Numerikus modális analízis izogeometrikus módszerrel

Numerical modal analysis using isogeometric method

TAKÁCS Donát, MSc hallgató[1], Dr. HÉNAP Gábor, egyetemi adjunktus[2]

[1,2] Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem [2]Műszaki Mechanika Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3; tel.: +36 1 463-1111
Központi fax: +36 1 463-1110, www.bme.hu
[1] td1521@hszk.bme.hu, [2] henapg@mm.bme.hu

Kivonat

A végeselem-módszer (VEM) egy új megközelítése az izogeometrikus analízis (IGA), mely NURBS-alapú elemek használatával túlmutat a klasszikus VEM lehetőségein. Ezt alkalmazva numerikus modális analízis esetén a sajátfrekvenciák meghatározása is pontosabbá válik: a vizsgált numerikus példákban mind az Euler-Bernoulli-féle, mind az újszerű, Timoshenko-féle rúdelméleten alapuló modellek esetében jelentős a bemutatott IGA-alapú numerikus módszer előnye.

Kulcsszavak: végeselem-módszer, izogeometrikus analízis, modális analízis, Euler-Bernoulli rúdelmélet, Timoshenko-rúdelmélet

Abstract

Isogeometric analysis (IGA) is a new approach to finite element analyis (FEA), that greatly extends the possibilities of traditional FEA by employing NURBS-based elements. In numerical modal analysis, the estimation of natural frequencies by IGA also get more accurate: in the studied numerical examples the IGA-based numerical method has considerable advantages both in a numerical method based on Euler-Bernoulli beam theory, and in a new numerical model based on Timoshenko beam theory.

1. BEVEZETÉS

Az izogeometrikus analízis a hagyományos VEM egy viszonylag új kiterjesztése, melyet Hughes és társai 2005-ös cikke [1] alapozott meg, majd további eredmények követtek. Az módszer fő motivációja, hogy lényeges különbségek vannak a mérnöki szerkezetek (ill. azok CAD-modelljei) és az azok analíziséhez használt végeselemes hálók között.

Míg a VEM-analízis segítségével vizsgált szerkezetek geometriája legtöbbször digitálisan pontosan elérhető a CAD-modellek formájában, ezek szinte soha nem használhatóak egy az egyben a VEM-analízis során. A hagyományos VEM-ben elterjedten használt izoparametrikus elemek egy alapvető hiányossága, hogy a megoldásmező interpolációjára használt függvények által adódó geometria van rákényszerítve az elemek és így a teljes szerkezet geometriájára. Mivel ezek a formafüggvények (pl. a Lagrange-polinomok) általában nem alkalmasak tetszőleges (mérnöki gyakorlatban előforduló) geometria egzakt leírására, a belőlük adódó háló definíció szerint nehézkesen alkalmazható a geometriai interpolációra.

Az izogeometrikus analízis ezen izoparametrikus elképzelés megfordítása. Ugyanis B-spline, NURBS (T-Spline stb.) objektumokkal egzaktul reprezentálhatóak a mérnöki gyakorlatban előforduló szerkezetek, az ezen objektumokat felépítő spline-bázisok pedig végeselemes formafüggvényekként is alkalmazhatóak. Az alábbi szakaszban a B-spline görbék egy rövid bemutatására szorítkozunk.

1.1 B-Spline görbék

Egy n bázisból álló, p polinomiális fokú B-spline görbe bázisfüggvényeit egyértelműen meghatározza

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n+p+1}\}$$

csomóvektor, ahol $\xi_i \in \mathbb{R}$ az i-edik csomó. Ezeket felhasználva a B-spline bázisok a Cox-de Boor rekurziós formula szerint határozhatóak meg:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases},$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi).$$

Ezen bázisok segítségével és n darab $\boldsymbol{B}_i \in \mathbb{R}^d$ kontrollpont definiálásával hozható létre egy B-spline görbe:

$$\boldsymbol{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi) \boldsymbol{B}_i.$$

2. IZOGEOMETRIKUS HAJLÍTOTT RÚDELEMEK

Belátható, hogy a fenti bázisok alkalmasak arra, hogy végeselemes analízisben formafüggvényként használjuk őket [2, 70-71. o.]. A numerikus példák során tisztán hajlított, síkbeli rúdelemek sajátrezgéseit vizsgáltuk, melyek anyaga homogén, izotróp és lineárisan rugalmas. Ezen elemek konkrét vizsgálatára azért esett a választás, mert a megfelelő rúdelméletekben (egyszerű esetekben) az analitikus megoldással is részletekbe menően össze lehet vetni a numerikus eredményeket.

Az Euler-Bernoulli elmélet esetében a [3] szerinti egyenleteken alapuló numerikus módszert implementáltunk. Ehhez hasonlóan a Timoshenko-féle elmélet esetében is olyan elemeket vezettünk le, melyek tisztán elmozdulás alapúak. Az izogeometrikus módszer sajátossága, hogy a spline-bázisok felhasználásval a formafüggvények elemhatárokon vett tetszőleges mértékű folytonossága előírható: így az elemek csomópontjaiban nincsen szükség szögelfordulás-szabadsági fokra. Az utóbbi modellt a Timoshenko-féle rúdelmélet [4] szerinti csatolt egyenleteinek összevonásából származtattuk a Galjorkin-módszer segítségével.

3. NUMERIKUS TESZTPÉLDÁK

Két végén támasztott rudak sajátfrekvenciáit határoztuk meg egyre növekvő elemszám mellett egy, általunk *Wolfram Mathematicában* implementált programmal. A numerikus szimulációk során használt anyagjellemzőket úgy választottuk, hogy mind az Euler-Bernoulli, mind a Timoshenko-elmélet érvényes maradjon, valamint megfigyelhető legyen a Timoshenko-elmélet esetében megjelenő kétféle rezgési mód is.

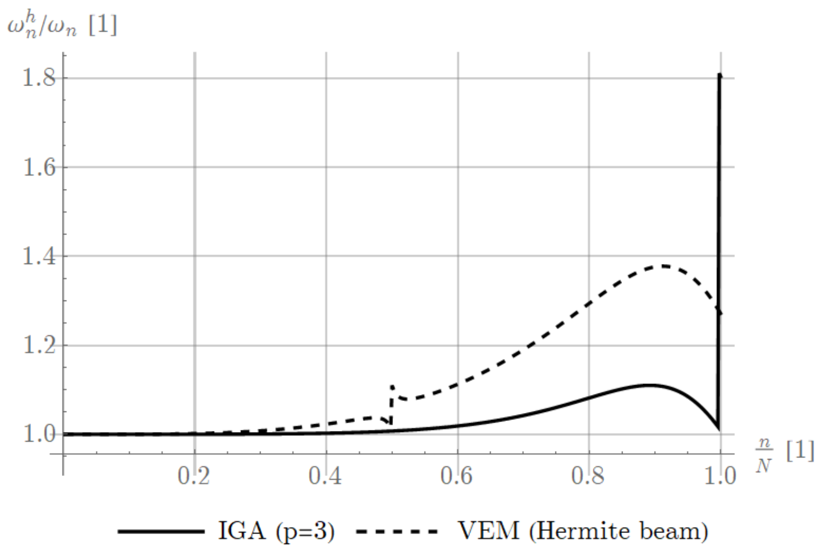
3.1 Numerikus spektrumok

A numerikus módszer pontosságának értékelésére egy lehetséges módszer, hogy az azzal számított sajátfrekvenciák normalizált diszkrét spektrumát vizsgáljuk. Egy ilyen spektrumot egy N szabadsági fokú numerikus modellben, az $\{\omega_i^{\mathrm{h}}\}$ becsült sajátfrekvenciák esetén a

$$P = \left(\frac{n}{N}; \frac{\omega_n^{\mathrm{h}}}{\omega_n} \right)$$

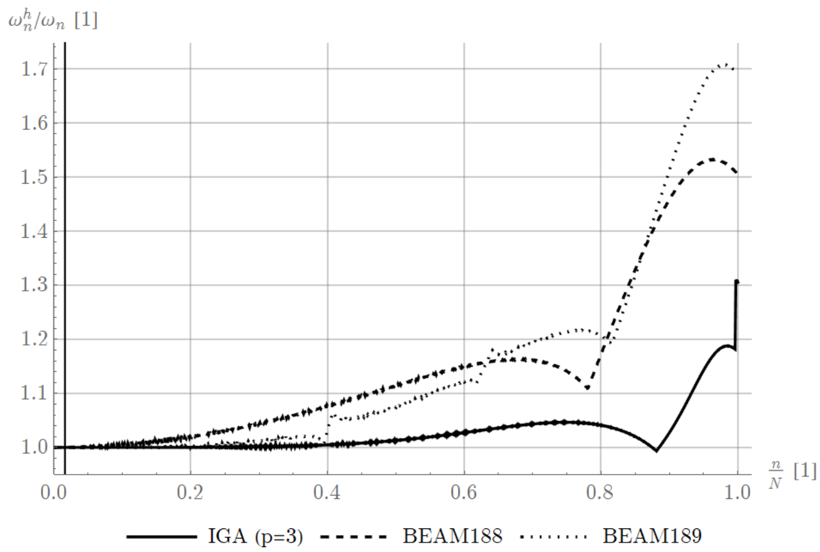
pontok alkotnak, ahol ω_n az n-edik, pontosnak tekintett sajátkörfrekvencia, mely a numerikus modellhez tartozó rúdelméletből származtathatunk, és amely érték felé a numerikus módszer eredménye az elemszám növelése mellett konvergál. Ezen spektrumok folytonos szakaszai gyakran invariánsak a szabadsági fokok számára, és analitikusan is kiszámíthatóak, ezért egy konkrét numerikus módszerre jellemzőnek tekinthetőek.

Az 1. ábra az Euler-Bernoulli elméleten alapuló numerikus modellek spektrumait szemlélteti. Jól látható, hogy a referenciaként használt, hagyományos VEM-ben használt formafüggvényekkel származtatott harmadfokú Hermite-polinomos elemeknél jelentősen jobban konvergál az egzakt megoldáshoz az IGA alapú modell.



1. ábra *Numerikus spektrumok az Euler-Bernoulli rúdelméletből származtatott elemek esetén, 500 szabadsági fokú modellek használatával*

Még látványosabb a különbség a 2. ábrán látható, Timoshenko-rúdelméleten alapuló elemek spektrumai esetén. Itt a saját módszerünket az iparban is elterjedten használt, ANSYS Mechanical szoftver BEAM188 és BEAM189 elemek konvergenciájával hasonlítottuk össze.



2. ábra *Numerikus spektrumok a Timoshenko-rúdelméletből származtatott elemek esetén, 1000 szabadsági fokú modellek használatával*

3.2 Az egyes sajátfrekvenciák konvergenciája

Egy másik lehetőség a módszerek kiértékelésére, ha nem a teljes spektrumot, hanem egyes sajátfrekvenciák növekvő elemszám melletti konvergenciáját vizsgáljuk. Ez kevesebb információt ad a teljes numerikus módszerről, azonban a gyakorlatban általában inkább erre van szükség, hiszen általában csak az első 5-10 sajátfrekvencia releváns a mérnöki gyakorlatban. Sajnos a hely hiánya miatt ezeket az eredményeket jelen összefoglalóban nem tudjuk bemutatni, azonban az előadásunkban ezekre az eredményekre is kitérünk. Az IGA konvergenciája ezen mérték szerint is számottevően jobbnak bizonyult a vizsgált numerikus példákban a hagyományos VEM-hez képest.

HIVATKOZÁSOK

[1] T.J.R Hughes – J.A. Cottrell – Y. Bazilevs: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. Computer methods in applied mechanics and engineering, 194. évf. (2005) 39-41. sz., 4135–4195. p.

[2] A. Cottrell – T.J.R. Hughes – Y. Bazilevs: Isogeometric Analysis. 2009, John Wiley & Sons

[3] J. Cottrell – R. Reali – Y. Bazilevs – T.J.R. Hughes: Isogeometric analysis of structural vibrations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195. évf. (2006), 5257–5296.

[4] K.F. Graff: Wave Motion in Elastic Solids. 1991, Dover Publications. ISBN 9780486667454