

# Mintavételes nemlineáris rendszerek stabilitásvizsgálata

## Stability analysis of sampled-data nonlinear systems

*HABA Tamás<sup>1</sup>, Dr. BUDAI Csaba<sup>2</sup>*

Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék  
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar  
1111 Budapest, Műegyetem rakpart 3.

<sup>1</sup> habatamas0@gmail.com, <sup>2</sup> budai@mogi.bme.hu

### Kivonat

*A pozícionálási feladatok napjainkban számítógépek segítségével kerülnek megvalósításra, mintavételes rendszereket eredményezve. A szabályozók fő tervezési szempontja a stabilitás, melynek vizsgálatához felállított modellek bizonyos jelenségeket (például a száraz súrlódást) gyakran elhanyagolnak. Ezen cikk célja a mintavételezés és a száraz súrlódás hatásainak vizsgálata analitikus, szimulációs és kísérleti módszerek segítségével egy egyenáramú villamos motor példáján keresztül.*

**Kulcsszavak:** stabilitásvizsgálat, száraz súrlódás, mintavételezés, pozíciószabályozás, nemlinearitás

### Abstract

*Nowadays, positioning tasks are implemented with computers, which are basically resulted in sampled-data systems. Stability is the most important aspect in designing of closed-loop control systems. Models for establishing stability criteria often approximate or neglect some physical phenomena – dry friction for example. The purpose of this paper is to study the effects of sampling and dry friction in closed-loop control using analytic methods, simulation and experiments.*

**Keywords:** stability analysis, dry friction, sampling, position control, nonlinearity

## 1. BEVEZETÉS

A pozíciószabályozás a mechatronika egyik alapvető feladata, mely számos ipari és hétköznapi alkalmazásban jelen van, például robotikában, automatizálási folyamatokban, haptikus rendszerekben vagy a telemanipulációban. Az ilyen feladatoknál a szabályozás célja egy tárgy mozgatása adott kezdeti pozícióból egy kívánt véghelyzetbe, vagy egy előre kijelölt pálya követése.

A szabályozók a visszacsatolásból eredően instabillá válhatnak, ezért tervezésük során elsődleges szempont a stabilitás biztosítása. A stabilitásvizsgálat elvégzéséhez felállított modellek bizonyos jelenségekre csak közelítést adnak, vagy teljesen elhanyagolják azokat. Ilyen jelenségek közé tartozik a száraz súrlódás is, mely a gépészeti konstrukció és a matematikai modellezés szempontjából sem ideális. Modellezésével a szakirodalom évszázadok óta foglalkozik (Coulomb, XVII. sz.) és napjainkig születnek újabb modellek [1][2], melyekkel különféle jelenségek magyarázhatók, pl. az akadozó csúszás jelensége. A stabilitás szempontjából azonban a száraz súrlódási hatások elhanyagolásával a biztonság felé történik eltérés, hiszen ha egy súrlódásmentes rendszer stabil, akkor súrlódással még stabilabb [5][6]. Ezzel azonban a stabil paramétertartomány pontatlanul kerül feltérképezésre. Ez olyan esetekben jelenthet problémát, ahol célszerű a stabilitási határon, instabil egyensúlyi helyzetben végezni a szabályozást, mert úgy a mozgások sokkal gyorsabban indíthatók meg.

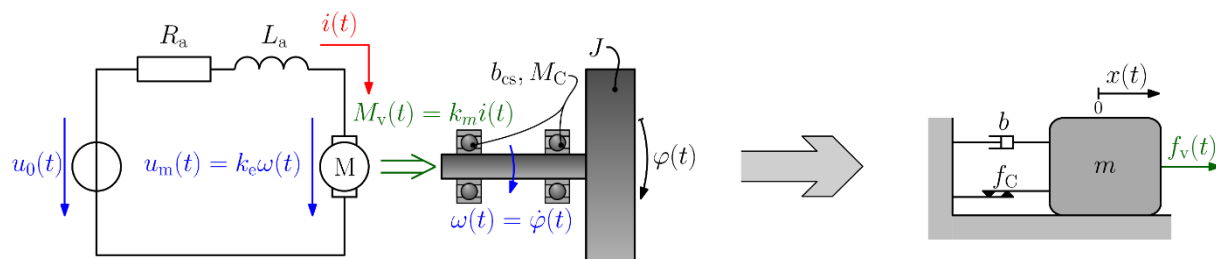
A szabályozók gyakorlati megvalósítása napjainkban szinte kizárólag számítógépekkel történik, melyek jellegükből eredően mintavételes rendszereket eredményeznek. Az ilyen szabályozók analízise jelentősen eltér a folytonos idejű rendszerektől [3][4], viszont a rendelkezésre álló számítási sebesség mellett kvázi folytonosnak tekinthetők ezek a rendszerek is. Egyes alkalmazási területeken (például mikrohajtások esetén), ahol a szabályozott szakasz nagyon érzékeny a bemenetre és az időállandói nagyon kicsik, a mintavételezés hatásai mégsem hanyagolhatók el. A kollaboratív robotikában az

ember-gép fizikai interakció során a beavatkozási időnek az emberi reakcióidő szab határt, így ott is szükséges külön foglalkozni a mintavételezés hatásaival.

Ezen cikk célja a mintavételezés és a súrlódásból eredő nemlinearitás stabilitásra gyakorolt hatásainak vizsgálata analitikus, kísérleti és szimulációs módszerek segítségével.

## 2. A VIZSGÁLT KÍSÉRLETI ESZKÖZ MODELLEZÉSE

A mechatronika egyik széles körben elterjedt beavatkozó szerve az egyenáramú villamos motor, így célszerűnek bizonyult egy ilyen eszköz példáján keresztül vizsgálni a nemlineáris mechanikai rendszereket. A DC motoros hajtások felépítésükből adódóan egy villamos és egy mechanikai alrendszerből állnak (1. ábra).



1. ábra A kísérleti eszközre felállítható elektromechanikai modell (balra) és az egyszerűsített egyenértékű mechanikai modell (jobbra)

A villamos alrendszer a motorra kapcsolt kapocsfeszültségből és az armatúra tekercseléséből áll. Az armatúra modellezése során figyelembe vehető annak ohmos ellenállása és önindukciója is, továbbá a Lorentz-erőből adódóan az átfolyó áram erősségével arányos villamos nyomatékkal hat a mechanikai oldalra. Ennek arányossági tényezője a  $k_m$  motorállandó.

A mechanikai alrendszer modellezhető a forgórész és a meghajtott terhelés  $J$  tehetetlenségi nyomatékával, a csapágyazás  $b_{cs}$  viszkozus csillapításával és  $M_C$  nagyságú Coulomb-súrlódási nyomatékával. Fontos továbbá, hogy a mozgási indukció jelensége miatt a forgórész szögsebességével arányos feszültség indukálódik a villamos rendszerben. Az arányossági kapcsolatot a  $k_e$  motorállandó teremti meg.

A rendszer dinamikáját az alábbi differenciálegyenletrendszer adja meg

$$\begin{cases} u_0(t) - L_a \frac{di(t)}{dt} - R_a i(t) - k_e \omega(t) = 0 \\ J \frac{d\omega(t)}{dt} + b_{cs} \omega(t) = k_m i(t) - M_C \operatorname{sgn}(\omega(t)) \end{cases} \quad (1)$$

ahol  $u_0$  a motorra kapcsolt feszültség,  $i$  az armatúrára átfolyó áram és  $\omega$  a forgórész szögsebessége. Mivel a villamos időállandó jellemzően nagyságrendekkel kisebb a mechanikai időállandónál, az induktivitás elhanyagolásával egyszerűsített modell állítható föl egyetlen energiatárolóval. Ennek megfelelően egy egyenértékű, tisztán mechanikai (transzlációs) rendszerként is vizsgálható a kísérleti eszköz, amelyben a mozgást Coulomb-súrlódás csillapítja, illetve a csapágyazás és a motor visszaható elektromotoros ereje viszkozus csillapításként jelenik meg (1. ábra).

Ezen modellre felírható a

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) = f_v(t) - f_c \operatorname{sgn}(\dot{x}(t)) \quad (2)$$

mozgásegyenlet, melynek megoldása állandó nagyságú  $f_v$  gerjesztés esetén

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{b}{m}t} + \frac{f_v \mp f_c}{b} t \quad \dot{x}(t) \geq 0, \quad (3)$$

ahol  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  állandók a kezdeti  $x(0) = x_0$  és  $\dot{x}(0) = v_0$  feltételekből adódnak. A mozgástörvény alapján meg lehet határozni azokat az időpillanatokat, amikor a sebesség (és így a Coulomb-súrlódási erő) irányt vált. Ennek figyelembevételével egzakt szimuláció készíthető.

### 3. STABILITÁSVIZSGÁLAT

Az alábbiakban egy mintavételes szabályozó stabilitásvizsgálata kerül elvégzésre, melyben a szabályozott szakasz a korábban bemutatott rendszer. A szabályozó minden mintavételi pillanatban az  $x(t)$  kitéréssel arányos  $f_v = -k_p x(t)$  erővel hat a rendszerre, valamint két mintavétel között a beavatkozó erő állandó nagyságú marad. A szabályozó paraméterei a  $t_s$  mintavételi idő és a  $k_p$  arányos erősítési tényező.

#### 3.1 Stabilitásvizsgálat analitikus módszerekkel

Az analitikus stabilitásvizsgálat során a Coulomb-súrlódás elhanyagolásra kerül, amely így összehasonlítási alapként szolgál a súrlódást is figyelembe vevő módszerekkel szemben. A független paraméterek száma csökkenthető a  $T = bt/m$  dimenziótlan idő, a  $\theta = bt_s/m$  dimenziótlan mintavételezési idő és a  $P = mk_p/b^2$  dimenziótlan arányos erősítési tényező segítségével, amikkel felírható a két mintavétel között érvényes

$$x''(T) + x'(T) = -Px(T_j) \quad T_j = 0, \theta, 2\theta, \dots \quad (4)$$

mozgásegyenlet, ahol  $T_j$  a  $j$ -edik mintavételezési pillanatot jelenti. Ezen differenciálegyenlet megoldásával meghatározható két mintavételi pillanat között a rendszer állapotváltozóira (a kitérésre és a sebességre) vonatkozó

$$\begin{bmatrix} x(T_{j+1}) \\ x'(T_{j+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - P(e^{-\theta} - 1 + \theta) & 1 - e^{-\theta} \\ P(e^{-\theta} - 1) & e^{-\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(T_j) \\ x'(T_j) \end{bmatrix} \quad (5)$$

leképezés. Ezek alapján az állapotváltozók mintavételi pillanatokban vizsgált időszora egy Neumann-sort alkot, melynek konvergenciája jelenti a rendszer aszimptotikus stabilitását, ami akkor áll fenn, ha a leképezés összes sajátértéke a komplex egységkörön belül helyezkedik el [8][9]. A stabilitási határ tehát azon paraméterkombinációknál található, ahol a leképezésre felírható karakterisztikus polinom valamely gyöke éppen a komplex egységkörön található. A komplex-konjugált gyökpár és a két valós gyök esetét megkülönböztetve a stabilitási határt (3. ábra) az alábbi három

$$P = \frac{e^\theta - 1}{e^\theta - \theta - 1}, \quad P = \frac{2(e^\theta + 1)}{e^\theta(\theta - 2) + \theta + 2} \quad \text{és} \quad P = 0 \quad (6)$$

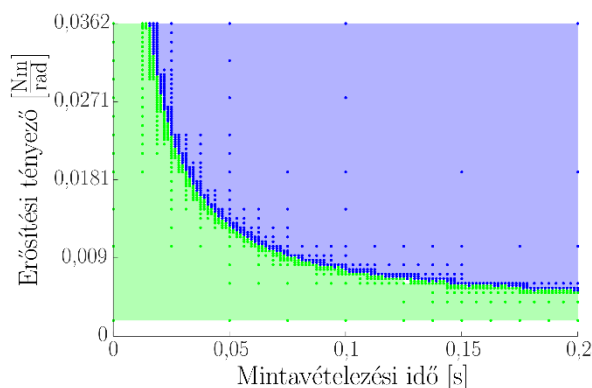
egyenlet adja meg.

#### 3.2 Stabilitásvizsgálat kísérleti úton és szimuláció segítségével

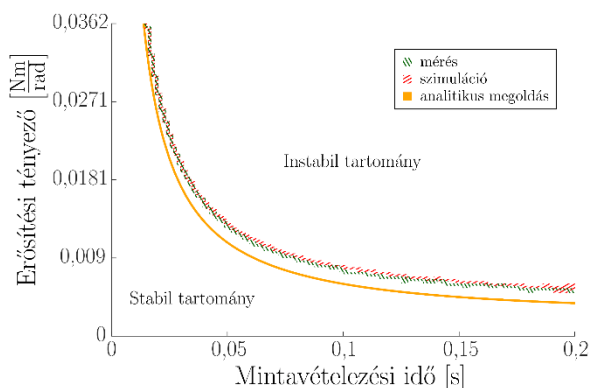
A stabilitás kísérleti úton történő vizsgálatához egy erre a célra kifejlesztett, teljesen automatizált mérőrendszer készült el. Minden kísérlet elején beállításra kerültek a szabályozási paraméterek, majd a digitális szabályozó működtetése során megállapításra került a kialakuló lengés stabilitása. Egy mérés addig futott, amíg a mozgás vagy meg nem állt, vagy a szabályozó nem került telítésbe. Előbbi eset stabilnak, utóbbi instabilnak tekinthető. A stabilitási határ keresésére hatékony megoldást jelentett az intervallumfelezési algoritmus többdimenziós kiterjesztése [7], melynek segítségével kevesebb méréssel lehetett pontos eredményt elérni (2. ábra).

### 4. ÖSSZEFOGLALÁS

A korábbiakban bemutatásra került egy nemlineáris, mintavételes rendszer stabilitásvizsgálata analitikus, kísérleti és szimulációs úton. Ezen módszereket összehasonlítva látható, hogy a mérési és a szimulációs eredmények jól fedik egymást. Az esetleges eltérések a modell egyszerűsítése, illetve az identifikáció bizonytalansága miatt lehetségesek. Az analitikusan levezetett stabilitási határ azonban jelentősen eltér, hiszen ott elhanyagolásra került a Coulomb-súrlódás. Ebből az a következtetés vonható le, hogy a Coulomb-súrlódás a stabil paramétertartományt kiterjeszti, továbbá ezen jelenség kisebb erősítési tényezőjű szabályozóknál jelentősebb mértékű.



2. ábra A kísérleti úton meghatározott stabilitási térkép. Minden egyes pont egy méréshez tartozik, zöld színnel a stabil és kékekkel az instabil lengéseket jelölve.



3. ábra A kísérleti, szimulációs és analitikus módszerekkel meghatározott stabilitási határok.

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A tanulmány alapjául szolgáló kutatás a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Mesterséges Intelligencia (BME FIKP-MI/FM) tématerületi programja keretében, az Emberei Erőforrások Minisztériuma által meghirdetett Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Program, a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap (TUDFO/51757/2019-ITM, Tématerületi Kiválósági Program), valamint a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal Posztdoktori Kiválósági Program által támogatott PD 128398 kutatási projekt támogatásával készült. Az előadó részvételét az OGÉT 2020 konferencián az NTP-HHTDK-19-0068 azonosítójú, „A hazai Tudományos Diákköri műhelyek és rendezvények támogatása” pályázat támogatta. Ezúton is köszönjük, hogy lehetővé tették a kutatási programunk megvalósítását.

## IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] E. Pennestri, V. Rossi, P. Salvini, P. Valentini, Review and comparison of dry friction force models, *Nonlinear Dynamics*, Springer, 2016, vol. 83, pp. 1785–1801.
- [2] F. Marques, P. Flores, J.C.P. Claro, H.M. Lankarani, A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems, *Nonlinear Dynamics*, Springer, 2016, vol. 86, pp. 1407-1443.
- [3] G. Stépán, A. Steven, L. Maunder, Design principles of digitally controlled robots, *Mechanism and Machine Theory*, Elsevier, 1990, vol. 25, pp. 515-527.
- [4] G. Stépán, Vibrations of machines subjected to digital force control, *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, 2001, vol. 38, pp. 2149-2159.
- [5] J. Kövecses, L.L. Kovács, G. Stépán, Dynamics modeling and stability of robotic systems with discrete-time force control, *Archive of Applied Mechanics*, Springer, 2007, vol. 77, pp. 293–299.
- [6] L.L. Kovács, J. Kövecses, G. Stépán, Analysis of effects of differential gain on dynamic stability of digital force control, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Elsevier, 2008, vol. 43, pp. 514-520.
- [7] D. Bachrathy, G. Stépán, Bisection method in higher dimensions and the efficiency number, *Periodica polytechnica Mechanical engineering*, *Periodica polytechnica*, 2012, vol. 56, pp. 81-86.
- [8] C. Budai, L.L. Kovács, J. Kövecses, Combined effects of sampling and dry friction on position control, *Nonlinear Dynamics*, Springer, 2019, vol. 98, pp. 3001-3007.
- [9] C. Budai, L.L. Kovács, On the Stability of Digital Position Control with Viscous Damping and Coulomb Friction, *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering*, *Periodica polytechnica*, 2017, vol. 61, pp. 266-271.