

Elliptikus héjak átpattanását meghatározó kritikus paraméterek numerikus és kísérleti vizsgálata

Experimental and numerical characterization of critical parameters in elliptical shell snap-through

PIRI Barnabás¹ hallgató, Dr. BEREZVAI Szabolcs² adjunktus

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék,
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

www.mm.bme.hu

¹barnabaspiri@gmail.com, ²berezvai@mm.bme.hu

Abstract

Soft materials have many engineering applications due to their favourable mechanical properties like flexibility or energy absorption. The goal of this contribution is to investigate the snap-through instability of elliptical shells and analyse the critical (loading- and geometric) values which determines the main characteristics of the snap-through. The phenomena were investigated using quasi-static finite element models, simplified analytical calculations and experiments.

Keywords: soft materials, instability, snap-through, finite element modelling, experiments

Kivonat

A lágy, rugalmas anyagoknak számos mérnöki alkalmazása van kedvező mechanikai tulajdonságaik (energiaelnyelés és tárolás, tömeg) miatt. Kutatásunk célja elliptikus lágy héjak átpattanása közben megfigyelhető instabilitási jelenség vizsgálata, és az átpattanás jellemzésére használható kritikus paraméterek vizsgálata analitikus, szimulációs és kísérleti módszerekkel.

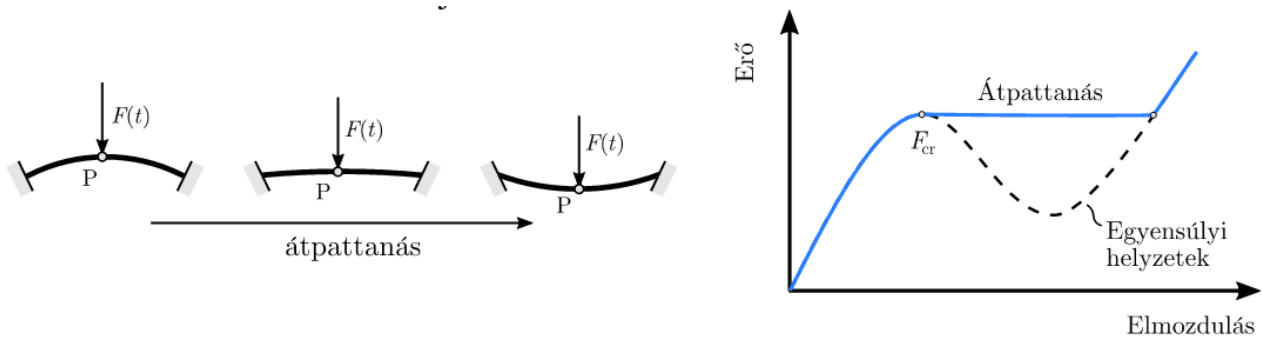
Kulcsszavak: lágy anyagok, instabilitás, átpattanás, végeelem módszer, mérések

1. BEVEZETÉS

A lágy, gumyszerű anyagok kedvező mechanikai tulajdonságaiknak (rugalmasság, energia elnyelés, könnyű előállíthatóság, biokompatibilitás) köszönhetően számos mérnöki alkalmazással rendelkeznek. Napjainkban egyre nagyobb népszerűségnek örvend a lágy robotika témaköre, amely lágy anyagokra épülő eszközök tervezésével és működtetésével foglalkozó tudományág [1]. A pontos tervezéshez azonban nélkülözhetetlen a robotokat felépítő szerkezeti anyagok – szilikonok, gumik – pontos viselkedésének megértése és leírása. Ezen mechanikai viselkedés leírása azonban nem egyszerű feladat, mivel a lágy anyagok nagy alakváltozásokat és nemlineáris feszültség-alakváltozás karakterisztikát mutatnak, amelyek gyakran párosulnak nemlineáris geometriai- és terhelési esetekkel.

Rugalmas szerkezeteknek több egyensúlyi helyzetét tudjuk megkülönböztetni, amelyek lehetnek stabil vagy instabil egyensúlyi helyzetek [2]. Az átpattanás két stabil helyzet közötti (általában gyors) átmenetet jelenti, mely során a szerkezetben felhalmozott rugalmas alakváltozási energia hirtelen felszabadul. Amennyiben pontosan ismerjük ezen folyamat végbemenetét, a rendszerből kinyerhető energiamennyiség optimalizálásával különböző feladatokat tudunk végrehajtani. Egy rugalmas alakváltozásra képes rendszer általános karakterisztikáját az erő-elmozdulás kapcsolat feltáráásával tudjuk jellemezni, amely ezen probléma esetében magasfokú nemlinearitást mutat [2]. Az egyensúlyi görbét szimulációs eljárások segítségével határozhatjuk meg, mivel mérések során az instabil helyzetek nem érhetők el, erre mutat példát az 1. ábra.

A mérések során kétféle eljárást tudunk megkülönböztetni: erő- és elmozdulás kontrollált mérési eljárások. Előbbi során meghatározott erőt fejtünk ki a szerkezetre, és mérjük az elmozdulást, míg utóbbinál adott elmozdulás által indukált erőt mérjük.



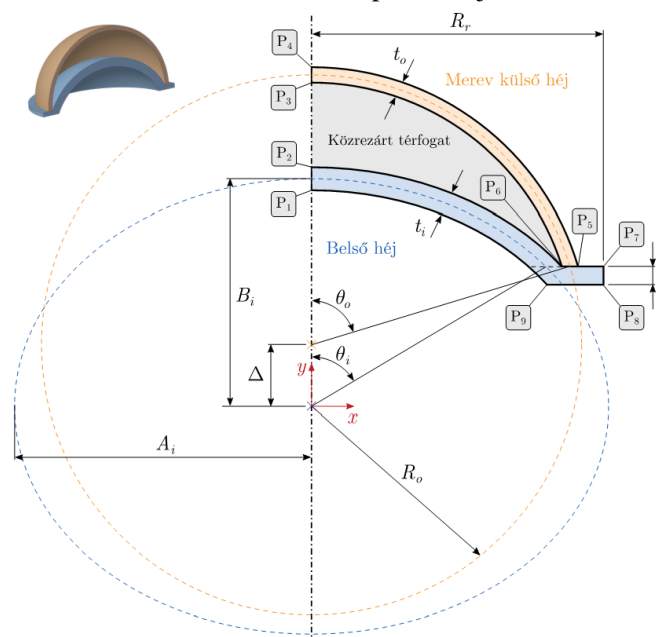
1. ábra. Az átptattanás értelmezése és a szerkezet egyensúlyi görbéje

Ezen cikk célja az átptattanás jelenségének vizsgálata elliptikus geometriával rendelkező lágy héjak esetében, amely egy kiterjesztése a szakirodalomban már megtalálható gömbhéj geometrián alapuló héjaknak. A tanulmány három módszert mutat be, amelyek alkalmasak lehetnek a jelenség karakterizálására. Elsőként kvázi-statisztikus végeleemes modellek felépítésével egy átfogó képet kaptunk a jelenséget befolyásoló paraméterekről. Ezen szimulációs eredményeket egy saját fejlesztésű mérőberendezés segítségével validáltuk, különböző terhelési eljárások alkalmazásával. Végül egy analitikus eljárás került kidolgozásra, amely pontosságát empirikus összefüggések alkalmazásával növeltük.

2. ALKALMAZOTT MÓDSZEREK

2.1. Az elliptikus héj geometriai felépítése

A geometriai kialakítást B. Gorissen által írt „Inflatable soft jumper inspired by shell snapping” című cikk inspirálta, ahol teljesen szimmetrikus, gömbhéj geometriát modelleztek és készítettek el [3]. Azonban nyitott kérdés marad, hogy milyen változtatást okoz a geometriai pontos alakja. Az elliptikus geometria előnye, hogy több leíró paraméter áll rendelkezésünkre, amelyek hatásait egy paramétervizsgálat során hatékonyan fel tudjuk térképezni. Az alább látható 2. ábra részletei az elliptikus héj kialakítását.



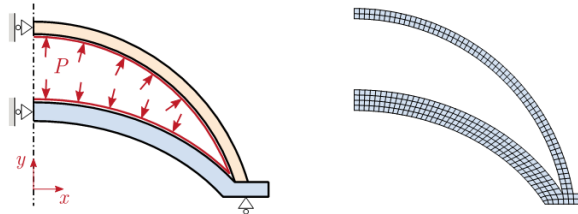
2. ábra. A kidolgozott geometriai kialakítás

Amennyiben a belső és külső héj által közrezárt térfogatot belső nyomással terheljük, az alsó héj lefelé kezd elmozdulni. Egy kritikus deformáció elérése után megtörténik az átptattanás, és az alsó héj a második stabil

helyzetébe kerül. A geometriai kialakítást meghatározó fő paraméterek a következők: a belső héj ellipsziséget meghatározó féltengelyek mérete (A_i , B_i), a héj nyílásszöge (θ_i) és a héj vastagsága (t_i).

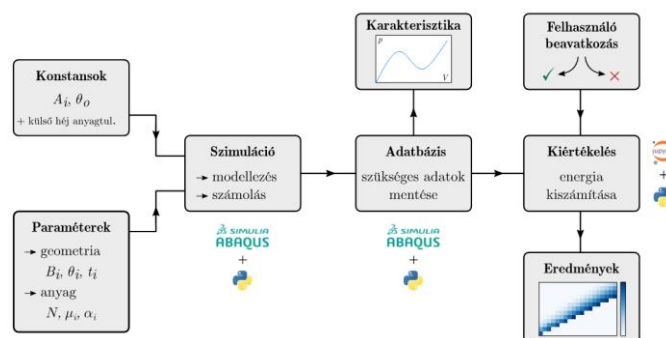
2.2. Kvázi-statisztikus végelem modellek

Mivel a geometria, illetve a terhelési peremfeltételek is teljesen szimmetrikusnak feltételezettek, így a numerikus szimulációk során 2D axiszimmetrikus modellekkel dolgoztunk. Ezek alacsony elemszáma lehetővé tette a számítási kapacitás nagymértékű növelését, így számos geometriai konfiguráció kiértékelését végeztük el. A végelem modellek felépítése az ABAQUS [4] szoftverben történt, Python scriptek segítségével. Az elkészített programcsomagok lehetővé tették több száz szimulációs modell automatikus felépítését, számítását és kiértékelését.



3. ábra. Végelem modell vázlata (balra) és a kialakított strukturált háló (jobbra)

A térfogatban tárolt folyadék hatását az ún. „Fluid Cavity” interakció segítségével definiáltuk, ahol a folyadékmodell egy összenyomhatatlan (víz) fizikai modell volt. A nemlineáris egyenletrendszer megoldására a RIKS (ív hossz) metódust használtuk [4, 5]. Az szilikonból készült héjak anyagi viselkedését az összenyomhatatlan, másodrendű Ogden-féle hiperelasztikus anyagmodell segítségével írtuk le, melynek paramétereit egytengelyű húzó és nyomókísérletek segítségével állapítottuk meg. A numerikus számítás lépéseit az alábbi blokkdiagram foglalja össze, amelyből látható, hogy a rendszer karakterisztikus (nyomás – térfogat) görbéje eredményként adódik.

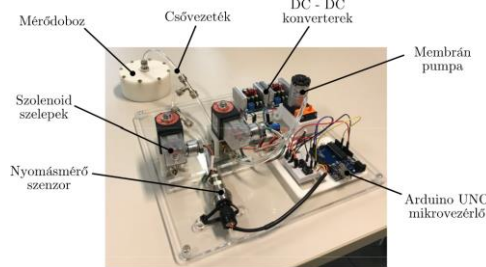


4. ábra. A szimulációs eljárás blokkdiagramja

2.3. Mérési elrendezés

A szakirodalom többféle mérési lehetőséget mutat be, azonban ezek közül nem tisztázott, hogy melyik adja a legpontosabb eredményeket [6]. Ahogy azt az előző pontban bemutattuk, a végelem modellek a belső nyomás modellezésével éltek, így kézenfekvő volt, hogy a mérőberendezést is ezek alapján építsük meg. A belső térfogatot megfelelő nyomású folyadékkal kellett megtöltenünk, amely egy membránpumpa (*Kamoer KLP01*) segítségével történt. A rendszerben történő folyadékáramlást szolenoid mágnesszelepek (*M&M D263DVG*) segítségével biztosítottuk, amelyeket analóg elektronikus jelekkel (MOSFET-ek segítségével) lehet vezérelni. A héj nyomás – térfogat görbéjének kiméréséhez azonban szükséges mérnünk a nyomást, amihez egy közvetlen nyomásmérő szenzort (*Betterbeita BT-P8000*) alkalmaztunk. A térfogat (azaz a térfogatváltozás) a mérés során a pumpa által biztosított térfogatáramból és a mérés időtartamából számítható, mivel az alkalmazott közeg (víz) összenyomhatatlan az alkalmazott nyomástartományban. A méréshez természetesen a kiválasztott héjakat le kell gyártani, amelyhez egy kétkomponensű szilikon anyagot (*ELASTOSTIL M 4061*) választottunk. A két komponens összekeverése után a szilikont 3D nyomtatott formákba öntöttük, majd egy szárító kemencében kb. 15-20 perc alatt vulkanizáltuk a megfelelő szerkezet eléréséhez. A kész héjak tisztítás után egyből használhatók a mérési összeállításban. A mérőberendezést térfogat-, illetve nyomásvezérlési lehetőséggel láttuk el. Előbbi során a zárt rendszerbe bejuttatott folyadék

térfogatáramát vezéreljük, amely egyszerű feladat, mivel a folyadékot szolgáltató pumpa munkagörbéje ismert. A nyomásvezérlés azonban már valamilyen szabályozási kört igényel, mivel a rendszer nyomása csak közvettem, különböző térfogatáramok beállításával szabályozható. Ehhez egy PID szabályozót alkalmaztunk, amelynek paramétereit számos mérés alatt hangoltuk be *MATLAB* segítségével. A paraméterek meghatározása során kiemelt figyelmet szenteltünk a gyors beavatkozásnak, illetve a túllövés mértékének minimalizálására.



5. ábra. A megépített mérőberendezés

2.4. Analitikus számítások

Az analitikus számításokhoz az ún. héjelméletet használtuk [2, 7]. Fontos megjegyezni, hogy az elmélet itt is teljes szimmetriát feltételez, mind a geometriai kialakítást, mind a deformációkat és peremfeltételeket tekintve. Az elemi héjelem egyensúlyát vizsgálva a x és y irányban történő deformációk (u és v) meghatározására egy kapcsolt parciális differenciálegyenletet kapunk, amely az általunk használt peremfeltételek esetében megoldható az ún. kritikus nyomásra:

$$q_{cr} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{a}\right)^2, \quad (1)$$

ahol E a héj anyagának rugalmassági modulusza, ν az anyag Poisson-tényezője (jelen esetben az összenyomhatatlanság miatt $\nu = 0.5$), továbbá h a héj vastagsága és a a héj sugara. Fontos megjegyezni, hogy az eredeti héjelmélet csak vékony héjakra alkalmazható, amely matematikailag a $h/a \ll 1$ egyenlőtlenséggel tudunk megfogalmazni [2, 7]. Vastag héjakra általánosan nem létezik fentihez hasonló analitikus megoldás, azonban *Hill* bemutatta, hogy egyes anyagmodellek esetében zárt alakban megadható a fenti kifejezés [8]. Ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy szisztematikus eltérést találtak a fenti elmélettel számított és tényleges kísérletek közben mért értékek között: az elmélet által prediktált értékek akár a mért értékek négyszeresét is elérték. A fent bemutatott elmélet eredetileg csak gömbhéj geometriával rendelkező héjakra használható, az általunk szimulált és mért elliptikus héjak esetében nem. Azonban minden elliptikus héjhoz tudunk társítani egy ún. ekvivalens kör geometriát, amely az adott régióban (lokálisan) jól közelíti az eredeti elliptikus geometriát. A módszer célja, hogy megtalálja az az R_{ic} és θ_{ic} paraméterekkel rendelkező kört, amely lokálisan a legjobban közelíti az A_i , B_i és θ_i paraméterekkel jellemezhető elliptikus szegmenst. Ezen paraméterek optimalizálására egy szoftvert hoztunk létre (szintén a Python programozási nyelv segítségével), amely a kiértékelés során automatikusan megkeresi a legjobb párosításokat.

3. EREDMÉNYEK

A különböző módszerek összehasonlítását az alábbi táblázatban meghatározott paraméterkombinációkkal végeztük el, az előzetes szimulációs eredményekre támaszkodva. Látható, hogy a héjak csak a B_i paraméter értékét illetően térnek el, amely azt fejezi ki, hogy az adott héj mennyire tér el az alapértelmezett gömbhéjtől. Megfigyelhető, hogy az egyik héj ezáltal gömbhéj geometriára redukálódik.

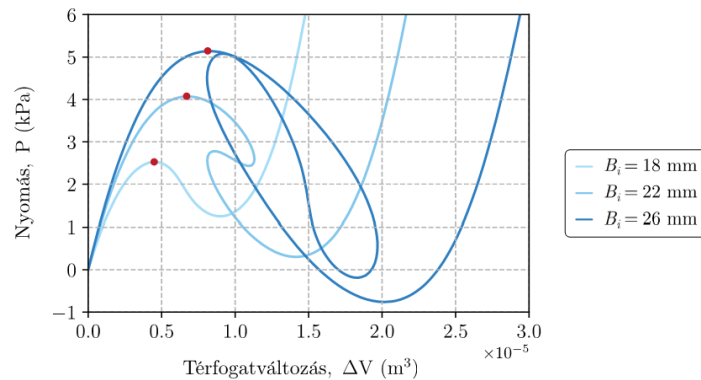
A vizsgált geometriai paraméterek

1. táblázat

Jelölés	A_i (mm)	B_i (mm)	t_i (mm)	θ_i (°)
1.	22	18	3.5	65
2.	22	22	3.5	65
3.	22	26	3.5	65

2.5. A szimulációs eredmények

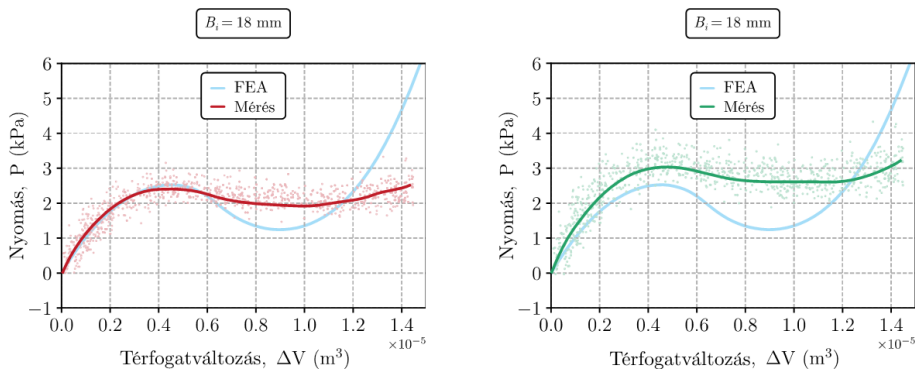
A szimulációs eredményekből látható, hogy az egyes héjak egyensúlyi görbéje nagyon hasonló, azonban a kritikus nyomások elérése egyre magasabb nyomásokon történik meg. A magas nemlinearitást mutató görbék egy adott geometriával rendelkező görbék lehetséges egyensúlyi (stabil vagy instabil) pontok helyzetét mutatják meg a definiált koordinárendszerben. Az önmaga alá „visszakanyarodó” görbéket mérések, illetve dinamikai szimulációk során, mivel az instabil helyzeteket csak külső behatással lehet tartósan létrehozni.



6. ábra. A szimulációs eredmények

2.6. Mérési eredmények

Az egyes héjakon 3 db mérést végeztünk, a fent bemutatott két vezérlési módszer figyelembevételével. Ez összesen 18 mérést jelentett, amelyet egy számítógép segítségével vezéreltünk. A mérések során 500 Hz-es mintavételezési frekvenciát használtunk a kellően pontos adatgyűjtés elérése érdekében. Ezen cikk hossza nem teszi lehetővé, hogy az összes mérési eredményt bemutassuk, így az alábbi 7. ábra szolgál példaként egy térfogat-, illetve egy nyomásvezérelt eset mérési görbéjeként. A mért adatsorokat (pontfelhők) átlagoltuk, így kaptuk a vastagon berajzolt karakterisztikus görbéket, amelyekről a szimulációs eredményekhez hasonlóan leolvasható a kritikus nyomás értéke. Ezen adatsor kerül összehasonlításra a kék vonallal rajzolt szimulációs eredményekhez.



7. ábra. A mérési eredmények: térfogatvezérlés balra, nyomásvezérlés jobbra

A mérések során általánosságban elmondható, hogy a nyomásvezérelt mérések nagyobb hibával terheltek a bizonytalan PID szabályozó miatt. A túllövés gyakorisága és mértéke is nagyobb volt nyomásvezérelt esetben.

2.7. Analitikus eredmények

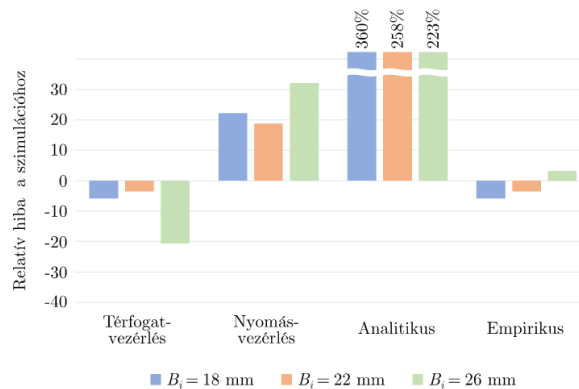
Az analitikus eredmények könnyen számíthatóak minden héj esetében az (1) képlet segítségével. Azonban amint azt korábbi megfigyelések is igazolták, az elméleti értékek ténylegesen sokkal nagyobbak (kb. 5-ször), mint a mért értékek. Ennek kiküszöbölésére a szakirodalomban empirikus formulákat alkalmaznak, amelyet a következőképpen definiáltak amennyiben a mérések egyforma anyaggal rendelkező héjakon történtek [9]:

$$P_{cr} = C_1 \left(\frac{t_i}{R_{ic}} \right)^2 \sin(\theta_{ic})^2 + C_2, \quad (2)$$

ahol C₁ és C₂ a térfogatvezérelt mérésekből meghatározható konstansok. Ezen számítás alkalmazásával sokkal pontosabb eredményeket lehet elérni egyszerű formulákkal.

2.8. Eredmények összehasonlítása

A négy módszert összehasonlításához készíthetünk egy grafikont, amely bemutatja, hogy az egyes módszerek milyen eltérést produkáltak a szimulációs eredményekhez képest. Jól látható, hogy a mérések közül a térfogatvezérlés sokkal jobban közelíti a szimulációs eredményeket, míg a nyomásvezérlés túllövést produkál. Jól megfigyelhető az analitikus számítások nagy fokú felülbecslése is. Azonban szemléletes, hogy az empirikus formula (és a mérési eredmények) használatával milyen jó becslést lehet elérni. Azonban ezen eredmények extrapolálását mindig körültekintően kell elvégezni.



8. ábra. Az eredmények összehasonlítása

A fenti eredmények azt jelzik, hogy a kidolgozott és bemutatott módszerek képesek lágy, rugalmas héjak stabilitásvesztési problémáját karakterizálni, és előrejelezni tulajdonságaikat.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás az NKFIH „OTKA” posztdoktori kiválósági programja (PD 137806), a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj, valamint a Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-23-5-BME-457 és ÚNKP-23-2-I-BME-94 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] C. Majidi. *Soft Robotics: A Perspective – Current Trends and Propescts for the Future*, Soft Robotics, Mar. 2014, pp. 5-11.
- [2] Stephen P. Timoshenko. *Theory of elastic stability*, Dover Publications, 2012.
- [3] B. Gorissen, D. Melancon, N. Vasios, M. Torbati, K. Bertoldi. *Inflatable soft jumper inspired by shell snapping*, Science Robotics, May 2020, 5.42
- [4] Dassault Systèmes. Abaqus version 6.20., 2020.
- [5] E. Riks. *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*, International Journal of Solids and Structures, 1979, 15.7, pp. 529–551.
- [6] W. Zheng, P. Panagiotis, A. Ali. *Soft robotics toolkit*; 2023. 10. 31., online: <https://softroboticstoolkit.com/>.
- [7] Z. Robert. *Ueber ein Knickungsproblem an der Kugelschale*, PhD thesis, 1915.
- [8] James M. Hill. *Buckling of long thick-walled circular cylindrical shells of isotropic incompressible hyperelastic materials under uniform external pressure*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Apr. 1975, 23.2, pp. 99–112.
- [9] E.B. van der Houwen, L.H. Kuiper, J.G.M. Burgerhof, B.F.A.M. van der Laan, and G.J. Verkerke. *Functional buckling behavior of silicone rubber shells for biomedical use*, Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials, Dec. 2013, 28, pp. 47–54.