

# A száraz súrlódás néhány modelljének numerikus vizsgálata

## Numerical analysis of some of the models describing dry friction

LICSKÓ Gábor

Kutatás és fejlesztési csoportvezető, Knorr-Bremse Fékrendszerek Kft.  
H-1119 Budapest, Major utca 69., [www.knorr-bremse.hu](http://www.knorr-bremse.hu), gabor.licsko@knorr-bremse.com

### Abstract

*The phenomenon of dry friction is present in many fields of mechanical engineering. It plays an important role in areas such as the wheel-road connection, brake systems, or gas turbine blades, and has an impact not only on reliability but also on positioning accuracy and efficiency. Engineers have been trying to model this complex phenomenon mathematically since the 18th century. By examining their models, many nonlinear dynamic phenomena can be discovered, which may also have an impact on the operation of our devices. We present a simple one-degree-of-freedom mechanical system with different friction models, in which chaotic behavior can arise. We also highlight some additional phenomena, which are a peculiarity of the so-called piecewise smooth mechanical systems and occur in this model as well.*

**Keywords:** coefficient of friction, period doubling, chaos, Feigenbaum constant

### Kivonat

*A száraz súrlódás jelensége a gépészet számos területén jelen van. Olyan területeken játszik fontos szerepet, mint a kerék-út kapcsolat, fékberendezések, vagy gázturbinák lapátjai, és kihatással van a megbízhatóság mellett a beállási pontosságra és a hatásfokra is. A mérnökök igyekeztek ezt az összetett jelenséget már a 18. századtól matematikailag kezelhetően modellezni. Modelljeiket megvizsgálva számos nemlineáris dinamikai jelenség fedezhető fel, melyek ugyancsak kihatással lehetnek a berendezéseink működésére. Bemutatunk egy egyszerű egy szabadságfokú mechanikai rendszert, melyben különböző súrlódási modellek felhasználásával kaotikus viselkedés is megvalósulhat. Kiemelünk néhány további jelenséget, mely az ún. szakaszosan sima mechanikai rendszerekre jellemző, és ebben a modellben is előfordul.*

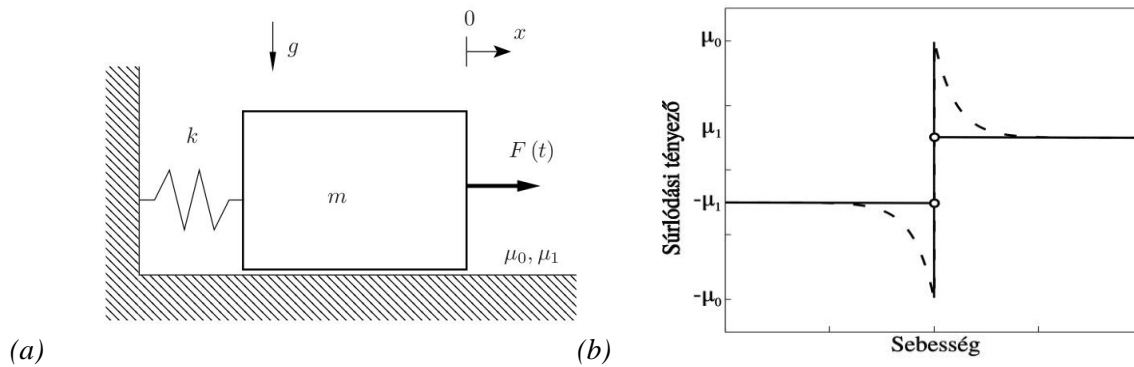
**Kulcsszavak:** súrlódási tényező, perióduskettőződés, káosz, Feigenbaum-állandó

## 1. BEVEZETÉS

A száraz súrlódás általában nemkívánatos jelenség a gépészeti tervezésben, azonban vannak olyan területek, ahol fontos szerepet tölt be. Például gőz- és gázturbinákban alkalmazott csillapító ékek a tehetetlenségi hatások miatt forgás közben a lapátok alsó felületéhez nyomódva csillapítják a lapátok rezgéseit [1, 2]. Vannak azonban példák, ahol éppen a súrlódás nemkívánatos hatásait igyekezünk csökkenteni, mint például fékek csikorgása, vagy a pozicionálás [3, 4]. Ahhoz, hogy az ehhez hasonló mechanikai rendszerek viselkedését tanulmányozhassuk, szükséges egy modell felállítása. Az elmúlt évtizedek alatt sokféle súrlódási modellt állítottak fel. Jelen cikkben ezek közül kettővel fogunk részletesebben foglalkozni: a Coulomb- és a Stribeck-moddellel.

### 1.1. A mechanikai modell

A lehető legegyszerűbb modellt igyekeztünk használni, amivel még lehetséges megragadni a súrlódási jelenségek fontos jellemzőit. Erre a célra egy egy szabadságfokú mechanikai rendszert választottunk, melyet az 1(a) ábra szemléltet. Ebben egy  $m$  tömegű hasáb érdes talajon csúszik, míg a falhoz lineáris rugó kapcsolja, másik oldalon pedig harmonikus erőerjesztés működik. Ez a modell önmagában, vagy kis kiegészítéssel képes leírni a bevezetésben említett mechanikai rendszereket, és alkalmas a legtöbb súrlódási összefüggés vizsgálatára.



1. ábra. Mechanikai modell (a) és súrlódási modellek (b) (Folytonos – Coulomb, szaggatott – Stribeck)

A mechanikai modellt dimenziótlantítottuk, hogy a rendszer általánosan vizsgálható legyen, a megállapítások hasonló mechanikai rendszerek családjára is érvényesek legyenek. Az így kapott mozgásegyenlet a következő alakú:

$$\ddot{x} + x = \cos(\Omega t) - S_1 f(\dot{x}),$$

melyben már csak a gerjesztés dimenziótlant körfrekvenciája ( $\Omega$ ), valamint a célszerűen átskálázott csúszási súrlódási együttható szerepel.

A súrlódás figyelembevételére is egy egyszerű matematikai modellt választottunk. Fontos, hogy a súrlódás megjelenése a modellben jellegéből adódóan ún. szakaszosan simává teszi a leíró egyenleteket. Ez a legtöbb esetben azt jelenti, hogy a sebesség előjelváltásakor egy másik egyenlet-rendszer lesz érvényes. Majdnem minden súrlódási modellekben megjelenik ilyen szakadás, vannak azonban összetettebb modellek, melyekben egy nem fizikai paraméterrel simítható a viselkedés.

Ebben a kutatásban két típust vizsgáltunk meg, a módosított Coulomb-modellt, melyben szétválasztottuk a statikus és a dinamikus súrlódási együtthatót,

$$f(\dot{x}) \in \begin{cases} 1, & \text{ha } \dot{x} > 0 \\ [-S_0/S_1, S_0/S_1], & \text{ha } \dot{x} = 0 \\ -1, & \text{ha } \dot{x} < 0 \end{cases}$$

valamint egy a Stribeck-hatást figyelembe vevő összefüggést:

$$f(\dot{x}) \in \begin{cases} 1 + (S_0/S_1 - 1) \cdot e^{(-\dot{x}/v_s)}, & \text{ha } \dot{x} > 0 \\ -(1 + (S_0/S_1 - 1)) \cdot e^{(\dot{x}/v_s)}, & \text{ha } \dot{x} < 0 \end{cases}$$

ahol  $v_s$  a statikus és dinamikus tényező közti átmenetet leíró konstans, az átmenetet pedig az exponenciális függvény biztosítja. A súrlódási tényező sebességtől való függését az 1(b) ábra szemlélteti mindkét esetben.

A két modellben közös, hogy diszkontinuitást idéz elő a mozgásegyenletben, de míg a Coulomb modellben ez kétszeresen is megtörténik (irányváltásnál és letapadás utáni felszakadásakor), addig ez utóbbi a Stribeck modellnél a tényezők közti folytonos átmenet miatt nem jelentkezik. Ennek hatását fogjuk látni az eredményekben.

## 2. ALKALMAZOTT NUMERIKUS VIZSGÁLATI MÓDSZEREK

### 2.1 Bifurkációs diagramok

A modell viselkedésének feltérképezésére időtartománybeli numerikus szimulációt végeztünk, és több jellemző mennyiséget regisztráltunk. Ezek közül a rendszer vizsgálatára legjellemzőbbnek a letapadáskori kitérés bizonyult. A test ugyanis kis kitéréskor bekövetkező irányváltáskor rövid időre letapadhat, míg a gerjesztő erő le nem küzd a tapadási súrlódást. Egy, vagy többperiódusos harmonikus lengőmozgás esetén ezek a letapadások mindig ugyanazokra az elmozdulásértékekre esnek, de például kaotikus mozgáskor egy tartományon szóródnak szét.

A Coulomb-súrlódásos matematikai modell megoldása két ilyen letapadás, vagy irányváltoztatás közt kifejezhető zárt alakban, ezért ott csak a felszakadások pillanatának számítása terhelt numerikus hibával. A Stribeck-modell esetében viszont numerikus integrálást kellett alkalmazni, zárt alakú megoldást itt nem sikerült előállítani.

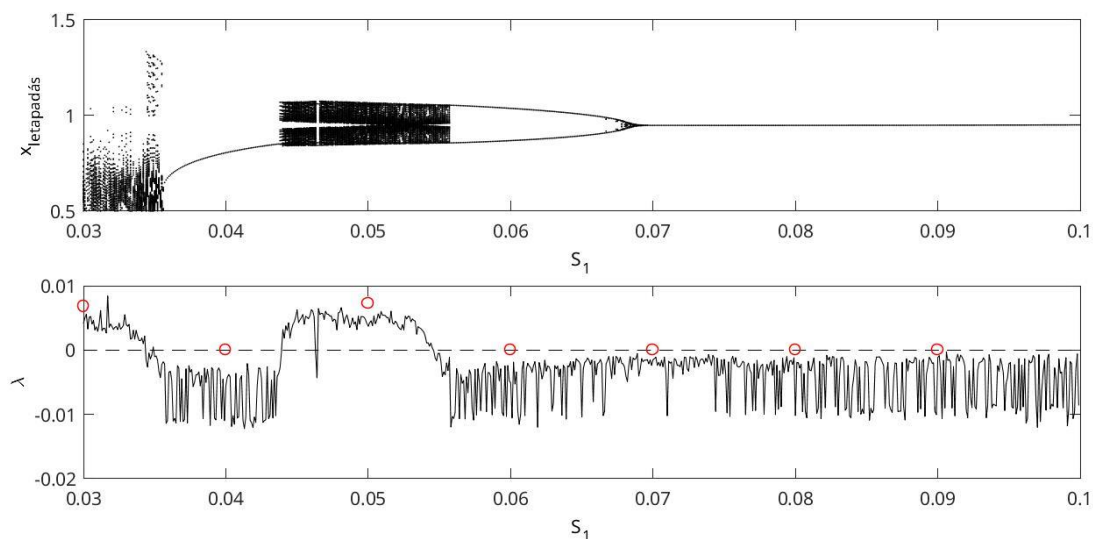
Változtatható paraméterként a dinamikus súrlódási tényezőt jelöltük ki ( $S_1=0-0,4$ ), a fix paraméterek pedig a statikus tényező ( $S_0=0,4$ ), valamint a gerjesztési körfrekvencia ( $\Omega=0,5$ ) voltak. Ezekkel a beállításokkal a változó paraméter minden értékére véletlen kezdeti állapotból több szimulációt is indítottunk, majd az állandósult mozgás utolsó néhány letapadását a 2. és 3. ábrákon látható bifurkációs diagramokon pontokkal ábrázoltuk.

## 2.2 Maximális Ljapunov-exponens

A kialakuló mozgás kaotikusságát a maximális Ljapunov exponens pozitív volta képes jelezni. A Ljapunov exponens leírja két közeli megoldás egymástól való távolodását. Az exponenciális távolodás jele a káosznak. Ennek a mennyiségnek a számításához két különböző eljárást használtunk fel. Egyrészt egymás közeléből indítva két megoldást, mértük a köztük a fázistérben lévő távolság alakulását (2. ábra alsó felén folytonos vonal). Másrészt felhasználtuk Stefanski és Kapitaniak módszerét [5], amely két hasonló dinamikai rendszer szinkronizálásával határozza meg a Ljapunov exponenst (2. ábra alsó felén piros körök). Mindkét módszer előnye, hogy alkalmazható szakaszosan sima rendszerekre is.

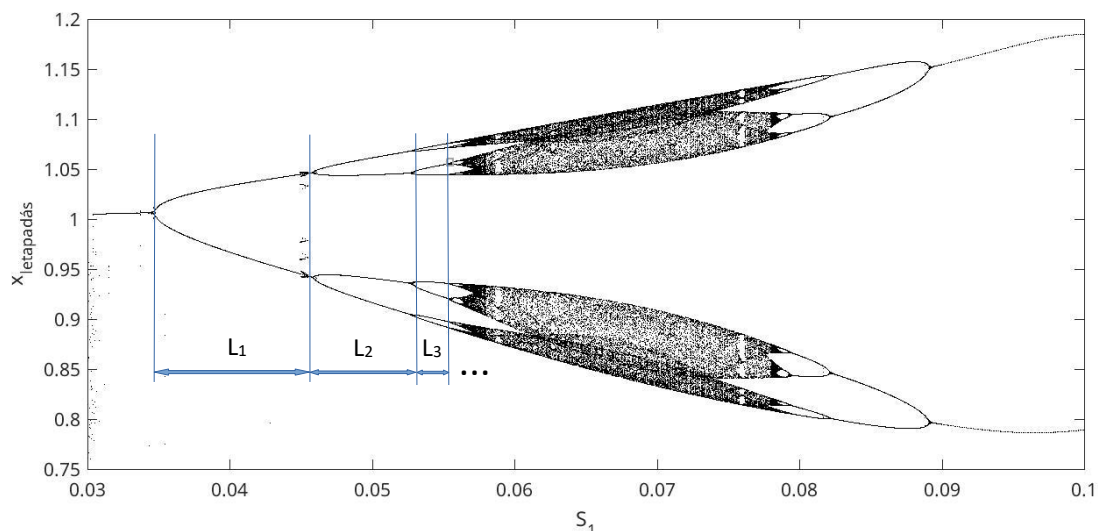
## 3. EREDMÉNYEK

A bifurkációs diagramokon jól látható, hogyan változik meg a rendszer viselkedése egyetlen paraméter változásának hatására. Mind a Coulomb, mind pedig a Stribeck súrlódásos modellel megfigyelhető perióduskettőződés, vagyis, amikor egy gerjesztési periódus alatt a mozgás több periódusú.



2. ábra. Bifurkációs diagram és maximális Ljapunov-exponens a Coulomb-modellben

Míg azonban a 2. ábrán jobbról balra haladva periódus kettőződés után ( $S_1=0,687$ ) azonnali kiterjedt káosz áll be ( $S_1=0,439-0,557$ ), majd utána hirtelen ismét periodikussá válik a mozgás (folytonos vonal  $S_1=0,358-0,439$ ), addig a 3. ábrán egy ún. periódus kettőző, vagy Feigenbaum-kaszád során ( $S_1=0,07856-0,08917$ ) jutunk el a kaotikus tartományig, ami azután ugyanilyen módon szűnik meg ( $S_1=0,03473-0,05641$ ).



3. ábra. Bifurkációs diagram a Stribeck modellben

A Feigenbaum kaszkádnak folytonos rendszerek unimodális leképezéseiben jellemző tulajdonsága, hogy az egymást követő kettőződéses (elágazási pontok) egyre közelebb vannak egymáshoz, valamint ezeknek a távolságoknak a páronkénti hányadosai állandók (a 3. ábra jelöléseivel  $L_1/L_2=L_2/L_3$ ). A Stribeck modellben ez a hányados nem bizonyult állandónak. A kapott értékeket az 1. és 2. táblázatban foglaltuk össze.

Feigenbaum-állandó a Stribeck-modellben a bal oldali kaszkádban

1. táblázat

| Elágazások távolságának hányadosa | Feigenbaum-állandó értéke |
|-----------------------------------|---------------------------|
| $L_1/L_2$                         | 1.6462                    |
| $L_2/L_3$                         | 2.5428                    |
| $L_3/L_4$                         | 3.6351                    |
| $L_4/L_5$                         | 4.625                     |

Feigenbaum-állandó a Stribeck-modellben a jobb oldali kaszkádban

2. táblázat

| Elágazások távolságának hányadosa | Feigenbaum-állandó értéke |
|-----------------------------------|---------------------------|
| $L_1/L_2$                         | 5.9152                    |
| $L_2/L_3$                         | 2.4946                    |
| $L_3/L_4$                         | 3.8219                    |
| $L_4/L_5$                         | 4.0556                    |
| $L_5/L_6$                         | 6.0                       |

Feigenbaum cikkében kvadratikus egydimenziós leképezésekre fogalmazta meg megállapításait, mely szerint a hányadosok az elágazások mentén konstanshoz tartanak. A mi esetünkben háromdimenziós a fázistér, de a letapadások dinamikáját szintén lehet közelíteni egydimenziós leképezéssel.

## 4. ÖSSZEFOGLALÁS ÉS TOVÁBBLÉPÉS

Az egyszerű, egyszabadságfokú mechanikai modellünkben kialakuló mozgás nagyban függ attól, hogy milyen súrlódási modellt választunk a probléma matematikai leírásában. Előfordulhat kaotikus viselkedés is, de ennek bekövetkezése eltérő módon mehet végbe. A szakaszosan sima dinamikai rendszerek abban is eltérnek a folytonos függvényekkel leírhatóktól, hogy ha a kaotikus mozgás periódus kettőzések során át valósul meg, akkor a Feigenbaum-állandó számításakor nem mindig tart monoton módon egy állandó értékhez. A továbbiakban a káosz alátámasztására szükséges megvizsgálni a Stribeck-modellben is a Ljapunov-exponens alakulását, valamint a rögzített paraméterek eltérő értékére, és másik változó paramétereket választva is feltérképezni a rendszer viselkedését.

## IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Sanliturk, K. Y., Imregun, M., Ewins, D. J. *Harmonic Balance Vibration Analysis of Turbine Blades With Friction Dampers*. J. Vib. Acoust. ASME, 1997, 119(1), 96–103.
- [2] Daniele Botto, Muhammad Umer, *A novel test rig to investigate under-platform damper dynamics*, Mechanical Systems and Signal Processing, Elsevier, 2018, 100, 344-359.
- [3] Kinkaid, N., O'Reilly, O., Papadopoulos, P. *Automotive disc brake squeal*, Journal of Sound and Vibration, 2003, 267, 105 – 166.
- [4] Swevers, J., Al-Bender, F., Ganseman, C.G., Projogo, T. *An Integrated Friction Model Structure with Improved Preslid-ing Behavior for Accurate Friction Compensation*. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(4), 675–686
- [5] Stefanski, A., Kapitaniak, T., *Using chaos synchronization to estimate the largest lyapunov exponent of nonsmooth systems*, Discrete Dynamics in Nature and Society, 2000, 4, 207-215