hasonló befolyásoló tényezőktől függően. Ezek között legkönnyebben az excenteres tömeggel ellátott forgórészes gépekre lehet különbséget tenni. Ettől függ ugyanis, hogy a kiegyensúlyozatlan tengelyek okozta gerjesztés milyen típusú mozgásra kényszeríti a rugókon álló rostatestet. Ennek megfelelően tehát az ipari alkalmazásokban megtalálhatóak egy, két vagy három forgórészes gépek [9], amelyek közül a két tengelyes rosták, más néven vízszintes vagy lineáris rosták, még tovább bonthatóak két csoportra attól függően, hogy a gerjesztők tengelyei milyen irányban állnak a rostatesthez képest. Egyrészt lehet olyan az elrendezés, hogy a két egymással szemben forgó forgórész tengelye merőleges az anyagszállítás irányára, másrészt lehetnek azzal szöget bezáróak, de egymással továbbra is párhuzamosak. Mindkét fajtánál az anyagmozgatás iránya és a függőleges által kifeszített síkban egy döntött irányú translációs mozgás alakul ki a gépen [3].

E két típus közül ez a cikk elsősorban azokra összpontosít, amelyeknél a forgórészek elfordulásai között nincsen kinematikai kapcsolat, mint például fogaskerekek, hanem a mechanikai szinkronizáció jelenségére hagyatkozva érik el az üzemi működésüket a forgórészesek. Feltételezhető, hogy ennek a két típusnak ugyanakkor teljesen más lesz ez a szinkronizációs viselkedése, hiszen, míg a merőleges tengelyelrendezés esetében a mozgás csak síkban valósul meg, addig a döntött irányú forgórészeknél a rostatest már térbeli mozgást végez a kezdeti tranziens során [4].

## 1.2. Mechanikai modellek

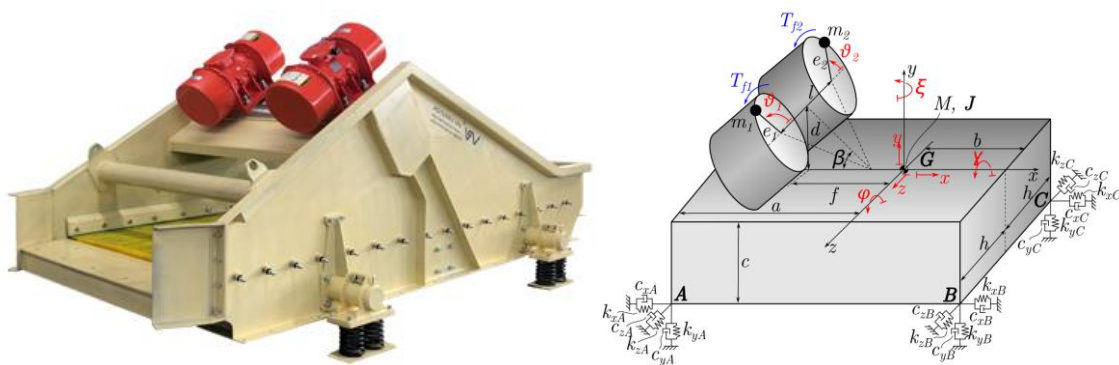
Mivel merevtest dinamika segítségével ezek az excenteres rosták igen jól modellezhetőek, ezért elterjedt megoldás a másodfajú Lagrange-egyenlet segítségével felírni a matematikai modelljeiket [1], [4]. A szakirodalomban elterjedt módja a kéttengelyes rázórosta modellezésnek, hogy az excenteres gerjesztését csak egy időben változó gerjesztő erőként veszik figyelembe, hiszen az egymással szemben forgó tömegek az üzemállapot során ilyen módon hatnak a géptestre [5], [7], [8]. Ez a megközelítés azonban nem alkalmas a szinkronizációs viselkedés leírására, ahhoz Fanghoz [4] és Zhanghoz [10] hasonlóan a tengelyek elfordulását is mint szabadsági fokot szükséges modellezni, ilyen módon lehetővé téve az indítási folyamat leírását is.

A merőleges tengelyelrendezésű rosták esetén elégséges síkmodellt alkalmazni [4], azaz öt szabadsági fokkal leírható a rendszer, melyek az  $x$  és  $y$  elmozdulásai a rostatest tömegközéppontjának, a  $\varphi$  szögelfordulása a rostatestnek a mozgás síkjában, illetve a forgórészek  $\vartheta_1$  és  $\vartheta_2$  elfordulásai. A modell további paraméterei, úgymint a rostatest geometriáját jellemző  $a, b, c, d, f, l$  hosszmeretek, illetve  $\alpha$  és  $\beta$  szögek, a géptest  $M$  tömege és  $J$  súlyponti tengelyre számolt tehetetlenségi nyomatéka, a gerjesztő tengelyek  $e$  excentricitása,  $m$  tömege és a rájuk ható  $T_1$  és  $T_2$  nyomatékok, illetve az alapozás rugóinak  $k_x, k_y$  merevségei és  $c_x, c_y$  csillapításai láthatóak az 1. ábrán. Ezekből felírhatóak az 1. mellékletben megtalálható mozgásegyenletek.



1. ábra. Merőleges tengelyelrendezésű, lineáris rosta modellje

Ezzel ellentétben, ha a forgórészek tengelyei az anyagáramlás irányával szöget bezárva, döntött elrendezésben állnak, elkerülhetetlen a térbeli mechanikai modell használata. Azaz szükséges bevezetni még három további szabadsági fokot: a  $z$  irányú elmozdulását a gép tömegközéppontjának és a  $\gamma$  és  $\zeta$   $x$ - és  $y$ -tengely körüli elfordulásokat. Így az ilyen fajta gépekre egy összesen nyolc szabadsági fokkal rendelkező modellt kell felállítani [4], amely ábrázolva a 2. ábrán található meg. Ez alapján pedig a mozgásegyenletek egyszerűsített formája a 2. mellékletben lett felírva.



2. ábra. Döntött tengelyelrendezésű, lineáris rosta modellje

Hasonló modelleket írt már fel, egyrészt a merőleges tengely elrendezésű két forgórészes rostákra Chun-Yu [2] és Zhang [10] is, valamint a döntött tengelyű forgórészekkel rendelkező rostákra Fang [4]. Ugyanakkor, míg ezek a szakirodalmi cikkek elsősorban a szinkronizáció stabilitásának vizsgálatára használták ezeket a mechanikai modelleket, addig a jelen dokumentum a rosta paramétereinek a hatását analizálja a szinkronizációs folyamat végeredményére, azaz, hogy különböző beállítású gépek hogyan fognak viselkedni a tranzien্স lecsengését követően.

## VÍZSZINTES ROSTÁK SZINKRONIZÁCIÓS VISELKEDÉSE

A mechanikai szinkronizáció eredményét legegyszerűbben talán a forgórészek elfordulásainak különbségeként adódó fázisszöggel lehet jellemezni. Ettől a fázisszögtől függően fog eltávolodni a gerjesztés iránya a tervezett iránytól, ami megváltoztatja a gép üzemszerű mozgását. Továbbá érdemes még a szakirodalomban „throwing index”-nek, vagy hajítási tényezőnek nevezett jellemzőt is figyelemmel kísérni a vizsgálatok során, amellyel általában a rosta rezgését szokták jellemezni a szakirodalomban [6]:

$$K_v = \frac{A\omega^2}{g \cos\alpha} \quad (1)$$

Itt  $A$  a rezgési amplitúdót,  $\omega$  a rezgési körfrekvenciát,  $g$  a nehézségi gyorsulást,  $\alpha$  pedig a rosta kezdeti döntésszögét jelenti. Jellemzően két forgórészes rostáknál ez a  $K_v = 2.5 \dots 4$  [-] tartományba esik [6].

A rázórosták mozgásfüggvényeinek kiszámítása a mellékletekben található mozgásegyenletek numerikus integrálásával történt, változó lépésközű Runge-Kutta módszer alkalmazásával. A szimulációkhoz felhasznált adatok egy Rodriguez [8] által vizsgált valós rázórosta paraméterei alapján lettek becsülve az 1. táblázat szerint.

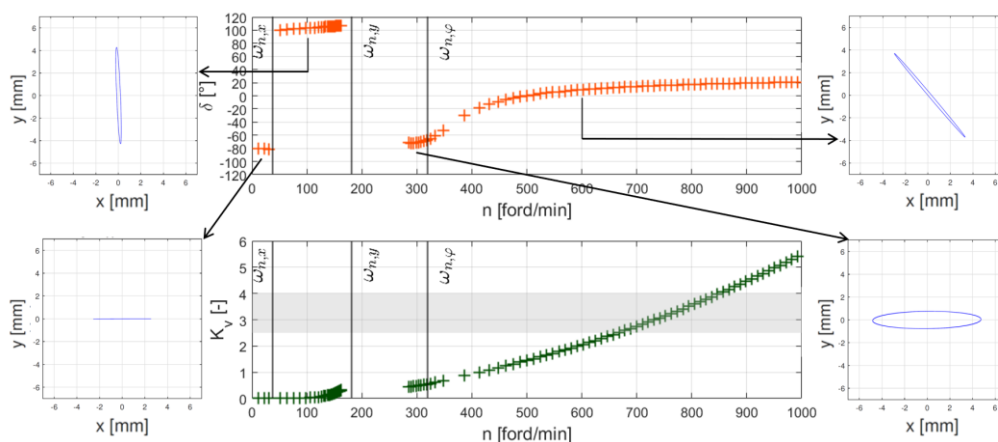
Rostaparaméterek a szimulációk során

1. táblázat

m	M	e	J	$\alpha$	a	b	c	d	f
[kg]	[kg]	[m]	[kgm <sup>2</sup> ]	[°]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]
300	25000	0,2	60000	5	2	3	0,3	0,7	-0,4
l	$\beta$	$ T_{1,2} $	$k_x$	$k_y$	$k_z$	$c_x$	$c_y$	$c_z$	$c_{1,2}$
[m]	[°]	[Nm]	[kN/m]	[kN/m]	[kN/m]	[kNs/m]	[kNs/m]	[kNs/m]	[Nms/rad]
0,5	45	0...400	200	5000	200	40	80	40	3

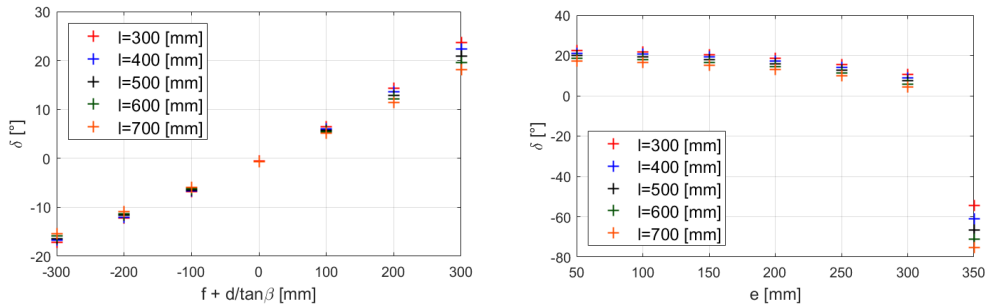
### 2.1. Merőleges tengelyű, vízszintes rosták

Lépésenként növelve a tengelyeket gerjesztő nyomatékot a merőleges elrendezésű rosták attól függően, hogy milyen frekvenciatartományban fognak rezegni, mutatnak különböző szinkronizációs viselkedést, ahogyan az a 3. ábrán látható. Ennek hatására, hogy mely sajátfrekvenciákon lépett már át a rendszer, alakul ki más és más fázisszög érték a szinkronizációs folyamat eredményeként. Ez természetesen a gép mozgásalakját és a hajítási tényezőt is befolyásolja. Összeségében elmondható, hogy a rostát előnyös azon a frekvenciatartományon üzemeltetni, ahol már átlépett minden sajátfrekvenciát, hiszen itt lesz a megfelelő hajítási tényező tartományban a gép, és a fázisszög is itt közelíti meg leginkább az elvárt zérus értéket.



3. ábra. A fázisszög és a hajítási tényező a fordulatszám függvényében és a kialakuló mozgások merőleges tengelyelrendezésű gép esetén

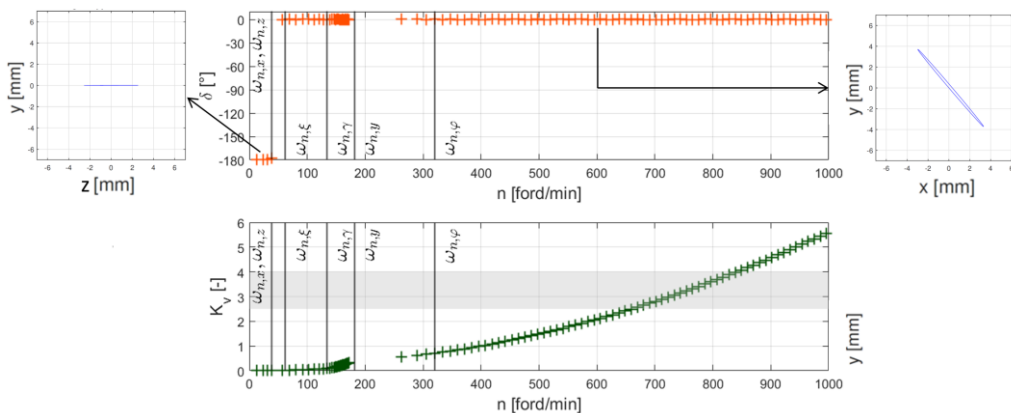
Ennek megfelelően a cikk erre a fordulatszám tartományra gerjesztett rosták esetén vizsgálja a forgórészek helyzetének és az excentricitás mértékének hatását a fázisszögre. Elsőként a forgórészek egymáshoz képesti távolsága lett változtatva az  $l$  paraméter segítségével, majd ezt követően a gerjesztés tervezett hatásvonalának távolsága a tömegközépponttól az  $f$  paraméter variálásával és az excentricitás mértéke az  $e$  mérettel. A 4. ábrán látható grafikonok alapján levonható a következtetés, hogy míg a tengelyek egymáshoz képesti távolságának nincsen számottevő hatása a kialakuló fázisra, addig a fázisszög akkor minimális, ha a gerjesztő erő hatásvonalja minél közelebb esik a gép tömegközéppontjához. Továbbá az excentricitásnak is csak akkor van hatása a kialakuló fázisszögre, ha az nagyon nagyra van választva.



4. ábra. A fázisszög az excenterek helyzetének és excentricitásának függvényében

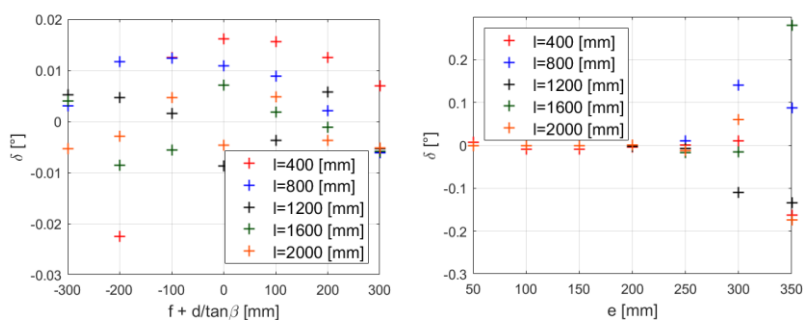
### 2.1. Döntött tengelyű, vízszintes rosták

Hasonló módon elvégezve a vizsgálatokat a döntött elrendezés esetén az adódik a szimulációkból, hogy a nagyon alacsony frekvenciák kivételével a forgó részek minden esetben zérus fáziskülönbséggel szinkronizálódnak. Természetesen a kívánt hajítási tényező értéket itt is csak a magasabb fordulatszámoknál éri el a gép, tehát ebben az esetben is ezen tartományon érdemes a működtetésük, de ennél a fajtánál nem okoz zavart a kialakuló mozgásban, ha nem az összes sajátfrekvencia felett üzemel a rosta.



5. ábra. A fázisszög és a hajítási tényező a fordulatszám függvényében és a kialakuló mozgások döntött tengelyelrendezésű gép esetén

Továbbá a forgórészek helyzetét és excentricitását hasonlóan változtatva, mint a merőleges tengelyelrendezés esetén, az adódik, hogy egyik paraméter sem befolyásolja drasztikusan a kialakuló fázisszöget és ezáltal a mozgásokat, amint az a 6. ábrán látszik is.



6. ábra. A fázisszög az excenterek helyzetének és excentricitásának függvényében

## AZ EREDMÉNYEK ÖSSZEFOGLALÁSA

Összességében tehát elmondható, hogy abban az esetben, ha a forgórészek tengelyei a rostán az anyagáramlás irányával szöget zárnak be, tehát döntött elrendezésben készülnek, akkor a rosta működése és szinkronizációja az indítás során sokkal stabilabb, kevésbé érzékeny a forgórészek elhelyezésére és a felfutási és leállítási folyamat során sem alakul ki rajta nem kívánatos mozgás. Ennél fogva, mivel így a forgórészek a rosta tetején, oldalán, vagy akár az alján is elhelyezhetőek, kompaktabb gépek gyárthatóak ilyen kialakításban.

Ugyanakkor nagy méretű rostáknál, ahol a gerjesztő excentrikus tengelyek is jelentős tömegűek, érdemes a merőleges elrendezést választani, mert ilyenkor a tengelyeket támasztó csapágyakon nem ébred axiális erő, és a beindítás során a gerjesztés nem fogja a megerősítetlen oldalsó irányba mozgatni a rostatestet.

## IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Chen, X., Kong, X., Dou, J., Liu, Y., Wen, B., Numerical and experimental investigation on self-synchronization of two eccentric rotors in the vibration system', *Journal of Vibroengineering*, 2016, 18, 744–758.
- [2] Chun-Yu, Z., Yi-Min, Z. & Bang-Chun, W., Synchronisation and general dynamic symmetry of a vibrating system with two exciters rotating in opposite directions', *Chinese Physics B*, 2010, 19(3), 030301.
- [3] CIMA, VSMA Vibrating Screen Handbook, Milwaukee, 1998.
- [4] Fang, P., Peng, H., Changcheng, D., Zou, M., Hou, D., Du, M. & Chai, G., Synchronous state of unbalanced rotors in a three-dimensional space and far-resonance system', *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 2020, 234(1), 108–122.
- [5] Feng, H., Peng, L., Fang, R., Zhang, L., Ma, W. & He, X., 'A more accurate dynamic model for dual-side excitation large vibrating screens', *Journal of Vibroengineering*, 2018, 20(2), 858–871.
- [6] He, X. & Liu, C., Dynamics and screening characteristics of a vibrating screen with variable elliptical trace', *Mining Science and Technology (China)*, 2009, 19(4), 508–513.
- [7] Liu, Y., Suo, S., Meng, G., Shang, D., Bai, L. & Shi, J., 'A theoretical rigid body model of vibrating screen for spring failure diagnosis', *Mathematics*, 2019, 7(3).
- [8] Rodriguez, C. G., Moncada, M. A., Dufeu, E. E. & Razeto, M. I., Nonlinear model of vibrating screen to determine permissible spring deterioration for proper separation', *Shock and Vibration*, 2016.
- [9] Shah, K. P., Construction, Working and Maintenance of Electric Vibrators and Vibrating Screens, 2018.
- [10] Zhang, T., Wen, B. & Fan, J., Study on synchronization of two eccentric rotors driven by hydraulic motors in one vibrating system', *Shock and Vibration* 4, 1997, 305–310.

## 1. MELLÉKLET: A MERŐLEGES TENGELYŰ, KÉT FORGÓRÉS ZES ROSTA MOZGÁSEGYENLETEI

$$\sum_{i=1}^2 m_i \left[ \ddot{x} - r_i \sin(\alpha + \gamma_i + \varphi) \ddot{\varphi} - r_i \cos(\alpha + \gamma_i + \varphi) \dot{\varphi}^2 - e_i \dot{\vartheta}_i^2 \cos(\vartheta_i) - e_i \ddot{\vartheta}_i \sin(\vartheta_i) \right] +$$

$$M \ddot{x} + [c(c_{xA} + c_{xB}) \cos(\alpha + \varphi) + ac_{xA} \sin(\alpha + \varphi) + bc_{xB} \sin(\alpha + \varphi)] \dot{\varphi} +$$

$$(c_{xA} + c_{xB}) \dot{x} + (bk_{xB} - ak_{xA}) \cos(\alpha + \varphi) + c(k_{xA} + k_{xB}) \sin(\alpha + \varphi) +$$

$$(ak_{xA} - bk_{xB}) \cos(\alpha) + c(k_{xA} + k_{xB}) \sin(\alpha) + (k_{xA} + k_{xB})x = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^2 m_i \left[ \ddot{y} + r_i \cos(\alpha + \gamma_i + \varphi) \ddot{\varphi} - r_i \sin(\alpha + \gamma_i + \varphi) \dot{\varphi}^2 - e_i \dot{\vartheta}_i^2 \sin(\vartheta_i) + e_i \ddot{\vartheta}_i \cos(\vartheta_i) \right] +$$

$$M \ddot{y} + [c(c_{yA} + c_{yB}) \sin(\alpha + \varphi) - ac_{yA} \cos(\alpha + \varphi) + bc_{yB} \cos(\alpha + \varphi)] \dot{\varphi} +$$

$$(c_{yA} + c_{yB}) \dot{y} + (bk_{yB} - ak_{yA}) \sin(\alpha + \varphi) - c(k_{yA} + k_{yB}) \cos(\alpha + \varphi) +$$

$$(ak_{yA} - bk_{yB}) \sin(\alpha) + c(k_{yA} + k_{yB}) \cos(\alpha) + (k_{yA} + k_{yB})y = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^2 m_i \left[ r_i^2 \ddot{\varphi} - r_i \sin(\alpha + \gamma_i + \varphi) \ddot{x} + r_i \cos(\alpha + \gamma_i + \varphi) \ddot{y} + 2r_i \cos(\alpha + \gamma_i + \varphi) \dot{x} \dot{\varphi} + \right.$$

$$\left. + e_i r_i \ddot{\vartheta}_i \cos(\alpha + \gamma_i + \varphi - \vartheta_i) + e_i r_i \dot{\vartheta}_i^2 \sin(\alpha + \gamma_i + \varphi - \vartheta_i) + c_i (\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}_i) \right] +$$

$$J \ddot{\varphi} + \{c_{xA}(c \cos(\alpha + \varphi) + a \sin(\alpha + \varphi))^2 + c_{xB}(c \cos(\alpha + \varphi) - b \sin(\alpha + \varphi))^2 +$$

$$+ c_{yA}(a \cos(\alpha + \varphi) - c \sin(\alpha + \varphi))^2 + c_{yB}(b \cos(\alpha + \varphi) + c \sin(\alpha + \varphi))^2 +$$

$$+ [c_{xA}(c \cos(\alpha + \varphi) + a \sin(\alpha + \varphi)) + c_{xB}(c \cos(\alpha + \varphi) - b \sin(\alpha + \varphi))] \dot{x} +$$

$$[-c_{yA}(a \cos(\alpha + \varphi) - c \sin(\alpha + \varphi)) + c_{yB}(b \cos(\alpha + \varphi) + c \sin(\alpha + \varphi))] \dot{y} \dot{\varphi} +$$

$$k_{xA}(c \cos(\alpha + \varphi) - b \sin(\alpha + \varphi))(c \sin(\alpha + \varphi) - a \cos(\alpha + \varphi) + a \cos(\alpha) - c \sin(\alpha)) +$$

$$k_{xB}(c \cos(\alpha + \varphi) + a \sin(\alpha + \varphi))(c \sin(\alpha + \varphi) + b \cos(\alpha + \varphi) - b \cos(\alpha) - c \sin(\alpha)) +$$

$$k_{yA}(a \cos(\alpha + \varphi) - c \sin(\alpha + \varphi))(a \sin(\alpha + \varphi) + c \cos(\alpha + \varphi) - c \cos(\alpha) - a \sin(\alpha)) +$$

$$k_{yB}(b \cos(\alpha + \varphi) + c \sin(\alpha + \varphi))(b \sin(\alpha + \varphi) - c \cos(\alpha + \varphi) + c \cos(\alpha) - b \sin(\alpha)) +$$

$$[k_{xA}(c \cos(\alpha + \varphi) + a \sin(\alpha + \varphi)) + k_{xB}(c \cos(\alpha + \varphi) - b \sin(\alpha + \varphi))]x +$$

$$[-k_{yA}(a \cos(\alpha + \varphi) - c \sin(\alpha + \varphi)) + k_{yB}(b \cos(\alpha + \varphi) + c \sin(\alpha + \varphi))]y = 0 \quad (4)$$

$$m_i e_i^2 \ddot{\vartheta}_i - m_i e_i \sin(\vartheta_i) \ddot{x} + m_i e_i \cos(\vartheta_i) \ddot{y} + m_i e_i r_i \cos(\alpha + \gamma_i + \varphi - \vartheta_i) \ddot{\varphi}_i -$$

$$m_i e_i r_i \sin(\alpha + \gamma_i + \varphi - \vartheta_i) \dot{\varphi}^2 + c_i (\dot{\vartheta}_i - \dot{\varphi}) = T_{fi}, \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

Ahol:  $r_i$  és  $\gamma_i$  a forgórészek középpontjának helyzetei polárkoordinátákkal.

## 2. MELLÉKLET: A DÖNTÖTT TENGYELŰ, KÉT FORGÓRÉSZES ROSTA MOZGÁSEGYENLETEINEK LEVEZETÉSE

A másodfajú Lagrange-egyenlettel felírhatóak a mozgásegyenletek, ezek hossza miatt itt csak a kiindulási lépések vannak közölve:

$$\frac{d}{dt} \frac{dT}{dq_k} - \frac{dT}{dq_k} + \frac{dD}{dq_k} + \frac{dU}{dq_k} = Q_k \quad (6)$$

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{v}_i^2; \quad U = \frac{1}{2} \sum_{j=A,B,C,D} \mathbf{k}_j \mathbf{x}_j^2; \quad D = \frac{1}{2} \sum_{j=A,B,C,D} \mathbf{c}_j \mathbf{v}_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 c_i \dot{\vartheta}_i^2 \quad (7)$$

$$\text{Ahol: } \mathbf{k}_j = [k_{xj}, k_{yj}, k_{zj}]^T; \quad \mathbf{c}_j = [c_{xj}, c_{yj}, c_{zj}]^T \text{ és } \mathbf{Q} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, T_{f_1}, T_{f_2}]^T \quad (8)$$

Illetve az általános koordináták vektora:  $\mathbf{q} = [x, y, z, \gamma, \xi, \varphi, \vartheta_1, \vartheta_2]^T$ , és a gerjesztő tömegek sebességei:

$$\mathbf{v}_{1,2} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{1,2} + \begin{bmatrix} -e_{1,2} \cos(\theta) \cos(\vartheta_{1,2}) \dot{\vartheta}_{1,2} \\ e_{1,2} \sin(\theta) \cos(\vartheta_{1,2}) \dot{\vartheta}_{1,2} \\ -e_{1,2} \sin(\vartheta_{1,2}) \dot{\vartheta}_{1,2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ahol a szögsebesség és a helyzetvektor:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\gamma} - \sin(\xi) \dot{\varphi} \\ \cos(\gamma) \dot{\xi} + \sin(\gamma) \cos(\xi) \dot{\varphi} \\ \cos(\gamma) \cos(\xi) \dot{\varphi} - \sin(\gamma) \dot{\xi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{1,2} = \begin{bmatrix} f - e_{1,2} \cos(\beta) \sin(\vartheta_{1,2}) \\ d + e_{1,2} \sin(\beta) \sin(\vartheta_{1,2}) \\ \pm l/2 + e_{1,2} \cos(\vartheta_{1,2}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

A rugók végpontjainak elmozdulásai és a hozzájuk tartozó forgatómátrixok:

$$\mathbf{x}_{(A,B,C,D)} = [x, y, z]^T + (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \cdot \mathbf{r}_{(A,B,C,D)}, \quad \mathbf{v}_{(A,B,C,D)} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{(A,B,C,D)} \quad (11)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\xi) & 0 & \sin(\xi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\xi) & 0 & \cos(\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \alpha) & -\sin(\varphi + \alpha) & 0 \\ \sin(\varphi + \alpha) & \cos(\varphi + \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} -a \\ -c \\ h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_B = \begin{bmatrix} b \\ -c \\ h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_C = \begin{bmatrix} b \\ -c \\ -h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_D = \begin{bmatrix} -a \\ -c \\ -h \end{bmatrix} \quad (14)$$