

# Inverz inga biztonságkritikus szabályzásának vizsgálata korlátolt beavatkozás mellett

## Safety-Critical Control of inverted pendulum with input constraint

GÁCSI László<sup>1</sup>, KISS Ádám<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék

<sup>2</sup>HUN-REN – BME Gépek Dinamikája Kutatócsoport, 1111 Budapest, Műgyetem rkp. 3,

Tel.: +36 1 463-1370, E-mail: lacibarca99@gmail.com, [kiss\\_a@mm.bme.hu](mailto:kiss_a@mm.bme.hu)

### Abstract

*Safety-Critical Control is emerging as one of the most significant research areas nowadays. Its undisputed reputation is due to the straightforward computation of the input signal for any nonlinear system. In its practical implementation, one of the major challenges is the input constraint, since the forward invariance, on which the Safety-Critical Control is based, can no longer be guaranteed. To address this problem, the Backup set method has been used and applied via the example of the inverted pendulum.*

**Keywords:** Safety-Critical Control, nonlinear control, input constraint, inverted pendulum

### Kivonat

*A Biztonságkritikus szabályzás napjaink egyik legmeghatározóbb kutatási területévé kezd válni. Töretlen népszerűségét a beavatkozási jel görbülékeny kiszámításának köszönheti bármilyen nemlineáris rendszer esetén is. Gyakorlati megvalósításában az egyik legnagyobb akadályt a korlátolt beavatkozás jelenti, hiszen ekkor a halmazinvariancia, ami alapján működik a Biztonságkritikus szabályzás, többé már nem biztosítható. Ennek megoldására a Backup set módszert használtuk fel és alkalmaztuk az inverz inga példáján keresztül.*

**Kulcsszavak:** Biztonságkritikus Szabályzás, nemlineáris szabályzás, korlátolt beavatkozás

## 1. BEVEZETÉS

A biztonságos működés a dinamikai rendszereink elsődleges célja. Azt viszont, hogy pontosan mit értünk biztonság alatt, intuitív és problémáfüggő. Gépészmérnöki területen leggyakrabban gépek munkaponti működésére gondolhatunk, ennek szabályzására jellemzően egyensúlyi hely körüli stabilizálást használnak. Ennek értelmében a cél, hogy a rendszer állapotváltozóit a fázistér egy pontjában legyenek tartva. Teljesen más perspektívát nyújt és ebből kifolyólag más jellegű feladatokra is alkalmazható a Biztonságkritikus szabályzás, mely az előbbi gondolatmenet alapján a fázistéren már nem egy pontban, hanem egy halmazon belül tartja az állapotváltozókat [1]. Alkalmazási területe szerteágazó, elsődlegesen akadály kikerülésére használják, például [2]-ben láthatjuk segway-en, drónokon, vadászrepülőn és különböző robotokon tesztelve. Azonban még sokrétűbb elterjedésének egyik legnagyobb korlátját a beavatkozási jel szaturációja jelenti, másnéven a valóságban alkalmazásakor az aktuátorok nem képesek elérni a szabályzó által előre meghatározott beavatkozás értékét. Erre nem lehet az az általános irányelv, hogy építsünk nagyobb és erősebb motorokat, mert egyrészt az egyre erősebb aktuátorok gyártása egy ponton túl már nem lenne sem praktikus, sem megfizethető; másrészt találkozhatunk a valóságban olyan szabályzókkal, melyek olyan fizikai mennyiségek alapján működnek, amik természetüknél fogva korlátosak (például ilyen az abszolút hőmérséklet vagy a légnyomás). A Biztonságkritikus szabályzás megjelenése óta annak egyik legkomplikáltabb részterülete éppen a korlátolt beavatkozás jelenlétében való hatékony működés biztosítása. Számos próbálkozás található meg a szakirodalomban, viszont ezek közül a leghatékonyabbnak mutatózó Backup set módszert [3] használtuk fel. Hátránya ugyanakkor, hogy megkonstruálására nincs általános

módszertan, így munkánk során saját ötlettel megalkotott backup set és kontrollert alkalmaztunk mégpedig a Lyapunov-egyenlet [4] segítségével.

## 2. BIZTONSÁGKRITIKUS SZABÁLYZÁS

Mielőtt rátérnénk a szabályzásra, először szükséges bevezetni magát a dinamikai rendszert, melyet affinnak tekintünk:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

ahol  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  az állapotváltozók vektora,  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  és  $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  a dinamikai modellt jellemző vektor – és mátrixfüggvények, illetve  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  a beavatkozási vektora. A rendszer affinságán azt értjük, hogy a beavatkozási jelet lineárisan kiemelhető az (1)-es egyenlet jobb oldalán. Ezt követően, ha a biztonságot a matematika nyelvén szeretnénk lefordítani, akkor egy olyan szabályzás megtervezésére van szükségünk, mely az állapotváltozókat egy bizonyos határon belül képes tartani, melyre biztonságos tartományként hivatkozhatunk. A továbbiakban a szabályzónak ezt a tulajdonságát nevezzük halmazinvarianciának. Ilyen biztonságkritikus szabályzók az úgynevezett Control Barrier Function (CBF) [1] elméletével konstruálhatók, amely során a biztonságos tartományt egy  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvénnyel definiáljuk az állapotváltozók terében, és a  $h \geq 0$  halmazra biztonságos tartományként hivatkozunk [2]. Ha teljesül az (1)-es dinamikai rendszer összes  $\mathbf{x}$  elemére a következő egyenlőtlenség, akkor  $h$ -t valódi CBF-nek nevezhetjük:

$$\dot{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq -\kappa(h(\mathbf{x})), \quad (2)$$

melyben  $\kappa: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  egy úgynevezett *class-K* függvény és legfontosabb tulajdonsága, hogy  $\kappa(0) = 0$ , valamint szigorúan monoton növekvő függvény. A szabályzó általános esetben optimalizációs probléma (Quadratic Programming) megoldásaként áll elő [1]:

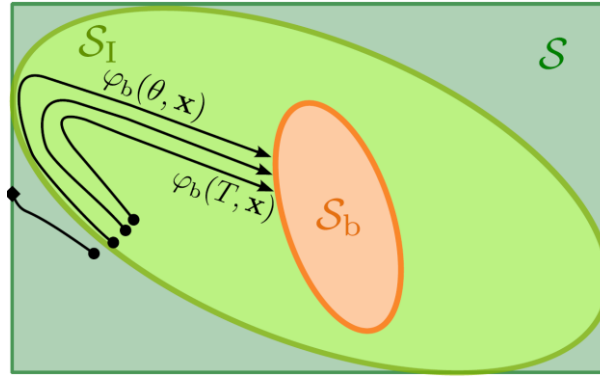
$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \operatorname{argmin} \frac{1}{2} |\mathbf{u} - \mathbf{k}_d(\mathbf{x})|^2 \\ \text{s.t. } \dot{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &\geq -\kappa(h(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (3)$$

ahol  $\mathbf{k}_d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  egy ismertnek tekinthető, nominális szabályzás. Az optimalizáció olyan  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  bemenetet biztosít végeredményben, mely minimálisan módosítja a nominális szabályzást olyan módon, hogy a rendszer állapotváltozóit által meghatározott trajektória a biztonságos tartományon belül marad végig a szimuláció alatt. Látható továbbá, hogy az  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  visszacsatolt beavatkozásnak nem része a korlátolt beavatkozás kezelése, így nem is meglepő, hogy azt sokszor nem vagyunk képesek kezelni. Amennyiben a (3)-as optimalizációhoz hozzátennénk az  $\mathbf{u}_{\min} \leq \mathbf{u}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{u}_{\max}$  feltételt, akkor arra a megállapításra jutnánk, hogy az optimalizálandó függvénynek nem létezik minimuma, így más módszerhez kell folyamodnunk.

## 3. BACKUP SET MÓDSZER

Ami a korlátos beavatkozás melletti CBF szabályzást illeti, az elmúlt évek legnagyobb figyelmét a Backup set módszer szerezte, hiszen azon kívül, hogy bármilyen általános dinamikai rendszeren alkalmazható, még matematikailag is bizonyított módszer. Az előző fejezetben tárgyalt CBF-nek az a valódi hibája, hogy korlátolt beavatkozás mellett nem feltétlen lesz kontroll-invariáns. Ezzel szemben a Backup set módszer kiindulópontja pont a CBF-ével ellentétes: először keresünk egy kontroll-invariáns halmazt, melyet  $h_b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  backup set-nek hívunk és a biztonságos tartomány részhalmaza, majd egy  $\mathbf{k}_b(\mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  backup kontrollert, mely azon túl, hogy korlátolt beavatkozású, még működése alatt a backup set kontroll-invariáns is. Amennyiben sikerül alkalmas backup set-et és kontrollert találni (hiszen ezek megkonstruálására egyelőre nincs általános módszertan), akkor gyakran azzal lehet szembesülni, hogy a backup set mérete meglehetősen kicsi, melynek következményeképpen a szabályzás túlságosan is konzervatív lesz. Ezen szeretnénk változtatni, mégpedig a backup set kibővítésével, hogy elérhessük a maximális nagyságú invariáns halmazt (mely korlátolt beavatkozás hiányában ekvivalens a biztonságos tartománnyal). Ehhez van szükségünk a backup set-re és controllerre, és az utóbbi alatti dinamikai rendszer megoldásaira, melyet  $\varphi_b(t, \mathbf{x}(0)) \in \mathbb{R}^n$  –vel jelöljük [3]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{k}_b(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}_b(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi_b(t, \mathbf{x}(0)), \quad (4)$$



1. Az  $S_I$  invariáns halmaz grafikus értelmezése világoszölddel, az  $S_b$  backup set narancssárgával és az  $S$  biztonságos tartomány sötétzölddel.

és így ez alapján és az 1. ábrával összhangban [3]:

$$S_I = \{\mathbf{x} : (\varphi_b(\theta, \mathbf{x}) \in S, \forall \theta \in [0, T]) \wedge (\varphi_b(T, \mathbf{x}) \in S_b)\}. \quad (5)$$

Szavakkal kifejezve azt jelenti, hogy az  $S_I$  invariáns halmaz azon pontok halmaza, ahol a backup kontroller alatti dinamika állapotváltozóinak jövőbeli értékei a biztonságos tartományon belül maradnak minden időpillanatban a  $[0, T]$  időintervallum között, és megérkeznek a backup set-be  $T$  időpillanatban. Látható továbbá az 1. ábrán a legalsó trajektória esetén, hogy azért nem része az invariáns halmaznak, mert a backup kontroller alatt nem sikerült a biztonságos tartományon belül tartani. Az invariáns halmaz érdekessége, hogy általános esetben explicit módon ki nem fejezhető, a szimuláció során határait nem látjuk, arra csupán következtethetünk. Az (5)-s kifejezésben megjelenő  $T$  időt predikciós időnek nevezzük és amennyiben  $T = 0$ , akkor nem növeltük a backup set méretét, és amennyiben  $T \rightarrow \infty$ , akkor közelíti meg a backup set az invariáns halmazt. A módszer gyakorlati megvalósításához azt kell tennünk, hogy az invariáns halmaz definícióját (5) implementáljuk a (3)-as QP optimalizációba [3]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \operatorname{argmin} \frac{1}{2} |\mathbf{u} - \mathbf{k}_d|^2, \\ \text{s.t. } \dot{h}(\varphi_b(\theta, \mathbf{x}), \mathbf{u}) &\geq -\kappa \left( h(\varphi_b(\theta, \mathbf{x})) \right), \forall \theta \in [0, T], \\ \dot{h}_b(\varphi_b(T, \mathbf{x}), \mathbf{u}) &\geq -\kappa_b \left( h_b(\varphi_b(T, \mathbf{x})) \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Ideális esetben az első kényszerfeltételt folytonosan minden időpillanatra garantálni kell  $[0, T]$  időintervallumon, mely végtelen kényszerfeltételt eredményezne. Mivel ez nem lehetséges numerikusan, ezért valamilyen időbeli felosztással diszkrétizálni szükséges  $N_c$  darab kényszer egyenletre. Mivel  $\varphi_b$ , a backup kontroller alatti dinamika megoldása sok esetben analitikusan nem határozható meg, ezért numerikusan kell megoldanunk, ezt nevezhetjük a szimuláció előprediktáló részének.

#### 4. BACKUP SET ÉS KONTROLLER KONSTRUÁLÁSA

Ahogy említettük, nincs módszertan arra, hogy a (6)-os optimalizációban hogyan vegyük fel a backup set-et és az ahhoz tartozó kontrollert olyan módon, hogy azok egymással hatékonyan működjenek. Különböző szakirodalmakban láthatunk jól működő példákat, viszont ezek csak adott dinamikai rendszerekre alkalmasak. Ebben a fejezetben egy lényegében általánosabb módszert mutatunk be, a backup set-et egy  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  Lyapunov-függvény  $c$  szintvonalával definiáljuk:

$$h_b(\mathbf{x}) \triangleq c - V(\mathbf{x}). \quad (7)$$

Ha megnézzük ennek az idő szerinti deriváltját és behelyettesítjük (2)-be, akkor azt kapjuk, hogy:

$$-\dot{V}(\mathbf{x}) \geq -\kappa(h_b(\mathbf{x})), \quad (8)$$

amely teljesül abban az esetben, ha a  $V(\mathbf{x})$  pozitív definit, és  $\dot{V}(\mathbf{x})$  negatív szemidefinit. Ez csak akkor valósul meg, ha  $\mathbf{x}_0$  egyensúlyi hely – ami köré  $V(\mathbf{x})$ -et definiáltuk – stabil [4]. Viszont  $\mathbf{x}_0$  stabilitásához éppenséggel a backup kontrollert szükséges helyesen megválasztanunk; a backup controller és a Lyapunov-függvény közötti kapcsolatot az úgynevezett *Continuous-time Lyapunov Equation* (CTLE) [4] fogja biztosítani, ha a Lyapunov-függvényt kvadratikusnak feltételezzük:

$$V(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \triangleq (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (9)$$

ahol  $V$  akkor és csakis akkor lesz pozitív definit, ha  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix pozitív definit. Ehhez a  $\mathbf{P}$  mátrix meghatározásához lesz szükségünk a CTLE-re, melyet  $\mathbf{P}$ -re kell megoldanunk [4]:

$$\mathbf{A}_{cl}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_{cl} = -\mathbf{Q}. \quad (10)$$

Ebben a kifejezésben  $\mathbf{A}_{cl} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} - \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \cdot \mathbf{K}$ , tehát a backup controller alatti zárt dinamika linearizált alakja  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  munkapont körül, ahol a backup controller  $\mathbf{k}_b(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{u}_0$  teljesállapot visszacsatolás. Ezen túlmenően szabadságunk van  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix megválasztásában, csupán azt kell szem előtt tartanunk, hogy pozitív definit legyen, hiszen ekkor lesz a (10)-es mátrixegyenletben  $\mathbf{P}$  egyértelmű. A  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  munkapont megválasztására is szabadságunk van, viszont az előző fejezetben említett megállapítást be kell tartani, mégpedig azt, hogy a backup set a biztonságos tartomány részhalmaza legyen, azaz a következő egyenlőtlenségnek teljesülnie kell:

$$h(\mathbf{x}_0(\mathbf{u}_0)) \geq 0. \quad (11)$$

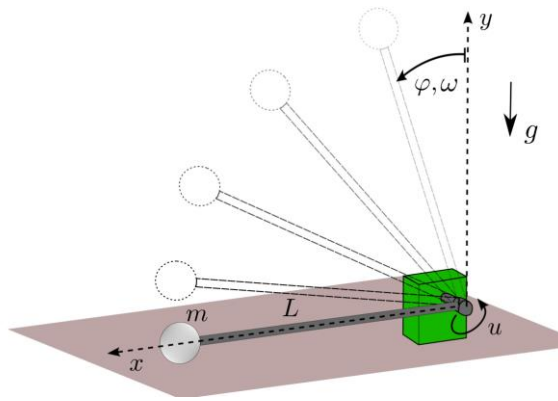
Láthatjuk, hogy az  $\mathbf{A}_{cl}$  mátrix magától a dinamikai rendszertől, a munkapont helyétől, illetve a backup controller  $\mathbf{K}$  erősítési tényezőjétől függ. Az utóbbi megválasztása abból a szempontból lényeges, hogy ez fogja biztosítani  $V(\mathbf{x})$  pozitív definittségét, mégpedig úgy, hogy ezzel stabilizáljuk  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  munkapontot. Ehhez segítségül hívjuk a Routh-Hurwitz kritériumot [4], mely szerint az  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$  munkapont stabil, ha az  $\mathbf{A}_{cl}$  mátrix karakterisztikus egyenletének összes együtthatója egyforma előjelű, és ezen megállapítások alapján lehetséges megválasztani  $\mathbf{K}$  erősítési tényező komponenseit.

Az utolsó paraméter, aminek megfelelő bekalibrálása szintén kulcsfontosságú, az a (7)-es egyenletben szereplő  $c$  paraméter, mely a kiválasztott Lyapunov-függvény szintvonala. Ennek megválasztásánál két szempontot kell figyelembe vennünk: egyrészt, túl nagy érték megválasztásával a backup set „kilóghat” a biztonságos tartományból. Másrészt, mivel a backup controllernek a szaturált alakjával kell dolgoznunk annak érdekében, hogy az korlátolt beavatkozású legyen (azaz  $\mathbf{k}_b(\mathbf{x}) = \text{sat}(-\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{u}_0)$ ), ezért az invariancia fenntartása végett a backup set a backup controller még nem szaturált, azaz lineáris szakaszáról sem „lóghat ki”. Mindkét megállapítás biztosítása feladatfüggő, viszont inkább geometriai, mintsem szabályzási problémák.

## 5. ALKALMAZÁS INVERZ INGÁN

Az inverz ingán példáján bemutatni a Backup set módszerrel megerősített CBF-t abból a szempontból praktikus, hogy ez a modell még nem annyira összetett, hogy a szabályzás paramétereinek a mechanikai rendszerre gyakorolt hatását szem elől tévesszük, viszont már elég komplex ahhoz, hogy mechanikai jelentést társítsunk hozzá. A mozgásegyenlete az alábbi alakban írható fel:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega \\ \frac{3g}{2L} \sin(\varphi) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{mL^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} u, \quad (12)$$



## 2. Inverz inga modellje.

ahol az  $u$  beavatkozás egy motornyomatékkal arányos mennyiség. Amennyiben bevezetjük az  $L \triangleq 3g/2$  és  $m \triangleq 4/3g^2$  jelölést és a következetesség kedvéért  $x \triangleq \varphi$  és  $y \triangleq \omega$ , akkor az egyszerűsített mozgásegyenlet:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \sin(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (13)$$

A 2. ábrán látható egyszerű modell esetében a biztonságot úgy vezetjük be, hogy szeretnénk elkerülni, hogy az inverz inga neki ütközzön az asztalnak. Ez lehetne egy leegyszerűsített modellje is például egy segwaynek, hiszen annál sem szeretnénk, hogy eldőljön. Ezen túl, ha szeretnénk a szögsebességet is korlátozni, akkor a következő biztonságos tartományt definiáljuk:

$$h(x, y) = 1 - \left(\frac{x}{x_{kr}}\right)^2 - \left(\frac{y}{y_{kr}}\right)^2. \quad (14)$$

Az elsődleges lépés, hogy kiválasszuk a munkapontot, mely legyen  $u_0 \equiv 0$ , melyre  $x_0 \equiv y_0 \equiv 0$  a (13)-as mozgásegyenlet alapján. Belátható, hogy ezzel a (11)-es feltétel is teljesül. Ezt követően elvégezve a dinamikai rendszer linearizálást a kiválasztott munkapont körül, azt kapjuk, hogy:

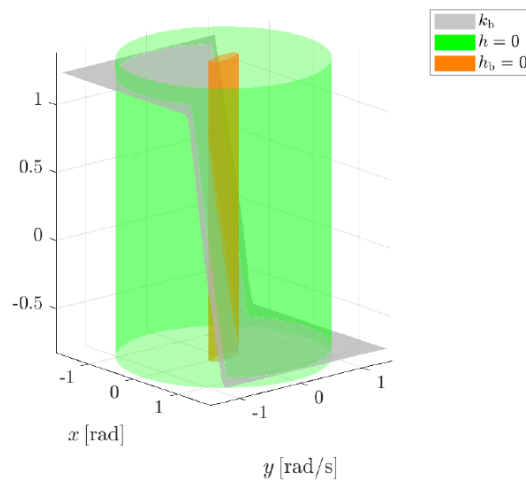
$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - K_1 & -K_2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

ha  $\mathbf{K} = (K_1, K_2)^T$ . A Routh-Hurwitz kritériumot alkalmazzuk, melyhez szükséges meghatározni (15)-nek a karakterisztikus egyenletét. Ebből következik, hogy  $K_1 > 1$  és  $K_2 > 0$  megválasztásával lesz a kiválasztott munkapont stabil. A szimulációhoz felhasznált paramétereket az 1. táblázat tartalmazza. A korlátolt beavatkozás határai szándékosan lettek felvéve úgy, hogy ne egymás ellentettjei legyenek, ezzel bizonyítva a szabályzó működőképességét. A 3. ábrán láthatjuk hogyan is néz ki a térben az imént megválasztott biztonságos tartomány (zöld), backup set (narancssárga) és szaturált backup controller (szürke). Ahogy látható,  $c$  paraméter tökéletes megválasztásával a backup set mindig a backup controller lineáris szakaszán van értelmezve. A 4. ábrán látható a Backup set módszer nélküli és az azzal megerősített CBF trajektóriái, utóbbi 10 másodperces predikciós időre. Kék színnel jelölve azon trajektóriák, melyek bent maradtak a biztonságos tartományon, pirossal pedig azok, amelyek nem.

A numerikus szimuláció során alkalmazott modell -és szabályozóspecifikus paraméterek

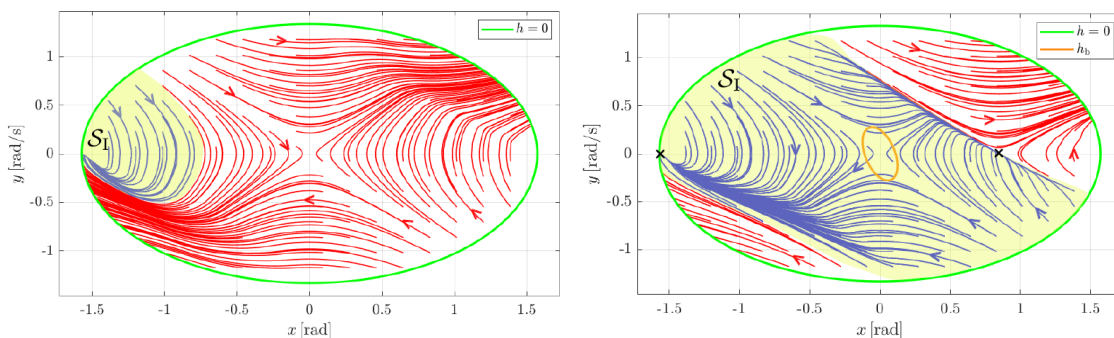
1. táblázat

| $m$ [kg]   | $L$ [m]    | $u_{\min}$ [SI]         | $u_{\max}$ [SI] | $x_{kr}$ [rad] | $y_{kr}$ [rad/s] |
|------------|------------|-------------------------|-----------------|----------------|------------------|
| 0.014      | 14.7       | -0.75                   | 1.25            | $\pi/2$        | 4/3              |
| $K_1$ [SI] | $K_2$ [SI] | $g$ [m/s <sup>2</sup> ] | $N_c$ [1]       | $\kappa_b$ [1] | $\kappa$ [1]     |
| 3          | 3          | 9.81                    | 80              | 1              | 1                |



3. A Backup set módszerhez szükséges függvények ábrázolása 3-dimenzióban.

Ez alapján következtetünk az invariáns halmaz méretére, látható a minőségbeli különbség a két szimuláció között, hiszen az utóbbi esetben a megvalósíthatóság határa többszörösére nőtt. Így elmondhatjuk, hogy a backup set mérete – mely a 4. ábra jobb oldalán narancssárgával látható – sikeresen ki lett bővítve.



4. A Backup set módszer nélküli (bal) és az azzal megerősített CBF (jobb) alatti trajektóriák.

## 6. ÖSSZEFOGLALÁS

A Biztonságkritikus szabályzásnak köszönhetően tudunk nemlineáris rendszerek esetén, halmazinvariancián alapuló szabályzást tervezni, mely az inverz inga példáján lett bemutatva. Látható volt, hogy a korlátolt beavatkozás esetén mennyire leszűkül annak a halmaznak a mérete, ahol valóban hatékonyan tudjuk működtetni a dinamikai rendszert. Ennek megoldására alkalmaztuk a Backup set módszert saját ötletű, Lyapunov-egyenleten alapuló megoldásával, mely a szimuláció során eredményesnek bizonyult. Jövőbeli kutatási tervek között szerepel az újonnan kialakult egyensúlyi helyek stabilitása, illetve azok pozíciójának az invariáns halmazra gyakorolt hatása.

## FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] A. D. Ames, S. Coogan, M. Egerstedt, G. Notomista, K. Sreenath, and P. Tabuada, „Control barrier functions: Theory and applications,” in 2019 18th European control conference. IEEE, 2019, pp. 3420–3431.
- [2] Cohen, Max H., Tamas G. Molnar, and Aaron D. Ames. "Safety-critical control for autonomous systems: Control barrier functions via reduced-order models." Annual Reviews in Control 57 (2024): 100947.
- [3] T. G. Molnar and A. D. Ames, “Safety-critical control with bounded inputs via reduced order models,” arXiv preprint arXiv:2303.03247, 2023.
- [4] Khalil, Hassan K. "Lyapunov stability." Control systems, robotics and automation 12 (2009): 115.