

Megjegyzések az érintkezési optimalizációs feladatokhoz

Notes on contact optimization tasks

Dr. PÁCZELT István¹ professor emeritus, Dr. BAKSA Attila² egyetemi docens

¹Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, +36 30 269 5189,
e-mail: istvan.paczelt@uni-miskolc.hu

²Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, +36 30 312 7097,
e-mail: attila.baksa@uni-miskolc.hu

Abstract

This lecture examines some contact tasks between elastic bodies solved by applying the control technique proposed by the authors. (Rounding of cylindrical rollers, shape design of cylindrical bodies, steady state wear under different loads and relative displacement conditions)

Keywords: finite element method, contact optimization

Kivonat

Az előadás az általunk javasolt vezérlési technika alkalmazásával megoldott, rugalmas testek közötti néhány érintkezési feladatot vizsgál. (Pl. hengergörgők lekerekítése, hengeres testek alakoptimalítása, különböző terheléseknél és relatív mozgási viszonyoknál kialakuló állandósult kopás)

Kulcsszavak: végeelem-módszer, érintkezési optimalizálás

1. BEVEZETÉS

Optimalizálási problémákkal foglalkozó munkák egy része az érintkezési feladatokhoz köthető. Két nagy csoport figyelhető meg: egyik a kinematikai mennyiségekkel [1], másik a dinamikai mennyiségekkel kapcsolatos [2, 3]. A vezérlési technika, amikor a nyomás egy részének részleges lefutását a tervező adja meg igen hatékony eszközként szolgálja az optimalizált cél elérését [4, 5].

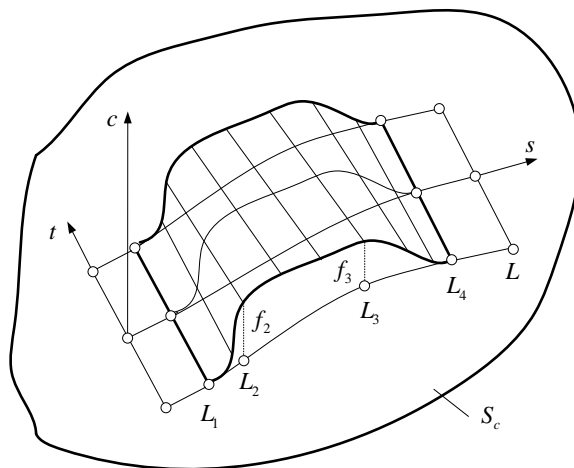
A kopás során jelentkező, általunk megoldott feladatok egy része [6, 7, 8] munkákban található meg.

2. ÉRINTKEZÉSI NYOMÁS VEZÉRLÉSE

A testek között kialakuló érintkezés vizsgálata során mindig találunk olyan felületi tartományt, ahol a testek kapcsolódnak egymással. Feltételezzük, hogy a szóba jöhető $S_c = \Omega$ érintkezési tartomány Ω_c altartományán ez fennáll. Bevezetve felületi s és t koordinátákat, a p nyomást az alábbi alakban képezzük [2] $p(x) = c(x) p_{\max}$, ahol az általunk választott vezérlő függvénytől $0 \leq c(x) \leq 1$ feltételt követeljük meg, továbbá $p_{\max} = \max p(x)$, $x = [s, t]$. A nem vezérelt tartományon $\Omega_{nc} (\Omega = \Omega_c \cup \Omega_{nc})$ az érintkezési nyomásnak az alábbi feltételt kell teljesíteni: $\chi(x) = c(x) p_{\max} - p(x) \geq 0$. A vezérlőfüggvény (1. ábra) egy lehetséges változatát írják le az (1), (2) alatti egyenletek. Érdeemes hangsúlyozni, hogy az $s = L_1$ és $s = L_4$ pontokban nemcsak a nyomás lesz zérus, hanem annak s szerinti deriváltja is. Ha a nyomás hirtelen szakadással rendelkezne, ezen pontban a feszültségállapot szingularitással rendelkezne. Vagyis a nyomás vezérlésével olyan nyomás megoszlást kapunk, amivel a szerkezet kifáradási határa növelhetővé válik és ezzel az üzemeltető számára nem elhanyagolható szempont kielégítéséhez járulunk hozzá.

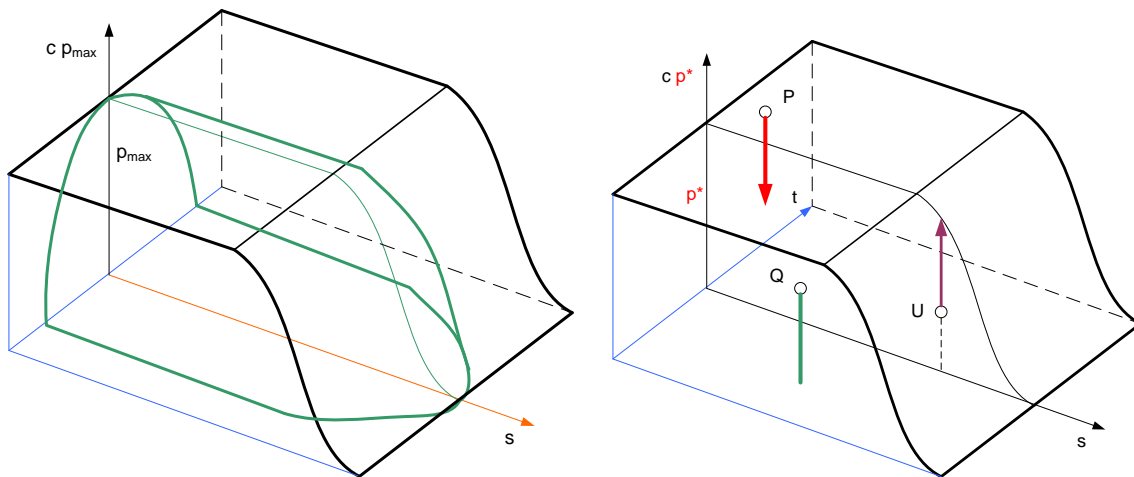
$$\begin{aligned} V^*(s) &= f_2 + (f_3 - f_2) \frac{s-L_2}{L_3-L_2}, \quad f_2 \geq 0, f_3 \geq 0, \quad V(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq L_1 \\ V(s) &= V^*(s) \left\{ 3 \left(\frac{s-L_1}{L_2-L_1} \right)^2 - 2 \left(\frac{s-L_1}{L_2-L_1} \right)^3 \right\}, \quad L_1 \leq s \leq L_2, \quad V(s) = V^*(s), \quad L_2 \leq s \leq L_3 \\ V(s) &= V^*(s) \left\{ 1 - 3 \left(\frac{s-L_3}{L_4-L_3} \right)^2 + 2 \left(\frac{s-L_3}{L_4-L_3} \right)^3 \right\}, \quad L_3 \leq s \leq L_4, \quad V(s) = 0, \quad L_4 \leq s \leq L \end{aligned} \quad (1)$$

$$c(x) = V(s) \tilde{v}(t), \quad \tilde{v}(t) = 1 \quad (2)$$



1. ábra. Vezérlőfüggvény

Hengergörgő sugarának meghatározásánál használatos vezérlőfüggvény alakját és az iterációs során a nyomás módosítását a 2. ábrán láthatjuk. A $t = 0$ síkban a nyomást a $c p^*$ mennyiséggel kijelölt vezérlő-függvényhez (sátortetőhöz) igazítjuk. Ha a nyomás a sátortető felett van (P pont), akkor leereszkedünk a tetőre, ha alatta vagyunk (U pont), akkor nem változtatunk azon. Számos konkrét példát a [4, 5] cikkekben olvashatunk.



2. ábra. Vezérlőfüggvény

A nyomásvezérlés technikája előnyösen alkalmazható hengeres testeknél jelentkező érintkezési feladatok optimalizálásánál. A [3, 7, 8, 10] munkákat kiemelve megfogalmazást nyernek.

Az egyik test w_0 nagyságú, merevtestszerű elmozdulása mellett, a következő feladattípusokat különböztetjük meg:

1. A nyomás maximumának minimalizálása, azzal a feltétellel, hogy a testek közötti távolság/hézag minimuma legyen zérus.
2. A megkívánt érintkezési F_p eredő erő elérése egy megfelelően választott kezdeti hézag mellett.
3. Az előbbi feladat azzal a kiegészítő feltétellel, hogy a testekben ébredő Mises-féle redukált feszültség ne haladja meg a tervezőmérnök által megengedett értéket.
4. Végezetül olyan merevtestszerű elmozdulás keresése, amelynél a redukált feszültség maximuma egy előírt korlát alatt van.

A másik feladatcsoport, amikor adott terhelés mellett keressük az optimumot, de különböző kiegészítő feltételek figyelembevételével:

- A. A bélyeg forgást nem végez
5. A nyomás maximumának minimalizálása, azzal a feltétellel, hogy a testek közötti hézag minimuma zérus.

- B. A bélyeg forgást is végez A súrlódás miatt keletkező csavaró nyomaték miatt
6. Keressük a csavaró nyomaték maximumát a vezérlő függvény L_1 paraméterének növelésével.
 7. Ugyanaz a feladat, mint a 6. pontban, de egy redukált feszültségi korlátot is figyelembe véve.
 8. Keressük a súrlódási disszipáció (kopás) minimumát az L_4 csökkentésével.
 9. Ugyanaz a feladat, mint a 8. pontban, de egy redukált feszültségi korlátot is figyelembe véve.
 10. Az állandósult kopáshoz tartozó nyomás meghatározása a kialakult hézaggal, az. ún. Archard-féle kopási törvény időbeli integrálásának mellőzésével [6].

A fenti feladatokat speciális iterációval oldjuk meg. Az iteráció egy része az ún. első típusú iterációval zajlik le (lásd 3. ábra). A különálló szerkezeti elemekre működtetjük a vezérlő függvénnyel meghatározott lefutású nyomást, súrlódási csúsztató feszültséget. A végeelemes megoldásból kiszámoljuk az $m(s)$ függvényt, majd ez alapján a kezdeti hézagot. Ezzel megoldjuk a testek érintkezési feladatát, amiből újabb lefutású nyomást kapunk, amit a vezérlőfüggvénnyel módosítva, ismételtén terheljük a különálló testeket. Ezt mindaddig folytatjuk, amíg a hézagváltozásra előírt korlát alá nem kerülünk.

A 4. a 7. és a 9. feladatoknál a w_0 , L_1 és L_4 változtatására kerül sor, mindaddig, amíg a redukált feszültség maximuma nem ér el egy adott korlátot. Ezt lényegében lineáris interpolációval érjük el [8, 10].

Legyen az iterációban szereplő mennyiség f , az iteráció lépés jele i lépés, amíg a kiszámolt mennyiség $f = f_0 \cdot i$ lépés, f_0 általunk választott érték.

Az első típusú iterációban f le van rögzítve. Ekkor a hézag meghatározást nyer.

A Mises σ_{red} redukált feszültséget a végeelemek Gauss integrálási pontjaiban számítjuk ki, továbbá az elem határán is, $(\xi = -1, \xi_1, \dots, \xi_{NG}, 1)$, $(\eta = -1, \eta_1, \dots, \eta_{NG}, 1)$, ahol ξ és η a lokális normál koordináták, NG a Gauss pontok száma. Amikor egy pontban a redukált feszültség nagyobb, mint a megengedett feszültség, azaz $\sigma_{red} > \sigma_{meg}$, akkor $f = f_{**}$, míg az előző lépésben $f = f_*$. Az $f_* < f_{opt} < f_{**}$ intervallumban az optimális f_{opt} a következő lineáris közelítéssel kerül kiszámításra:

$$f_{opt(i)} = f_* + (f_{**(i-1)} - f_*) \frac{\sigma_{meg} - \sigma_{red*}}{\sigma_{red**(i-1)} - \sigma_{red*}}, \quad i = 1, \dots, \quad \text{ahol } f_{**(0)} = f_{**}, \quad \sigma_{red**(0)} = \sigma_{red**}. \quad (3)$$

A második típusú iteráció mindaddig zajlik, amíg a $\frac{\sigma_{meg} - \sigma_{red**(i)}}{\sigma_{meg}} \leq 0,005$ feltételt nem teljesítjük.

A fenti optimalizációs feladatok közül néhányat kiragadva, írhatjuk:

$$P1: \min \left\{ p_{max} \mid p \geq 0, d = d(s, u_N^{(l)}) = 0, \chi(s) = 0, \min h = h_{min} = 0 \right\} \quad (4)$$

$$P2: \min \left\{ p_{max} \mid p \geq 0, d = d(s, u_N^{(l)}) = 0, \chi(s) = 0, F_p = F_p(p_n) = \text{adott} \right\} \quad (5)$$

$$P3: \max \left\{ F_p \mid \min \left[p_{max} \mid p \geq 0, d = d(s, u_N^{(l)}) = 0, \chi(s) = 0 \right], \sigma_{red} \leq \sigma_{meg} \right\} \quad (6)$$

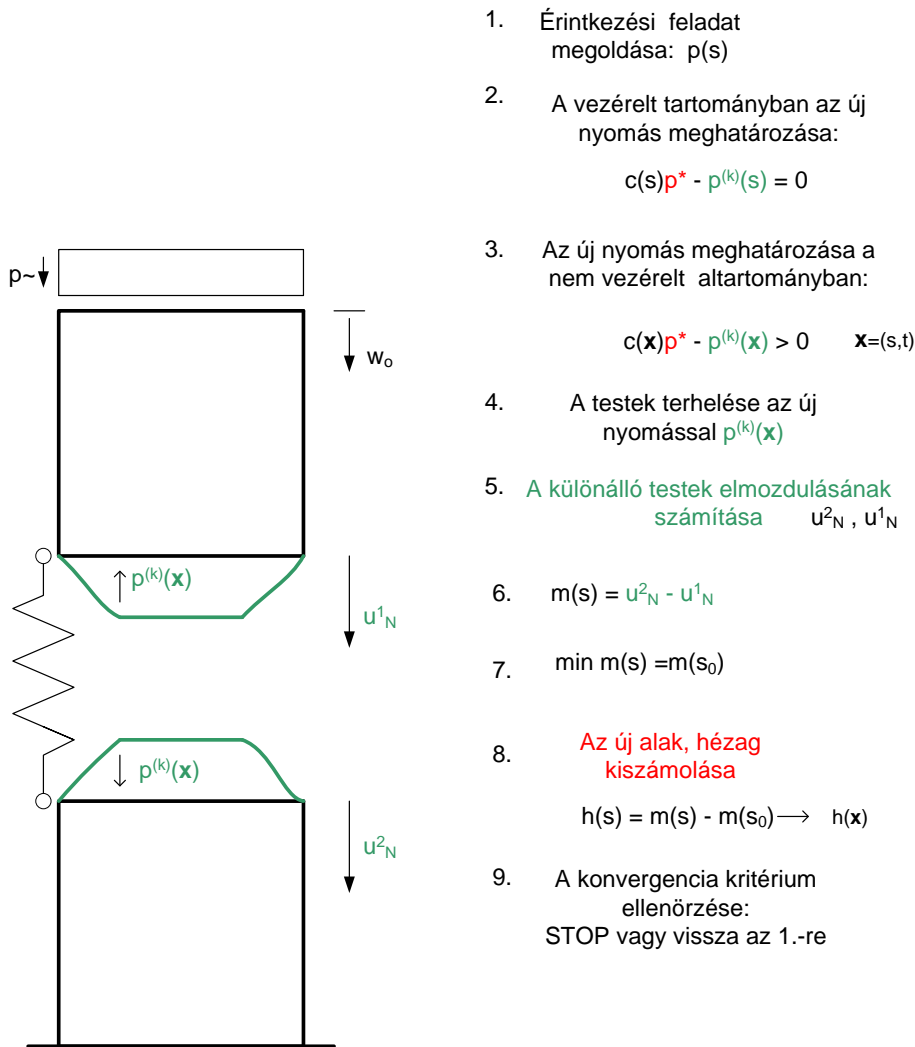
$$P7: \max_{L_1} \left\{ M_c \mid p \geq 0, d = d(s, u_N^{(l)}) = 0, \chi(s, p, L_1) = 0, F_p = F_0, h_{min} = 0, \sigma_{red} \leq \sigma_{meg} \right\} \quad (7)$$

$$P9: \min_{L_4} \left\{ D_F \mid p \geq 0, d = d(s, u_N^{(l)}) = 0, \chi(s, p, L_4) = 0, F_p = F_0, h_{min} = 0, \sigma_{red} \leq \sigma_{meg} \right\} \quad (8)$$

ahol $M_c = \mu \int_{r_b}^{r_k} 2\pi r^2 p dr$ csavaró nyomaték, $D_F = \int_{r_b}^{r_k} r \omega \mu p 2\pi r dr = M_c \omega$ a súrlódási disszipáció, az $F_p = \int_{r_b}^{r_k} 2\pi r p dr$ eredő érintkezési erő, μ a súrlódási tényező, ω a bélyeg (1-es test) forgási szögsebessége, $d = u_N^2 - u_N^1 + h \geq 0$ az alakváltozás után a testek közötti távolság/hézag. Érintkezésnél $d = 0$. Az u_N^e mennyiség az e jelű test érintkezési felületén a normális irányú elmozdulás.

2.1. Példák

A fenti problémák közül a 4. ábrán vázolt végeelemes felosztású rugalmas hengeres testeket vizsgáljuk. Az anyagállandók a szerkezeti acélhoz tartozóan a következő értékűek: a Young modulus $E = 2,1 \times 10^5$ MPa, a Poisson tényező $\nu = 0,3$, és a súrlódási tényező $\mu = 0,25$.



1. Érintkezési feladat megoldása: $p(s)$
2. A vezérelt tartományban az új nyomás meghatározása:
 $c(s)p^* - p^{(k)}(s) = 0$
3. Az új nyomás meghatározása a nem vezérelt altartományban:
 $c(x)p^* - p^{(k)}(x) > 0 \quad x=(s,t)$
4. A testek terhelése az új nyomással $p^{(k)}(x)$
5. A különálló testek elmozdulásának számítása u^2_N, u^1_N
6. $m(s) = u^2_N - u^1_N$
7. $\min m(s) = m(s_0)$
8. Az új alak, hézag kiszámolása
 $h(s) = m(s) - m(s_0) \rightarrow h(x)$
9. A konvergencia kritérium ellenőrzése:
STOP vagy vissza az 1.-re

3. ábra. Az első típusú iteráció főbb lépései

Az első esetben a P1 optimalizálási problémában az előírt elmozdulás mellett ($w_0 = 0.15$ mm), a p nyomás megoszlását, illetve az ilyen érintkezési nyomáseloszlás eléréséhez, a felső hengeres testből „lefaragott” alakot/hézagot/ láthatjuk. A megoldást 10 iterációs lépésben értük el (5. ábra).

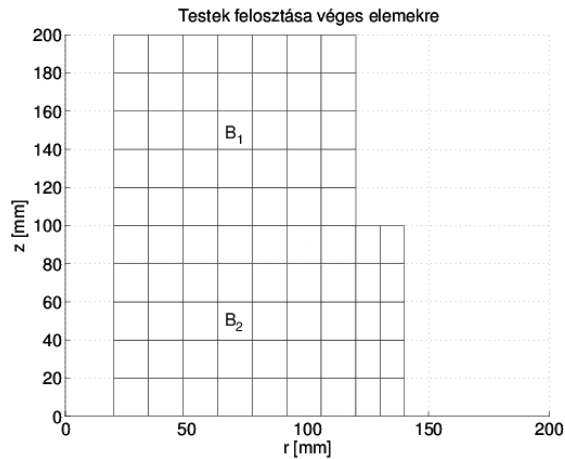
A második példa a P9 optimalizálási feladathoz tartozik. A felső peremen 75 MPa nyomás hat, az L_4 csökkentésével értük el a redukált feszültség 250 MPa-os maximumát a disszipáció minimalizálásával. Az eredeti szerkezetnél a redukált feszültség maximuma $\sigma_{redmax} = 210$ MPa, ami az $r = 120$ mm, és a $z = 100$ mm pontban alakult ki.

A disszipáció kiszámítása a $D_F = M_c \omega$ alapján történt, melyben a kezdeti $M_c = 257 \times 10^6$ Nmm érték az optimalizálással $M_{c,opt} = 174 \times 10^6$ Nmm értékre csökkent. A vezérlő függvényt mindkét optimalizációs feladatnál $L_1 = 0$, $L_2 = 20$, $L_3 = 80$, $L_4 = 100$ mm geometriai adatok jellemezték. Az optimalizálásnál a megváltozott mennyiségek $L_4 = 59,37$, $L_3 = 39,37$ mm. A számítás folyamán az eredeti végeelemes háló az új vezérlő paraméterek függvényében adaptívan változik. A 6. ábra az optimális megoldást tünteti fel.

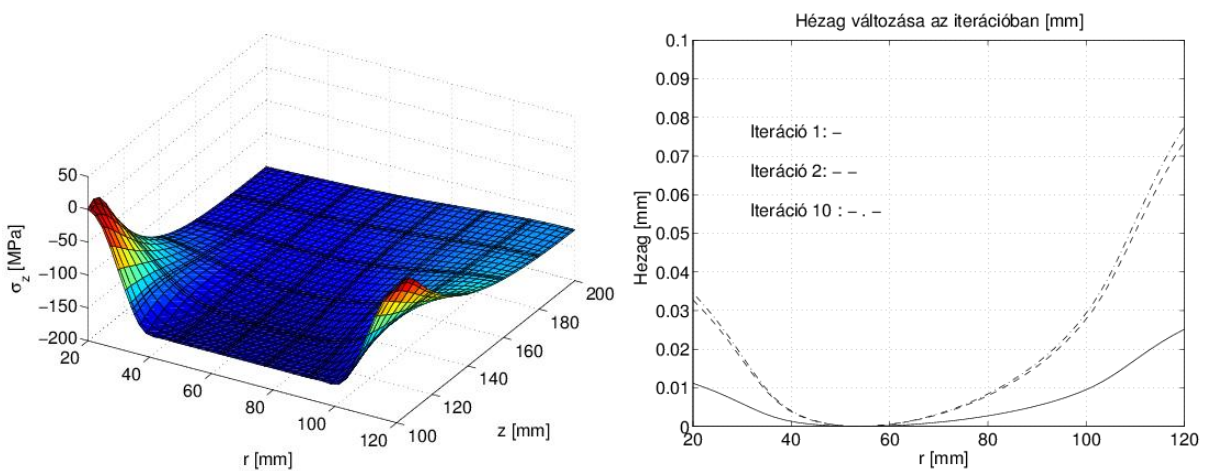
A számításokat ún. p -verziójú végeelem-módszerrel végeztük el [11], mivel annak lényegesen nagyobb a megoldási konvergenciája, és így az elérendő számítás pontossága, mint az ún. h verziós alacsony fokszámú (általában 2-od rendű polinomokkal dolgozó) megoldási módszeré. Ezt az eredmények jól mutatják a dinamikai peremfeltételek nagy pontosságú kielégítésével. Számításainkban $p=8$ -ad fokú elemekkel dolgoztunk. A feszültségi ábrákon az elemeken belül a Gauss integrálási pontokon áthaladó vonalak is láthatók.

3. KOPÁSI OPTIMALIZÁCIÓS FELADATOK

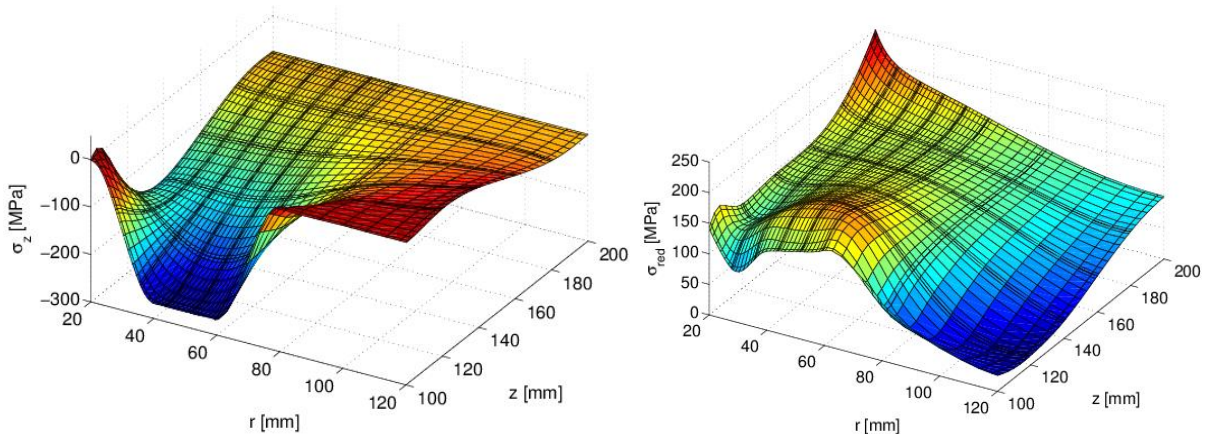
Az egymáson elcsúszó gépalkatrészek a súrlódás miatt kopásnak vannak kitéve. Állandósult terhelési és mozgási adatoknál ún. állandósult kopási folyamat lép fel. A kopások számításánál elfogadott az Archard-féle



4. ábra. Hengeres testek érintkezése



5. ábra. A P1 optimalizálási feladatnál a σ_z feszültség és a hézag iterációbeli változása



6. ábra. A P9 optimalizálási feladatnál a σ_z feszültség és a redukált feszültség megoszlása a felső hengerben

törvény. Ekkor a leváló anyag kopási sebessége $\dot{w} = \beta p^a v_r^b$ összefüggéssel jellemezhető. Itt a , b , β az anyagtulajdonságaitól függő kopási paraméterek, p az érintkezési nyomás, v_r a testek közötti relatív sebesség. A kopás értékét a kopási sebesség időintegrálásával lehet meghatározni. Tapasztalat, hogy bizonyos idő után beáll egy állandósult állapot, amikor már a testek közötti nyomás gyakorlatilag nem változik. Ezt a nyomást a D_w kopási disszipációs teljesítmény minimalizálásával tudjuk közvetlenül meghatározni [6].

Különböző feladatok fogalmazhatók meg:

1. Állandó relatív sebesség melletti kopás [6, 8, 10],

2. Periodikus mozgás esete [7, 12],
3. A terhelés periodikusan változik [13],
4. Időben periodikusan változó terhelés és mozgás (pl. fékezés esete [14]).

Az időben változó esetekben a kialakuló átlagos nyomás lefutásáról és a kopott forma átlagos alakjáról tudunk előzetesen képet kapni a periodus alatti E_w átlagos disszipációs munka minimalizálásával.

$$D_w^{(q)} = \sum_{i=1}^2 \left(\int_{S_c} (\mathbf{t}_i^c \cdot \mathbf{w}_i)^q dS \right)^{1/q},$$

$$E_w = \sum_{i=1}^2 \int_0^{T_*/2} \left(\int_{S_c^{(i)}} (\mathbf{t}_i^{c+} \cdot \mathbf{w}_i^+) dS \right) d\tau + \sum_{i=1}^2 \int_{T_*/2}^{T_*} \left(\int_{S_c^{(i)}} (\mathbf{t}_i^{c-} \cdot \mathbf{w}_i^-) dS \right) d\tau \quad (9)$$

Itt \mathbf{t}_i^c az i jelű testen ébredő érintkezési feszültségvektor, \mathbf{w}_i a kopási sebességvektor, +/- a félperiódus alatti mozgás irányára utal, T_* a periódusidő. A $q = 1$ értékhez tartozó megoldás adja az állandósult kopási megoldást.

Az 1. esetben az állandósult kopási nyomás hengeres forgási testeknél $p = Cr^{-a/b}$, az egymáson elcsúszó testeknél $p = A + Bx$, a tárcsára ható pofás féknél $p = C(\cos \alpha)^{1/b}$ összefüggésekkel jellemzett. Lényeges, hogy a hőfejlődés a kopási nyomásokra nincs befolyással, a kopott alakokra azonban erőteljes befolyást gyakorol. A hővezetési feladatok megoldása ún. módosított Petrov-Galjorkin variációs elv felhasználásával érhető el [6]. Helyhiány miatt konkrét példák bemutatására az előadáson kerül majd sor.

4. ÖSSZEFOGLALÓ

A tervező mérnök számára nagyon fontos, hogy olyan kialakítást tervezzen, amelynél lehetőleg a kifáradási határt nem csökkentő nagy feszültségek ne keletkezzenek, továbbá az érintkezési felületeken feszültségkoncentrációk ne jelenjenek meg. Ezen célok eléréséhez javasol megoldást a jelen cikk, ill. további részletek, példák a javasolt hivatkozásokban lelhetők fel. A kopásoknál a bejáratás során kapott kopási alakok előre történő megbecsülése várható.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] I. Páczelt. Some optimization problems connected with contact problems in the linear theory of elasticity, Variational methods in mechanics of solids, Ed. by. S. Nemat-Nasser, Pergamon Press, Oxford, 1980, 349-356.
- [2] J. Haslinger and P. Neittaanmaki. Finite element approximation for optimal shape design, John Wiley & Sons Ltd., London, 1988.
- [3] I. Páczelt. Iterative methods for solution of contact optimization problems, Arch. Mech. 2000, 52(4-5), 685-711, <http://am.ippt.pan.pl/am/article/view/v52p685>.
- [4] I. Páczelt and T. Szabó, Optimal shape design for contact problems, Structural Optimization, 1994, 7(1/2), 66-75.
- [5] I. Páczelt, A. Baksa, T. Szabó. Product design using a contact-optimization technique, technique, Strojnicki Vestnik-Journal of Mechanical Engineering, 2007, 53(7-8), 442-461.
- [6] I. Páczelt, Z. Mróz, Numerical analysis of steady thermo-elastic wear regimes induced by translating and rotating punches, Computes and Structures, 2011, 89, 2495-2521, doi: 10.1016/j.compstruc.2011.06.001.
- [7] I. Páczelt, Z. Mróz, Solution of wear problems for monotonic and periodic sliding with p-version of the finite element method, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 2012, 249-252, 75-103, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2012.02.012>.
- [8] I. Páczelt, A. Baksa, Z. Mróz, Contact optimization problems for stationary and sliding conditions, Springer International Publishing Switzerland 2016, P. Neittaanmaki et al. (eds), Mathematical Modelling and Optimization of Complex Structures, Computational Methods in Applied Sciences 40, 281-312, DOI 10.1007/978-3-319-23564-6_16.
- [9] Páczelt I., Baksa A, Megfogófej érintkezési viszonyainak optimalizálása, Multidiszciplináris tudományok, 2019, 9(4), 396-403, <https://doi.org/10.35925/j.multi.2019.4.39>.
- [10] I. Páczelt, A. Baksa, Examination of contact optimization and wearing problems, Journal of Computational and Applied Mechanics, 2002, 3(1), 61-84.
- [11] B. Szabó, I. Babuska, Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.
- [12] I. Páczelt, Z. Mróz, A. Baksa, Analysis of steady wear processes for periodic sliding, Journal of Computational and Applied Mechanics, 2015, 10(2), 231-268.
- [13] I. Páczelt, Z. Mróz, Analysis of wear processes for periodic loading, Key Engineering Materials 2015, 681, 117-141, doi:10.4028/www.scientific.net/KEM.681.117.
- [14] I. Páczelt, Z. Mróz, A. Baksa, Analysis of steady wear processes for inhomogeneous materials and varying contact loads, Journal of Computational and Applied Mechanics, 2020, 15(1), 27-66, DOI: 10.32973/jcam.2020.003.