

Változtatható inerter modellezése és szimulációja

Modeling and simulation of a variable inerter

PÁCSONYI Péter¹ hallgató, Dr. BUDAI Csaba¹ adjunktus, Dr. STÉPÁN Gábor² professor emeritus

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar,
Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
peter.pacsonyi@gmail.com, budai@mogi.bme.hu

²Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar,
Műszaki Mechanikai Tanszék
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5.
stepan@mm.bme.hu

Abstract

An inerter is a passive mechanical element where the applied actuating force is proportional to the relative acceleration. In this case, the proportionality factor is called inertance. The inertance can be changed in several ways, for example by a suitably designed mechanism. If a variable inerter is part of a vibration mitigating system, the value of the inertance becomes tunable during operation. This way, appropriate damping can be provided for different excitations. The nonlinearity resulting from the implementation of variable inerters further complicates the tuning of the inertance and thus the design of the controller used for tuning. The aim of this paper is to present the mechanical model of a variable inerter and to evaluate the properties of the system under investigation.

Keywords: variable inerter, nonlinear dynamics, simulation, MATLAB, Simscape Multibody

Kivonat

Az inerter egy passzív mechanikai elem, ahol az alkalmazott működtető erő arányos a relatív gyorsulással, az arányossági tényező az úgynevezett inertancia. Az inertanciát többféleképpen lehet változtatni, például egy alkalmasan megtervezett mechanizmussal. Ha egy változtatható inerter egy rezgéscsillapító rendszer részét képezi, akkor az inertancia értéke működés közben hangolhatóvá válik. Így különböző gerjesztések esetén biztosítható a megfelelő csillapítás. A változtatható inerterek megvalósításából eredő nemlineáris jelleg tovább nehezíti az inertancia hangolását, így a hangoláshoz alkalmazott szabályozó tervezését is. Jelen tanulmány célja az, hogy bemutassa egy változtatható inerter mechanikai modelljét, illetve a vizsgált rendszer tulajdonságait.

Kulcsszavak: változtatható inerter, nemlineáris dinamika, szimuláció, MATLAB, Simscape Multibody

BEVEZETÉS

Ahogy a mérnöki életben használt eszközök egyre pontosabbak és érzékenyebbek lesznek, felértékelődik a különböző rezgészigetelések és rezgéscsillapítások szerepe. Ezek az eszközök lehetnek precíziós szerszámgépek, az integrált áramkörgyártás gépei, vagy különféle mérőműszerek [1]. Jobb rezgéscsillapítással mind ezen eszközök élettartama, mind az előállított termékek minősége javítható.

1.1. Rezgéscsillapítási feladatok és megoldások

A rezgéscsillapítás célja többféle módon fogalmazható meg. Számos alkalmazásban ez egy adott test elmozdulásának minimalizálása alapján történik [2], más esetekben a minőségi mérőszám egy több testből álló rendszer egyik elemének gyorsulásán alapul [3]. Utóbbira jó példa egy személyautó, ahol az utasok kényelme és az egészségre káros behatások csökkentése is alapvető fontosságú. Előfordul, hogy az elemek között ébredő erő minél kisebb értéken tartása kerül előtérbe [4], mint például a járműfelfüggesztések esetében. Végül,

különböző alkalmazásokban a rezgéscsillapító rendszerek a rezgésekből származó energiát elnyelik, oly módon, hogy később újra felhasználható, vagy szabályozott módon visszatáplálható a rendszerbe [5].

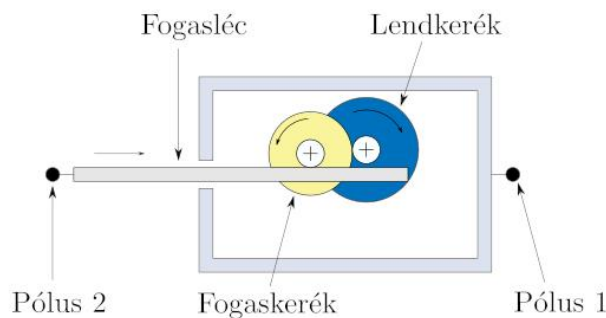
A rezgéscsillapítások csoportokra bontásának másik módja a működésükhöz szükséges energiaforrásokra alapszik. A legegyszerűbb megoldások a passzív rendszerek [6], azaz ebben az esetben nincs szükség külső energia bevitelére. Leggyakrabban passzív elemekből – rugók, tömegek, csillapítások – állnak. Egyszerűségük mellett csupán korlátozott frekvenciatartományban működnek jól, illetve nem képesek a rendszer paramétereinek nagymértékű változásaihoz alkalmazkodni.

A második csoportot az aktív rendszerek alkotják [7]. Az aktív konstrukciók fő jellemzője, hogy az aktuátorok a fő energiafolyamba kerülnek beépítésre [8]. Ez elméletben azt jelenti, hogy egy adott gerjesztésre tetszőleges választ képesek adni. A gyakorlatban természetesen megjelennek bizonyos korlátozások, mindenesetre az elérhető karakterisztikák halmaza sokkal nagyobb, mint a passzív esetben. Legfőbb hátrányuk a bonyolultságuk mellett a nagy energiafogyasztás.

Jó kompromisszumot nyújtanak az aktív és a passzív rendszerek között a félaktív megoldások. Ebben az esetben változtatható passzív elemek a konstrukció részei, amelyek lehetővé teszik a paraméterek változtatását egy megadott szabályozási törvény szerint [9]. Ez azzal jár, hogy az aktuátorok nem a fő energiafolyam részei. A félaktív rendszerek általában kedvező költségűek, kevés energiát igényelnek és képesek alkalmazkodni a gerjesztés jellemzőinek változásához, ötvözve a passzív és az aktív megoldások előnyeit.

1.2. Az inerter

Az inerter egy olyan passzív, kétpólusú mechanikai elem, ahol az alkalmazott működtető erő arányos a relatív gyorsulással az ún. inertancián keresztül. Így egyfajta tehetetlenséget visz a rendszerbe, viszont a „hagyományos” tömeggel ellentétben ezt tetszőleges két sebességszint között teljesíteni tudja, nem csak a referenciához képest.



1. ábra. Az inerter fizikai megvalósítása

Az 1. ábra az inerter egy lehetséges fizikai megvalósítását mutatja. Ebben a konstrukcióban található egy olyan, tehetetlenséggel rendelkező forgórész (lendkerék), aminek mozgatásához az abszolút gyorsulásával arányos nyomatékra van szükség. A relatív gyorsulástól való függést egy megfelelő mozgásátalakító biztosítja. Ekkor az inertert jellemző egyenlet az alábbi alakban írható

$$F = b(\dot{v}_2 - \dot{v}_1), \quad (1)$$

ahol b az inertancia, \dot{v}_1 és \dot{v}_2 pedig az inerter pólusainak gyorsulása. Belátható, hogy az inertancia egyenesen arányos a forgórész tehetetlenségi nyomatékával, illetve függ a mozgásátalakítást jellemző állandó(k)tól, például a fogaskerék-fogasléc kapcsolatnál

$$b = J \cdot \frac{1}{r^2 n^2}, \quad (2)$$

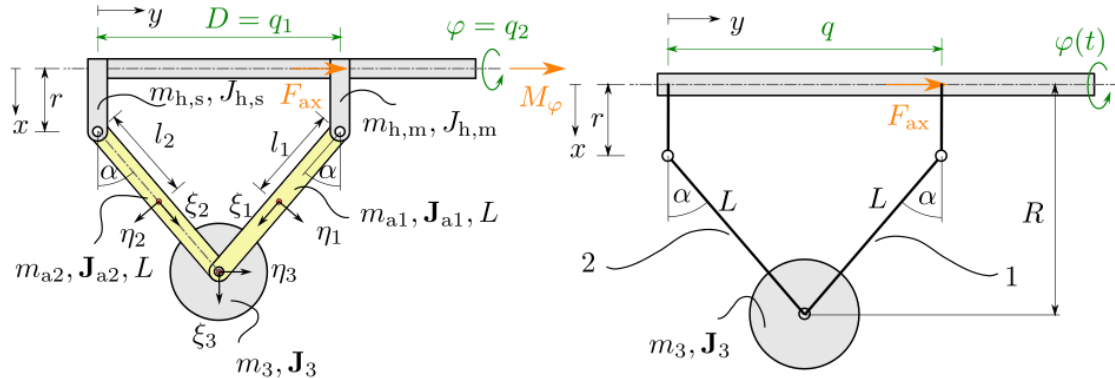
ahol J a forgórész tehetetlenségi nyomatéka, r az első fogaskerék osztóköri sugara, n pedig az áttétel. Az inertancia változtatására tehát kétféle megoldás érhető el: vagy a tehetetlenségi nyomatékot, vagy valamely mozgásátalakításra jellemző paramétert kell változtatni. Az első eset ismét két részre bontható: az eredő tehetetlenségi nyomatékot lehet hangolni a forgórész tömegén, illetve tömegeloszlásán keresztül.

Jelen tanulmány egy, az utóbbi módon működő változtatható inerterrel foglalkozik. A 2részben bemutatom a fizikai konstrukciót, illetve a rendszer mozgásegyenletének levezetését. A 3részben ismertetem az inerter szimulációját, illetve ezt összehasonlítom az analitikus úton kapott mozgásegyenlettel, végül a 0fejezetben összefoglalom az elvégzett munkát.

MECHANIKAI MODELLEZÉS

A fizikai rendszerek modellezésénél az első lépés, hogy azonosítsuk a rendszer azon részeit és jelenségeit, amelyek az elvégezni kívánt tervezési feladathoz – jelen esetben egy szabályozó tervezéséhez – szükségesek. Ezzel kapható meg az ún. szerkezeti modell, amely a rendszert a kívánt pontossággal írja le.

2.1. Szerkezeti modell



2. ábra. Az inerter szerkezeti modelljei: összetett (bal) és egyszerűsített (jobb) modell

A vizsgált megoldás egy változtatható tömegeloszlású forgórészsel dolgozik. Itt a megfelelő mechanizmussal az m_3 forgó tömeg tengelyhez képesti távolsága állítható, az F_{ax} beavatkozó erővel. A valóságban a forgó tömegek és a mechanizmust alkotó karok (1 és 2) tengelyszimmetrikusan helyezkednek el az y forgástengely körül, a statikus kiegyensúlyozatlanság elkerülése érdekében. Ez módosítja az F_{ax} erőt is, viszont a rendszer szimmetriája miatt, ha a változtatható inerter n forgó tömeggel és n pár karral rendelkezik, a szükséges beavatkozó erő is n -szeresére nő.

A 2. ábra bal oldali paneljén egy – a súrlódást elhanyagolva – minden lényeges paramétert tartalmazó modell látható. Ebben az esetben, mivel a forgó tömeg és a karok nem egy álló tengely körül forognak, a tömegeken kívül szükség van a tehetetlenségi nyomatéki mátrixokra is a geometriai paraméterek mellett. Ezen rendszer mozgását leírni meglehetősen bonyolult feladat, így jelen tanulmányban a jobb oldali panelen található, egyszerűsített modell kerül bemutatásra. Ez a modell az inerter működése szempontjából egy ideális esetet feltételez, hiszen a rendszer tömege az m_3 forgó tömegben összpontosul. Ez azért előnyös, mert adott tömeg és geometria mellett ezzel lehet a legszélesebb tartományban változtatni az eredő inertanciát. A vizsgált modellben tehát csak az m_3 test rendelkezik tömeggel, míg a rudak, illetve az agrészek tömegét ehhez képest elhanyagolhatónak feltételezzük. Egy másik fontos kitétel, hogy ugyan a rendszer alapjában véve két szabadságfokú, viszont a modellezés során a tengely körüli forgást ismertnek feltételezzük. Ez azért tehető meg, mert a D távolsághoz kötődő mozgás nem függ a $\dot{\varphi}$ szöggyorsulástól, így feltételezve, hogy a $\varphi = \omega$ szögsebesség mérhető, a pozíciószabályozáshoz szükséges F_{ax} erő meghatározható.

2.2. Mozgásegyenletek

Bonyolultabb mozgást általában a Lagrange-féle másodfajú egyenletekkel érdemes vizsgálni. Ehhez szükséges a rendszert alkotó merev testek mechanikai és potenciális energiájának felírása, amennyiben a veszteségeket elhanyagoljuk. Az inerter mozgását egyelőre vízszintes y tengelyt feltételezve írjuk le. Ez a szimmetria miatt azt eredményezi, hogy a rendszer tömegközéppontja nem mozdul el függőleges irányban, így a potenciális energia megváltozása zérus lesz. Így elegendő a mozgási energiát figyelembe venni. (Az egyenletek levezetése során az egyszerűség érdekében nem fogom jelölni mindenhol az időfüggést, csak a végeredményben.) Az elrendezés geometriájából

$$\sin \alpha = \frac{q}{2L}, \quad \text{és} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{L^2 - q^2/4}}{L}. \quad (3)$$

A forgó tömeg pozícióját leíró vektor

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} (r + L \cos \alpha) \cdot \cos \varphi \\ \frac{q}{2} \\ -(r + L \cos \alpha) \cdot \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Ebből a sebesség, a trigonometrikus függvényeket behelyettesítve

$$\mathbf{v}_3 = \dot{\mathbf{r}}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{q\dot{q} \cos \varphi}{2\sqrt{4L^2 - q^2}} - \omega \sin(\varphi) (\sqrt{L^2 - q^2/4} + r) \\ \dot{q}/2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{q\dot{q} \sin \varphi}{\sqrt{4L^2 - q^2}} - \omega \cos(\varphi) (\sqrt{4L^2 - q^2} + 2r) \right) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

A test szögsebessége, súrlódásmentes csuklókat feltételezve

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Ezek után a kinetikus energia az alábbi formában számítható

$$T = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_3^\top \mathbf{J}_3 \boldsymbol{\omega}_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_{3\eta_3} \omega_3^2, \quad (7)$$

ahol $J_{3\eta_3}$ jelöli a forgó tömeg η_3 fő tengelyére számított tehetetlenségi nyomatékát. A Lagrange-egyenlet így a következőképp írható fel

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = F_{ax}. \quad (8)$$

Ahhoz, hogy a mozgásegyenletet majd a későbbiekben numerikus megoldóval meg lehessen oldani, a legmagasabb deriváltra kell rendezni. Ez esetünkben az alábbi

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{4} q(t) \left(\frac{4\dot{q}(t)^2}{q(t)^2 - 4L^2} - 4\omega(t)^2 \right) + \frac{1}{4} q(t) \left(\frac{-4F_{ax}(t)q(t) - 2m_3 r \sqrt{4L^2 - q(t)^2} \omega(t)^2 + m_3 q(t)^2 \omega(t)^2}{L^2 m_3} \right) + \frac{4F_{ax}(t)}{m_3}. \quad (9)$$

SZIMULÁCIÓ

A rendszer szimulációjára a manapság elérhető eszközökkel több lehetőség is kínálkozik. Egy megoldás, hogy az analitikus módszerekkel levezetett mozgásegyenletet valamilyen numerikus megoldáson keresztül vizsgáljuk, illetve, hogy a rendszerről egy többtest dinamikai modellt készítve az egyenletek felírása nélkül szimuláljunk.

3.1. A mozgásegyenlet numerikus megoldása

A 2részben levezetett mozgásegyenletet első lépésben MATLAB környezetben vizsgáltam. Ehhez az egyébként másodrendű differenciálegyenletet egy két elsőrendű differenciálegyenletből álló egyenletrendszerre kell alakítani, amely az

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

vektorral írható le. Ekkor a mozgásegyenletet jellemző leképezés

$$\dot{\mathbf{Y}} = f(t, \mathbf{Y}, F_{ax}, \mathbf{p}), \quad (11)$$

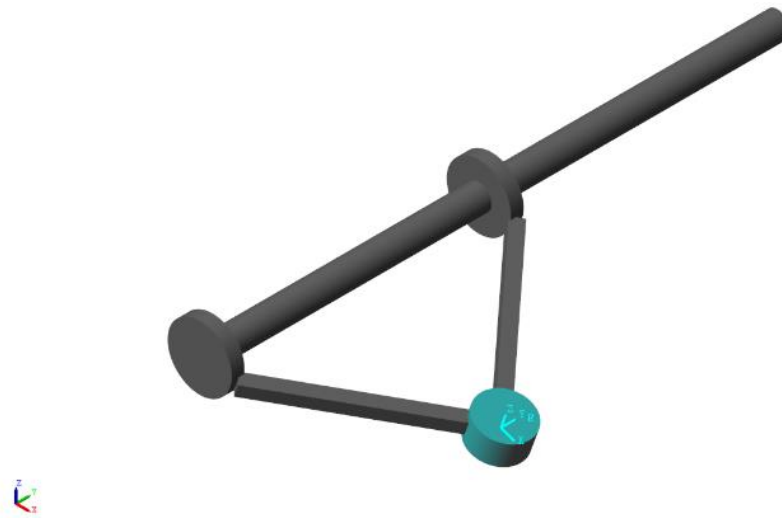
ahol \mathbf{p} az egyéb paramétereket tartalmazó vektor. A megoldó algoritmus argumentuma az f függvény, amely

$$f(t, \mathbf{Y}, F_{ax}, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q}(t, \dot{q}, q, F_{ax}, m_3, L, r) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

ahol \ddot{q} a (9) egyenlet alapján számítható.

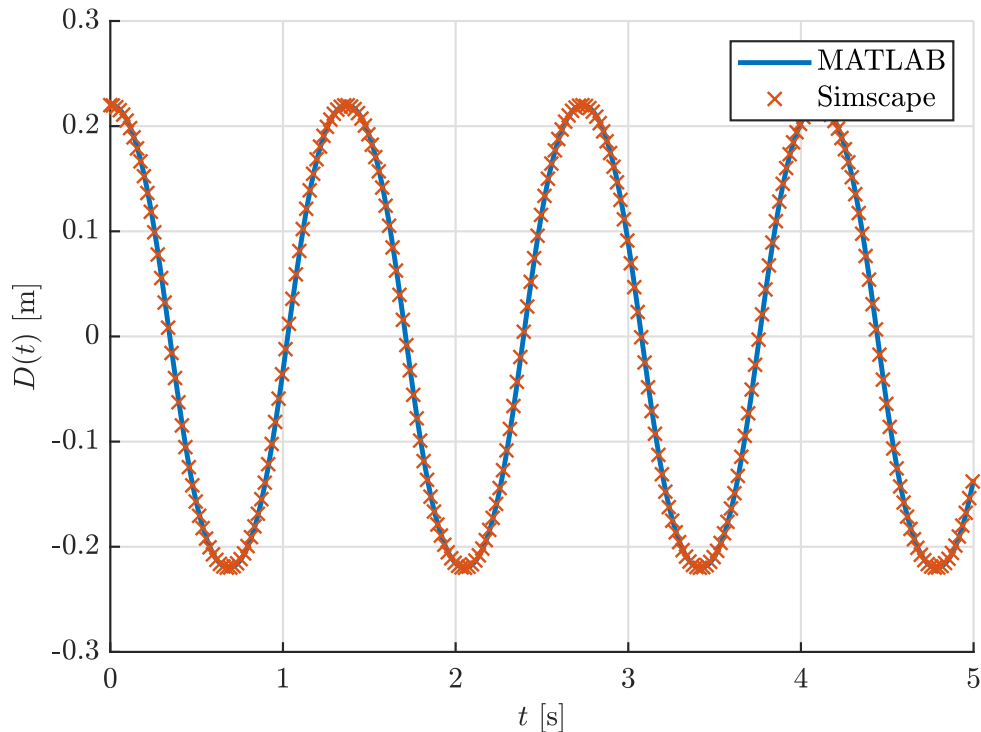
3.2. Többtest dinamikai modell

A változtatható inerter modelljét Simscape Multibody környezetben is elkészítettem. Ez lehetővé teszi, hogy az egyenletek pontos ismerete nélkül is szimulációk készüljenek a rendszerről. További előny, hogy egy vizualizáció is a környezet része (3. ábra), így szemléletesebb a mechanizmus működése.



3. ábra. A változtatható inerter vizualizációja Simscape Multibody-ban

A két megoldásnak azonos kezdeti feltételeket és gerjesztést adva ellenőrizhető a módszerek helyessége. Ehhez egy olyan esetet vizsgáltam, amelyben a tengely állandó szögsebességgel forgott, illetve a beavatkozó erő zérus volt.



4. ábra. A mechanizmus szabad mozgása

Ennél a szimulációnál fontos kiemelni, hogy negatív D távolság a valóságban nem jöhet létre, hiszen ekkor az agyrészek egymásnak ütköznek, viszont ez nem része a szimulációnak, csak a felírt mozgásegyenlet

matematikai viselkedésén van a hangsúly. Ilyen formában a szimulált, illetve a mozgásegyenlet alapján várt mozgás megegyezik.

KONKLÚZIÓ

Jelen tanulmány egy rezgéscsillapító rendszer részét képező változtatható inerter fizikai megvalósításának vizsgálatával foglalkozik. Az első részben áttekintésre kerültek különböző rezgéscsillapítási eljárások. A második rész a változtatható inerter szerkezeti modelljének felépítése után a mozgást leíró egyenletet mutatta be. A harmadik részben ismertetésre került a mozgásegyenlet, illetve többtest dinamikai modell segítségével történt szimulációk, illetve ezek eredményei. A mozgásegyenletet alapul vevő megoldás, illetve a többtest dinamikai modell egyezést mutatott, ez igazolja a szimuláció pontosságát.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatásomban, illetve a cikk megírásában nyújtott segítségükért köszönetemet szeretném kifejezni Dr. Budai Csabának, illetve Dr. Stépán Gábornak.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Huang W., Xu J. *Optimized Engineering Vibration Isolation, Absorption and Control*, Springer Nature Singapore, Singapore, 2023.
- [2] Mizuno T., Toumiya T., Takasaki M., *Vibration Isolation System Using Negative Stiffness*, JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing, J-STAGE, 2003, 46(3), 807-801.
- [3] Shirahatti A., Prasad P., Panzade P., Kulkarni M. M., *Optimal Design of Passenger Car Suspension for Ride and Road Holding*, Journal of The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering - J BRAZ SOC MECH SCI ENG, 2008, 30.
- [4] Borowski J., Stetter R., Rudolph S., *Design, Dimensioning and Simulation of Inerters for the Reduction of Vehicle Wheel Vibrations—Case Studies*, Vehicles, 2020, 2, 424-437.
- [5] Nemoto Y., Takino M., Tsukamoto S., Asai T., *Numerical study of a point absorber wave energy converter with tuned variable inerter*, Ocean Engineering, 2022, 257, 111696.
- [6] Bronowicki A., Macdonald R., Gursel Y., Goullioud R., Neville T., Platus D., *Dual stage passive vibration isolation for optical interferometer missions*, Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 2003, 4852.
- [7] Zilletti M., *Feedback control unit with an inerter proof-mass electrodynamic actuator*, Journal of Sound and Vibration, 2016, 369, 16-28.
- [8] Mahmoud A., *Mechatronic Suspension Systems: A Survey and Directions for Future Work*, American Journal of Engineering Research, 2021, 10, 237 – 244.
- [9] Ahmadian M., Pare C. A., *A Quarter-Car Experimental Analysis of Alternative Semiactive Control Methods*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2000, 11(8), 604-612.