

# A Mooney-Rivlin-féle hiperelasztikus anyagmodell stabilitási vizsgálata többtengelyű terhelések esetén

## Stability study of the compressible Mooney-Rivlin hyperelastic model

FODOR Balázs<sup>1,2</sup>, PhD hallgató, Dr. KOSSA Attila<sup>2</sup>, egyetemi docens

<sup>1</sup> BMW Group, Research and Innovation Center, Knorrstraße 147, 80788 Munich, Germany

<sup>2</sup> Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék, H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3; Tel.: +36-1463-1369; fax: +36-1463-3471  
balazs.fodor@bmw.de, kossa@mm.bme.hu

### Abstract

*This paper reports a detailed analysis of the compressible Mooney-Rivlin hyperelastic constitutive equation under multiaxial stress condition. It is shown that the ground-state Poisson's ratio and the dimensionless parameter  $\beta = C_{01}/C_{10}$  are sufficient to determine the stability bounds. In our investigation, we obtain stress solutions for general multiaxial stress states in addition to uniaxial and biaxial loads using our own numerical procedure. We determine the unstable regions of the model as a function of the imposed stress or strain for arbitrary parameter combinations.*

**Keywords:** Hyperelasticity, Compressibility, Mooney-Rivlin, Constitutive model, Material stability

### Kivonat

*Kutatásunk a térfogatilag összenyomható Mooney-Rivlin-féle hiperelasztikus konstitutív modell részletes elemzésével foglalkozik, többtengelyű feszültségi állapot esetén. Vizsgálatunkhoz saját numerikus eljárást fejlesztettünk, mellyel homogén egy- és kéttengelyű terhelések esetén meghatároztuk a keresztirányú alakváltozást és feszültségeket. Átfogó elemzést adunk a modell jellemzőiről, ami betekintést nyújt a modell viselkedésébe, valamint részletesen elemzi és bemutatja az anyagi stabilitásvesztés folyamatát.*

**Kulcsszavak:** hiperelasztikus, összenyomható, Mooney-Rivlin, konstitutív modellek, anyagstabilitás

## 1. BEVEZETÉS

Jelen kézirat az autópárhuzamban alkalmazott teljesjárműves ütközésszimulációban széles körben használt összenyomható Mooney-Rivlin-féle (cMR) hiperelasztikus anyagmodell vizsgálatával foglalkozik. Virtuális ütközésszimulációk során néhány futómű alkatrésznél eltérést tapasztaltunk a fizikai töréstartományoktól. Részletes vizsgálataink kimutatták, hogy a nyomás alatt álló gumialkatrészek hibás viselkedése okozhatja az eltérést, ami módosítja a szerkezeti elemek terhelését és az ütközés kinematikáját. Az ütközésszimulációk során a Drucker-féle [1] anyagstabilitási kritériumot alkalmaztuk az anyagi stabilitás ellenőrzésére, ennek ellenére alakulhatott ki anyagi stabilitásvesztés. Cikkünkben azt nevezzük anyagin stabilitásnak, amikor adott nyúláshoz (*stretch*) több keresztirányú nyúlás (*transverse stretch*) is tartozik, vagyis a  $\lambda_T = \lambda_T(\lambda)$  függvénykapcsolat nem egyértékű.

A térfogati összenyomhatóság leírására többféle gyakorlat létezik [2], [3], a Flory-típusú megadás a legelterjedtebb [4], amelyet a kereskedelmi FEM szoftverekben is alkalmaznak. Cikkünk módszertana egy nemrégiben közölt tanulmányon alapul, melyben a szerzők numerikus eljárással mutatták be az összenyomható Neo-Hooke-féle hiperelasztikus modell (cNH) instabilitásának kialakulását [5].

A cNH-modell alakváltozási energiasűrűség-függvénye a legegyszerűbb a hiperelasztikus modellek között, ugyanakkor zárt alakú feszültség-alakváltozás megoldásokat még a legegyszerűbb homogén deformációkra sem lehet előállítani. Így az összetettebb cMR-modell vizsgálatához numerikus megoldás használata szükséges a keresztirányú alakváltozások és feszültségek kiszámításához, mely lehetővé teszi az anyagmodell instabilitásának és megbízhatóságának részletes vizsgálatát.

Kutatásunk átfogó elemzést nyújt a cMR-modell jellemzőiről, betekintést nyújt a modell működésébe, részletesen elemzi és bemutatja az anyagi stabilitásvesztés folyamatát. Az új eredmények közvetlenül beépíthetők paraméterillesztési feladatokba. Megadjuk azokat a paramétertartományokat, ahol a modell

fizikailag hibás viselkedést mutat, mely tartományok ismerete elengedhetetlen a gyakorlati alkalmazáshoz. Fontos hangsúlyozni, hogy az anyaginstabilitás leírásával a fent említett végeleemes szoftverek dokumentációja nem foglalkozik.

## 2. AZ ÖSSZENYOMHATÓ, IZOTROP MOONEY-RIVLIN MODELL

Az izotrop hiperelasztikus anyagmodellek esetében az alakváltozási energiasűrűség-függvény ( $U$ ) a  $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  bal oldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzor skalárinvariánsai segítségével írható fel, ahol  $\mathbf{F}$  az alakváltozási (vagy deformációs) gradiens:

$$U = U(I_1, I_2, I_3), \quad (1)$$

ahol a fő skalárinvariánsok:

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{b}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (2)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{b}^2)) = (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2, \quad (3)$$

$$I_3 = \det(\mathbf{b}) = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 = J^2. \quad (4)$$

A fő skalárinvariánsok segítségével a Cauchy-feszültségtenzor a következőképpen írhatjuk fel:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{b} = 2J^{-1} \left( U_{,1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{b}} + U_{,2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{b}} + U_{,3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{b}} \right) \mathbf{b}, \quad (5)$$

ahol  $U_{,i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) az  $U$  parciális deriváltjait jelöli az  $i$ -edik fő skalárinvariáns szerint. Felhasználva a

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{I}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{b}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{b}, \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{b}} = I_3 \mathbf{b}^{-1} \quad (6)$$

azonosságokat, ahol  $\mathbf{I}$  a másodrendű egységtenzor, a Cauchy-féle feszültségtenzor a következő alakban írható fel:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left( (U_{,1} + U_{,2} I_1) \mathbf{b} - U_{,2} \mathbf{b}^2 \right) + U_{,3} \mathbf{I}. \quad (7)$$

Vizsgálatunk a legelterjedtebb explicit végeleemes szoftverekben (Abaqus és Ls-Dyna) is elérhető cMR-féle anyagmodellre összpontosít, mely három anyagi paramétert tartalmaz,  $C_{10}$ ,  $C_{01}$  és  $D_1$  és az

$$U = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + D_1^{-1}(J - 1)^2 \quad (8)$$

alakban írható fel, ahol  $\bar{I}_1 = J^{-\frac{2}{3}} I_1$  és  $\bar{I}_2 = J^{-\frac{4}{3}} I_2$  a módosított skalárinvariánsok. Az  $U_{,1}$ ,  $U_{,2}$  és  $U_{,3}$  parciális deriváltak a következőképpen írhatók fel:

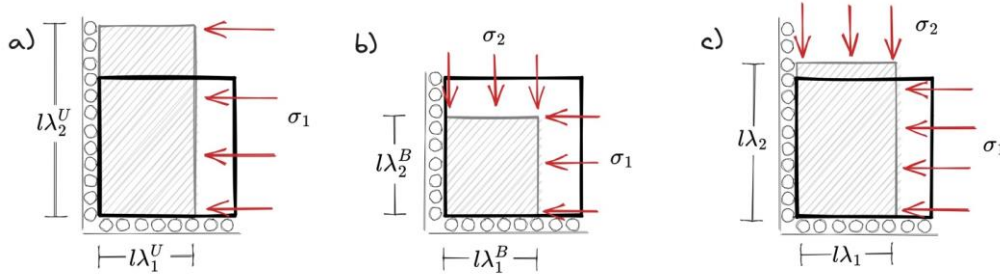
$$U_{,1} = C_{10} J^{-2/3}, \quad U_{,2} = C_{01} J^{-4/3}, \quad U_{,3} = \frac{2(J-1)}{D_1} - \frac{2}{3} C_{10} I_1 J^{-5/3} - \frac{4}{3} C_{01} I_2 J^{-7/3}. \quad (9)$$

Visszahelyettesítve a deriváltakat a (7) egyenletbe, a Cauchy-féle feszültségtenzor alakjára az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \left( (C_{10} J^{-2/3} + C_{01} J^{-4/3} I_1) \mathbf{b} - C_{01} J^{-4/3} \mathbf{b}^2 \right) + \left( \frac{2(J-1)}{D_1} - \frac{2}{3} J^{-7/3} (C_{10} J^{2/3} I_1 + 2C_{01} I_2) \right) \mathbf{I}. \quad (10)$$

### 3. ANYAGINSTABILITÁS EGY- ÉS KÉTTENGELYŰ FESZÜLTSEGI ÁLLAPOTBAN

Az anyaginstabilitási vizsgálatunkat a legegyszerűbb terhelési esetekkel kezdjük, ahol az anyagi pont egy- és kéttengelyű feszültségi állapotban van (1. a-b ábra). Ebben az esetben a feszültség – alakváltozás összefüggés az alakváltozási gradiens segítségével előállítható, melyet egytengelyű esetre mutatunk be. Mivel a cMR modellben a térfogatváltozás megengedett, így a  $J \neq 1$  feltétel miatt a keresztirányú nyúlás nem fejezhető ki zárt alakban a  $\lambda$  függvényeként.



1. ábra. Terhelési esetek mechanikai modellje, kezdeti élhossz  $l \times l$ . a) egytengelyű terhelés,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , b) egyen-kéttengelyű terhelés  $\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3 = 0$ , c) általános kéttengelyű terhelés  $\sigma_1 \neq \sigma_2, \sigma_3 = 0$

### 4. EGYTENGELYŰ TERHELÉS

Ebben a terhelési esetben a korábban bevezetett kinematikai mennyiségek az alábbi alakban adhatóak meg:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_T^2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$I_1 = \lambda^2 + 2\lambda_T^2, \quad I_2 = 2\lambda^2\lambda_T^2 + \lambda_T^4, \quad J = \lambda\lambda_T^2. \quad (13)$$

Ha  $\mathbf{b}$ -t behelyettesítjük a 10. egyenletbe, a 11. egyenlet felhasználásával a mérnöki (vagy nominális) feszültségkomponensek a következőképpen fejezhetőek ki:

$$\sigma_{11} = 2D_1^{-1}(\lambda\lambda_T^2 - 1) + \frac{4(\lambda - \lambda_T)(\lambda\lambda_T^2)^{1/3}(\lambda + \lambda_T)(C_{10}\lambda + C_{01}(\lambda\lambda_T^2)^{1/3})}{\lambda^3\lambda_T^4} \quad (14)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = 2D_1^{-1}(\lambda\lambda_T^2 - 1) - \frac{2(\lambda^2 - \lambda_T^2)(\lambda\lambda_T^2)^{1/3}(C_{10}\lambda + C_{01}(\lambda\lambda_T^2)^{1/3})}{\lambda^3\lambda_T^4}. \quad (15)$$

Az 1. a ábra szerinti  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$  feltételből  $\lambda_T$  nem fejezhető ki zárt alakban, ugyanakkor belátható, hogy a  $\lambda_T = \lambda_T(\lambda)$  összefüggés az anyagparaméterek ( $C_{01}, C_{10}, D_1$ ) arányától függ, nem azok abszolút értékétől. Normalizáljuk a  $\sigma_{11}, \sigma_{22}$  és  $\sigma_{33}$  feszültségkomponenseket a  $C_{10}$  anyagparaméterrel és vezessük be a  $\beta = C_{01}/C_{10}$  dimenziótlán arányszámot [6,7]. Felhasználva az

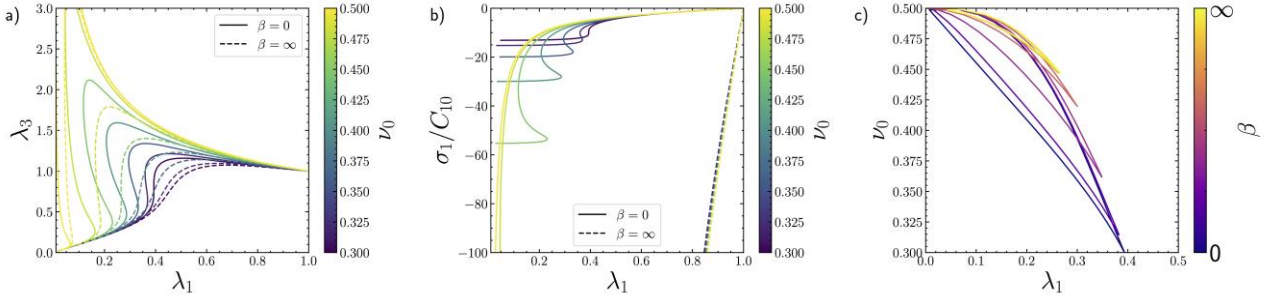
$$\frac{1}{C_{10}D_1} = \frac{2+2\nu_0}{3-6\nu_0}(1 + \beta) \quad (16)$$

azonosságot [7], az egyenletekben szereplő  $D_1$  és  $C_{10}$  paramétert felírhatjuk  $\nu_0$  és  $\beta$  segítségével. Így a 14. és 15. egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$\frac{\sigma_{11}}{C_{10}} = \frac{4(1+\nu_0)}{3(1-2\nu_0)}(1 + \beta)(\lambda\lambda_T^2 - 1) + \frac{4(\lambda^2 - \lambda_T^2)(\lambda\lambda_T^2)^{1/3}(\lambda + \beta(\lambda\lambda_T^2)^{1/3})}{\lambda^3\lambda_T^4}, \quad (17)$$

$$\frac{\sigma_{22}}{C_{10}} = \frac{\sigma_{33}}{C_{10}} = \frac{4(1+\nu_0)}{3(1-2\nu_0)}(1 + \beta)(\lambda\lambda_T^2 - 1)\lambda\lambda_T - \frac{2(\lambda^2 - \lambda_T^2)(\lambda\lambda_T^2)^{1/3}(\lambda + \beta(\lambda\lambda_T^2)^{1/3})}{\lambda^3\lambda_T^4}. \quad (18)$$

Ennek a  $\lambda_T$  szerint nemlineáris egyenletnek nincs zárt alakú megoldása, azonban felhasználva a  $P_{22}/C_{10} = P_{33}/C_{10} = 0$  feltételt, numerikus gyökkereséssel meghatározható a  $\lambda_T = \lambda_T(\lambda)$  keresztirányú nyúlás megoldás.



2. ábra. a) Keresztirányú nyúlás a hosszirányú nyúlás függvényében egytengelyű terhelés esetén,  
 b) Cauchy-féle feszültségtenzor komponensei,  
 c) Zárt tartományok a  $v_0 - \lambda$  síkban  $\beta$  függvényében, ahol több keresztirányú nyúlás létezik,  $v_0 = 0.45$  esetén.

Egytengelyű terhelés esetében a  $\beta$  paraméter hatásának megértéséhez a 2.a ábrán a keresztirányú nyúlásokat ábrázoljuk  $\beta$  különböző értékei esetén, rögzített  $v_0 = 0.45$  esetén. Két határeset fontos a  $\beta$  hatásának vizsgálatához. Az egyik, amikor  $C_{01} \ll C_{10}$ , mely határesetben  $\beta = 0$ , és a cMR-modell a Neo-Hooke-féle modellre redukálódik. A másik esetben  $C_{01} \gg C_{10}$ , melynél határesetben  $\beta = \infty$ .

Jól látható a 2.a ábrán, hogy a cMR-modell két szokatlan jelenséget is mutat. Az egyik a nem monoton keresztirányú alakváltozás monoton nyomás esetén: az anyag a maximális kontrakció elérése után végtelenül kis térfogatra zsugorodik össze, ami fizikailag nem lehetséges. A másik jelenség pedig, hogy több megoldás is adódhat a keresztirányú alakváltozásra, adott hosszirányú nyújtás esetén. A  $\lambda_T = \lambda_T(\lambda)$  függvénykapcsolat ismeretében a feszültségek számíthatóak, a Cauchy-féle feszültséget a 2.b ábra mutatja, aminek  $\lambda \rightarrow 0$  esetén véges határértéke van, ami fizikai szempontból téves. A 2.c. ábra az instabilitást előidéző  $v_0$  és  $\beta$  paramétereket mutatja a  $v_0 - \lambda$  térben. Az ábrán látható zárt görbékben belül a modellhez több megoldás is tartozik, vagyis ezen tartományokat tekintjük instabil tartományoknak. Jól látható, hogy az instabilitás erősen függ  $\beta$  értékétől, továbbá, hogy adott  $v_0$  mellett tetszőleges  $\beta$  értékhez tartozik instabilitás.

## 5. EGYEN-KÉTTENGELYŰ TERHELÉS

Az egyen-kéttengelyű (equibiaxial) terhelés esetén adódó kinematikai mennyiségek:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_T^2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

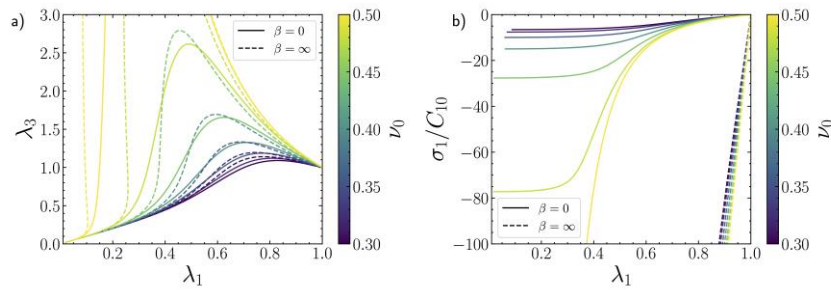
$$I_1 = 2\lambda^2 + \lambda_T^2, \quad I_2 = \lambda^4 + 2\lambda_T^2\lambda^2, \quad J = \lambda^2\lambda_T^2. \quad (13)$$

A feszültség – alakváltozás függvények meghatározása analóg az egytengelyű esethez, a levezetés részleteitől eltekintve az alakjuk a következő:

$$\frac{\sigma_{11}}{C_{10}} = \frac{\sigma_{22}}{C_{10}} = \frac{4(1+v_0)}{3(1-2v_0)}(1+\beta)(\lambda\lambda_T^2 - 1) + \frac{2\lambda^2(\lambda^2 - \lambda_T^2)(\lambda_T + \beta(\lambda^2\lambda_T)^{1/3})}{3(\lambda^2\lambda_T)^{8/3}}, \quad (17)$$

$$\frac{\sigma_{33}}{C_{10}} = \frac{4(1+v_0)}{3(1-2v_0)}(1+\beta)(\lambda\lambda_T^2 - 1) - \frac{4(\lambda^2 - \lambda_T^2)(\beta\lambda^2 + (\lambda^2\lambda_T)^{2/3})}{3(\lambda^2\lambda_T)^{7/3}}. \quad (18)$$

Hasonlóan az egytengelyű esethez, ennek az egyenletnek sincs zárt alakú megoldása. Felhasználva a  $P_{33}/C_{10} = 0$  feltételt, numerikus eljárással meghatározható a  $\lambda_T = \lambda_T(\lambda)$  keresztirányú nyúlás. A 3.a ábra ábrázolja kéttengelyű terhelés esetén a keresztirányú nyúlásokat  $\beta$  különböző értékei esetén, rögzített  $v_0 = 0.45$  esetén. Jól látható, hogy tetszőleges  $\beta$  értékre a  $\lambda_T = \lambda_T(\lambda)$  függvénykapcsolat egyértékű, nem lép fel instabilitás. Ugyanakkor a Cauchy-féle feszültségtenzor komponenseinek továbbra is véges határértéke van  $\lambda \rightarrow 0$  esetén, amit a 3.b ábrán láthatunk.



3. ábra. a) Keresztirányú nyúlás a hosszirányú nyúlás függvényében, kéttengelyű terhelés esetén, numerikus megoldások a  $\nu_0$  különböző értékeire. A folytonos és szaggatott vonalak  $\beta = 0$  és  $\beta = \infty$  határértékeket jelölik.  
b) Cauchy-féle feszültségtenzor komponensei

## 6. ÁLTALÁNOS KÉTTENGELYŰ TERHELÉS

Felmerül a kérdés, hogy a fent bemutatott anyaginstabilitás csak az egytengelyű terhelés sajátossága, vagy többtengelyű terhelés esetén is felléphet-e. Azt bemutattunk, hogy egyen-kéttengelyű (1.b ábra) terhelés esetén nem lép fel instabilitás (3.a ábra), de vajon hogyan függ a főfeszültségek arányától, az egy- és kéttengelyű terhelés közötti átmenet során a stabilitási tartomány? Ennek a kérdésnek a megválaszolására a duális felírás alkalmazásával nyílik lehetőség [8], a feszültségi állapot explicit előírásán keresztül. Vezessünk be egy síkbeli terhelési tényezőt és jelöljük  $\alpha$ -val, mely a főfeszültségek dimenziótlan arányszáma. Legyen az  $\alpha$  paraméter folytonos, valamint nulla és egy között értelmezve. Így a 19-es képlet szerint  $\alpha = 0$  tiszta egytengelyű terhelést, míg  $\alpha = 1$  egyen-kéttengelyű terhelést ír le. A 2-es és 3-as egyenletek szerint általános esetben az  $\mathbf{F}$  deformációs gradiens, a  $\mathbf{b}$  Cauchy-Green-féle deformációs tenzor, annak főinvariánsai, valamint a Cauchy-féle feszültségtenzor a következő formában írható fel:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2), \quad I_3 = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 = J^2, \quad (20)$$

Ezeket behelyettesítve a 10-es egyenletbe, a 4-es fejezetben leírt algebrai lépéseket elvégezve a normalizált Cauchy-féle feszültségtenzor komponensei a következőképpen adhatóak meg:

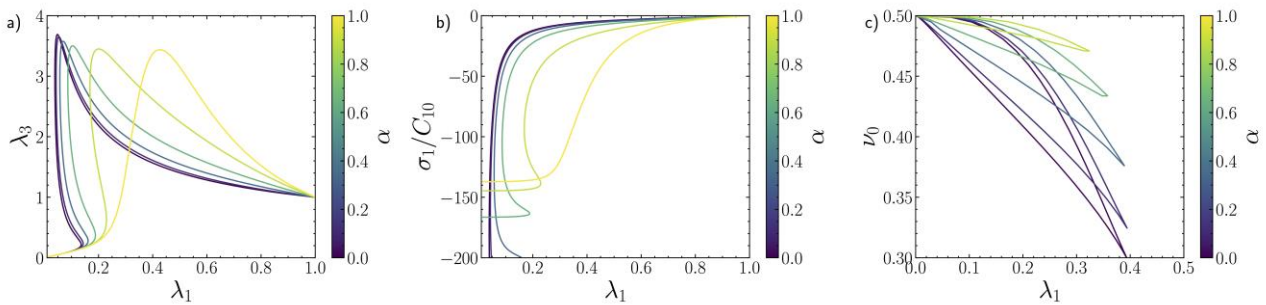
$$\frac{\sigma_1}{C_{10}} = \frac{4(1+\nu_0)}{3(1-2\nu_0)}(1+\beta)(J-1) - \frac{2J^{2/3}\lambda_3^2 + \lambda_2^2(J^{2/3} + 2\beta\lambda_3^2) - \lambda_1^2(2J^{2/3} + \beta(\lambda_2^2 + \lambda_3^2))}{J^{7/3}}, \quad (21)$$

$$\frac{\sigma_2}{C_{10}} = \frac{4(1+\nu_0)}{3(1-2\nu_0)}(1+\beta)(J-1) - \frac{2J^{2/3}\lambda_3^2 - \lambda_2^2(2J^{2/3} + \beta\lambda_3^2) + \lambda_1^2(J^{2/3} - \beta(\lambda_2^2 + 2\lambda_3^2))}{J^{7/3}}, \quad (22)$$

$$\frac{\sigma_3}{C_{10}} = \frac{4(1+\nu_0)}{3(1-2\nu_0)}(1+\beta)(J-1) - \frac{2J^{2/3}\lambda_2^2 + 2\lambda_1^2(J^{2/3} + 2\beta\lambda_2^2) - (2J^{2/3} + \beta(\lambda_1^2 + \lambda_2^2))\lambda_3^2}{J^{7/3}}. \quad (23)$$

Belátható, hogy a korábban bemutatott esetekkel ellentétben, a  $\sigma_2 = \alpha \sigma_1$  feltétel miatt a keresztirányú nyúlás  $\lambda_3 = \lambda_3(\lambda_1, \lambda_2)$  nem számolható direkt  $\lambda_1$ -ből, mert  $\lambda_2$ -től is függ. Így a 21-23 egyenletrendszer megoldása szükséges, felhasználva a  $\sigma_{33}/C_{10} = 0$  és  $\sigma_2 = \alpha \sigma_1$  feltételeket. Ez a feladat numerikusan például a követő módszerrel oldható meg  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  és  $\sigma_1$ -re, adott  $\alpha$  és  $\lambda_1$  mellett.

A számításokhoz készített algoritmusunk a *numpy*, *sympy*, *scipy* és *multiprocessing* könyvtárak felhasználásával Pythonban készült, az ábrák a *matplotlib* könyvtárral készültek. Az algoritmus adott  $\lambda_1$  növekményhez és  $\alpha$  paraméterhez meghatározza a  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  és  $\sigma_1$  szabad paramétereit. Ezzel a módszerrel lehetőség nyílik a cMR-modell összetett terhelésekre adott válaszát is megvizsgálni és meghatározni az anyaginstabilitás terhelésfüggőségét, mely eredményeket az 4. ábra foglalja össze. Jól látható, hogy az anyaginstabilitás jelenség nem az egytengelyű terhelés sajátossága, hanem széles tartományban jelentkezik és egyen-kéttengelyű terhelés esetén szűnik csak meg.



4. ábra. a) Keresztirányú nyúlás a hosszirányú nyúlás függvényében, kéttengelyű feszültség esetén,  $\alpha$  függvényében, rögzített  $\nu_0$  és  $\beta$  esetén. b) Cauchy-féle feszültségtenzor komponensei c) Zárt tartományok a  $\nu_0 - \lambda$  síkban,  $\beta$  függvényében, ahol több keresztirányú nyúlás létezik,  $\nu_0 = 0.45$  esetén.

## 7. ÖSSZEFOGLALÁS

Bemutattuk, hogy a cMR-modell egy és kéttengelyű nyomás esetén is instabil viselkedést mutathat, valamint megadtuk azon paraméterek tartományát, melyek ezt a nem fizikai viselkedést előidézik.

Ehhez numerikus eljárást készítettünk, mely egyszerű esetekben direkt gyökkereséssel, összetett esetekben a követő módszerrel határozza meg az instabil tartományt a modellparaméterek terében.

Bemutattuk, hogy az instabilitás vizsgálatához elégséges az anyagparaméterek arányainak vizsgálata. Látható, hogy az anyaginstabilitás nem az egytengelyű terhelés sajátossága, mivel egy- és kéttengelyű terhelés esetén is tetszőleges anyagparaméter elő tudja idézni, ugyanakkor egyenkéntengelyű esetben instabilitás nem lép fel.

A jövőbeni kutatásunk célja a terhelési esetek még általánosabb leírása, különös tekintettel a nyírás instabilitásra gyakorolt hatásának megértése.

## 8. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Jelen kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával valósult meg. Pályázati azonosító: FK 142457.

## 9. IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Drucker, D. C., *A Definition of Stable Inelastic Material*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 26, No. 1, 1959, pp. 101–106. <https://doi.org/10.1115/1.4011929>
- [2] Simo, J. C., Taylor, R. L., and Pister, K. S., *Variational and Projection Methods for the Volume Constraint in Finite Deformation Elasto-Plasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 51, No. 1, 1985, pp. 177–208. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90033-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90033-7)
- [3] Pence, T. J., and Gou, K., *On Compressible Versions of the Incompressible Neo-Hookean Material*, Mathematics and Mechanics of Solids, Vol. 20, No. 2, 2015, pp. 157–182. <https://doi.org/10.1177/1081286514544258>
- [4] Flory, P. J., *Thermodynamic Relations for High Elastic Materials*, Transactions of the Faraday Society, Vol. 57, No. 0, 1961, pp. 829–838. <https://doi.org/10.1039/TF9615700829>
- [5] Kossa, A., Valentine, M. T., and McMeeking, R. M., *Analysis of the Compressible, Isotropic, Neo-Hookean Hyperelastic Model*, Meccanica, Vol. 58, No. 1, 2023, pp. 217–232. [https://doi.org/10.1007/s11012-022-01633-](https://doi.org/10.1007/s11012-022-01633-Eriksson, A., and Nordmark, A., Non-Unique Response of Mooney–Rivlin Model in Bi-Axial Membrane Stress, Computers & Structures, Vol. 144, 2014, pp. 12–22. https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.07.021)
- [6] Eriksson, A., and Nordmark, A., *Non-Unique Response of Mooney–Rivlin Model in Bi-Axial Membrane Stress*, Computers & Structures, Vol. 144, 2014, pp. 12–22. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.07.021>
- [7] Fodor, B., and Kossa, A., *Stability Study of the Compressible Mooney-Rivlin Hyperelastic Model*, The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, Vol. 58, No. 3, 2024, pp. 117–126.
- [8] Bertóti, E., *A Non-Linear Complementary Energy-Based Constitutive Model for Incompressible Isotropic Materials*, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 148, 2023, p. 104262. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104262>