

Furuta-inga tervezése képfeldolgozást megvalósító szabályozáshoz

Design of a Furuta pendulum for visual control

ENDRÉSZ Balázs¹ hallgató, Dr. STÉPÁN Gábor² professzor emeritus

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar,
Műszaki Mechanikai Tanszék
1111. Budapest, Műegyetem rkp. 3.

¹endresz.balazs008@gmail.com, ²stepan@mm.bme.hu

Abstract

The Furuta-pendulum is a nonlinear, underactuated system, which, due to its simple structure, is a popular choice for experiments with various control methods. In this paper, the design and mechanical parameter identification of a structure capable of guiding the camera cable placed on top of the pendulum rod is presented. The parameters determined by pendulum experiment can then be used to calculate the critical time of the pendulum, which limits the execution time of the image processing algorithms.

Keywords: design, parameter identification, rotary inverted pendulum, control, balancing

Kivonat

A Furuta-inga egy nemlineáris, alulaktuált rendszer, amelyet előszeretettel alkalmaznak különböző irányítási eljárások kísérleteihez. Munkánk során egy olyan konstrukció kialakítására és mechanikai paraméter-identifikációjára kerül sor, amely képes az inga rúdjának tetejére helyezett kamera kábelének elvezetésére. A lengésvizsgáló kísérlet által meghatározott paramétereket ezt követően fel lehet használni az inga kritikus időkéésének számítására, amely korlátot szab a képfeldolgozási algoritmusok végrehajtási idejének.

Kulcsszavak: tervezés, paraméter-identifikáció, Furuta-inga, szabályozás, egyensúlyozás

1. BEVEZETÉS

A mindennapokban számtalan olyan feladatot hajtunk végre észrevétlenül, amelyek mérnöki modellezése kihívást jelentő probléma. Erre példa az emberi egyensúlyozás témaköre, amely során a vestibuláris, proprioceptív és látó szervrendszer összehangolt működése szükséges a feladat végrehajtásához [1]. Az emberi egyensúlyozás egy elterjedt egyszerűsített mechanikai modellje az inverz inga, amelynek egy erősen nemlineáris változata az úgynevezett Furuta-inga [2]. Az ingák előnye, hogy mivel laborkörnyezetben egyszerűen megépíthetőek, a létrehozott konstrukció segítségével irányítástechnikai eljárások eredményei könnyen összehasonlíthatóak és reprodukálhatóak lesznek. A szakirodalomban elterjedt inverz inga, illetve Furuta-inga konstrukciók enkóder segítségével mérik az irányításhoz szükséges szögváltozásokat, ezzel a látó rendszer hatásának modellezését kihagyják a kapott laboratóriumi modellekből [3]. A jelen tanulmány tárgya a látás hatását is tartalmazó mérnöki rendszer felépítése és modellezése, ahol a látó érzékelő rendszer az ingához van rögzítve, azzal együtt mozog.

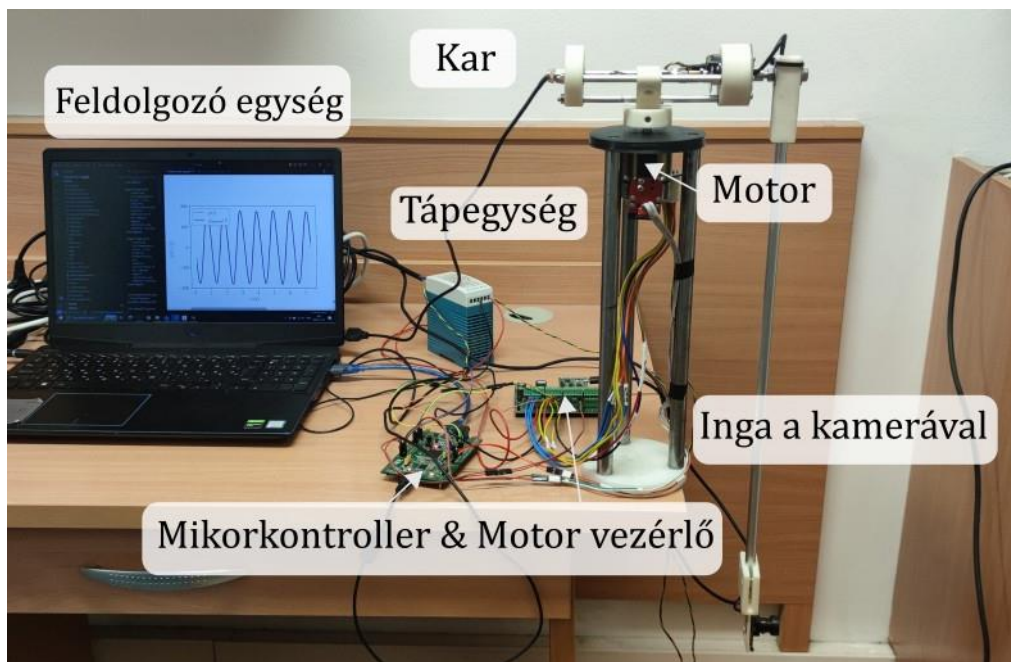
2. KÉPFELDOLGOZÁSRA ALKALMAS INGA TERVEZÉSE

A konstrukció tervezésének első lépése a követelményeknek megfelelő tulajdonságokkal rendelkező kamera választása. A figyelembe vett szempontok közé tartozik, hogy elegendően magas másodpercenkénti rögzített képkockaszámmal (FPS) szükséges rendelkeznie, ezzel csökkentve az ebből származó időkéésés nagyságát. További szempont a kamera látószöge, mivel a programtervezésnél előnyös, ha a rögzített objektumok minél tovább maradnak a képen. Ez megoldható két, egymást követő kép közötti szögváltozás érzékelésén keresztül. Mivel egy ilyen feladat esetén a vizsgált képeken található geometriai információk kitüntetett szereppel bírnak, torzításmentes lencsék alkalmazása csökkentheti a képfeldolgozási algoritmusok számítási igényét. Annak érdekében, hogy a kamera a feldolgozó egységgel minél megbízhatóbb kapcsolatban maradjon, speciális kábeles eszköz tervezésére került sor. A feladatra alkalmasnak ítélt eszköz egy ELP UVC

1200P kamera, amely 90 FPS sebességgel képes a képek küldésére. Továbbá, 126°-os látószögű torzításmentes lencsével rendelkezik, a feldolgozó egységhez USB kábel segítségével kapcsolódik, azaz megfelel a fentebb támasztott követelményeknek.

A kamera kivezető kábele befolyásolhatja az elkészített konstrukció dinamikai tulajdonságait, ami megfelelő tervezéssel kiküszöbölhető volt. A kábel az ingára merőleges kar tengelyének középvonalán lett átvezetve, amely 2 csapágó segítségével került megtámasztásra. Ezt követően a kárkerülő vezeték egy kábelszorító segítségével úgy lett rögzítve, hogy az a tengellyel együtt forogjon. A kárkerülő kábel a kar középvonalában folytatja útját, ezt követően a kar hátsó részén elhelyezett rögzített állású kábelszorítón át került kivezetésre. A feldolgozó egységig eljutó kábel az inga dinamikáját már nem befolyásolja. A kar középső részén szabadon hagyott kábel nagy csavaró merevséggel rendelkezik. Annak érdekében, hogy az itt megjelenő merevséget minél jobban le lehessen csökkenteni, a kábel külső borítása a középső szakaszon eltávolításra került, a belül megtalálható 4 vezeték szabad elmozduláson keresztül a merevséget nagyban csökkenti. Az inga így több átfordulásra is alkalmas, miközben a belső vezetékek jobban összesodródhatnak, illetve elválhatnak egymástól. Mivel a vezetékek csavaródása befolyásolja a hullámimpedancia nagyságát, ami a kábelben a jel reflexióját is eredményezheti [4], ügyelni kell, hogy használat közben a vezetékek csavart állapotban maradjanak.

A konstrukcióhoz tervezésre került egy, az inga elfordulását mérő enkóder felszerelésére alkalmas kialakítás. Meghatározó szempont volt ezen felül a kar tömegének csökkentése is, ami egy 3 darab alumínium rúdból álló, szerelhető konstrukcióval került megvalósításra: ezen keresztül van lehetőség az inga–motor tengelytávolság állítására. A megtervezett konstrukció 3D nyomtatott és esztergált alkatrészekből került összeszerelésre (lásd 1. ábra).



1. ábra. Az elkészített inga konstrukció

3. PARAMÉTER IDENTIFIKÁCIÓ

Az összeszerelt gyártmány alkalmazható irányítási algoritmusok tesztelésére mind kamera, mind enkóderből származó adatok esetén. A modell alapú szabályozási algoritmusokhoz szükséges a mechanikai rendszer minél pontosabb ismerete. A paraméterek többsége katalógus adatként megtalálható, ám a tervezett és összeszerelt gyártmányhoz saját mérések szükségesek. Az inga és a kar két szabadságfokához tartozó tehetetlenségi nyomatékát, illetve az inga súrlódási és viszkózus csillapítási tényezőit lengetési kísérlet segítségével lehet meghatározni. A képletek levezetése során feltételezésre került, hogy a kábel torziós merevsége elhanyagolható a fent leírtaknak megfelelően. A mérések során az ingára szerelt 2 enkóder segítségével történt a szög meghatározás. Az inga enkódere egy 4000 CPR (számlálás/fordulat) felbontással rendelkező 630-AEDB-9340-B13C kódszámú optikai eszköz, míg a motor tengelyére szerelt, a kar fordulásának mérésére egy 400 CPR felbontású enkóder került felszerelésre. A beépített motor egy Maxon EC 45 kefe nélküli 50 W-os motor (Cikkszám: 251601).

Az inga paraméter identifikációja során a stabil egyensúlyi pontjából kitérített lengés került rögzítésre. A száraz súrlódás hatásának figyelembevétele nélkül az inga linearizált modellje az alábbi

$$J_p \ddot{\theta} + b_p \dot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad (1)$$

alakban keresendő, ahol J_p az inga tengelyére számított tehetetlenségi nyomaték, b_p az inga tengelyének viszkózus csillapítási tényezője, m az inga tömege, g a gravitációs gyorsulás, l az inga tömegközéppontjának tengelytől való távolsága és θ az inga elfordulásának szöge az alsó egyensúlyi helyzettől mérve.

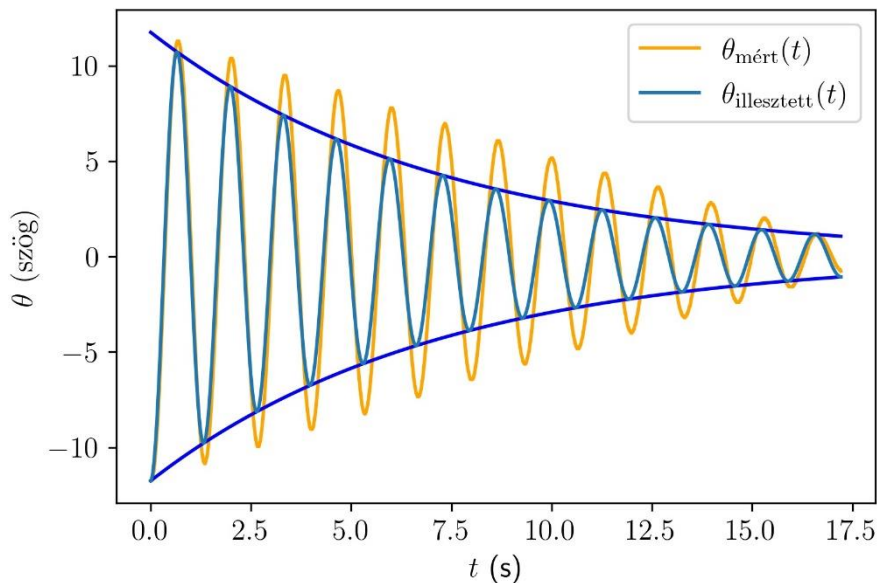
A közismert referencia egyenlet segítségével az ω_n sajátkőrfrekvenciából a J_p tehetetlenségi nyomaték értéke számítható:

$$J_p = \frac{mgl}{\omega_n^2}. \quad (2)$$

A sajátkőrfrekvenencia értéke a mért lengéskép gyors Fourier-transzformációjából (FFT) meghatározható. A b_p viszkózus csillapítási tényező a Λ logaritmusos dekrementum

$$\Lambda = \ln \frac{A_{2n}}{A_{2(n+1)}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad (3)$$

segítségével számolható, ahol A_n a lengés fél periódusának lokális szélsőértékét jelöli, míg ζ a relatív csillapítási tényező. A mérési eredményekből jól látszik (lásd 2. ábra), hogy a lengés rendelkezik egy nem elhanyagolható nagyságú száraz súrlódásból eredő taggal is, így ennek meghatározására is szükség van az identifikációhoz.



2. ábra. Száraz súrlódás nélküli paraméter identifikáció eredménye ($R^2 = 0,8949$)

A kibővített modell mozgásegyenlete

$$J_p \ddot{\theta} + b_p \dot{\theta} + mgl\theta = -C \operatorname{sgn}(\dot{\theta}), \quad (4)$$

ahol C a száraz súrlódásból származó testre ható nyomaték. A paraméterek meghatározására szolgáló képletek általános esetben az alábbi referencia egyenletnek megfelelően kerülnek felírásra:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = f_0\omega_n^2\operatorname{sgn}(\dot{\theta}). \quad (5)$$

Ahogy az a gravitációs térben, rugóra felfüggesztett test mozgásából ismert, a jobb oldalon megjelenő konstans eltolja a rezgés középpontját. A vízszintes, száraz súrlódással rendelkező talajon mozgó tömeg példáján keresztül pedig látható, hogy a jobb oldalon minden félperiódusban a gerjesztés iránya az előjel függvény miatt változik, hiszen a sebesség iránya is változik [5]. Emiatt a mérés során nem az amplitúdó, hanem annak egy szakaszosan eltolt alakja kerül mérésre. Az így eltolt n -edik szélsőérték csúcs vagy völgy

értékét jelölje N_n . Ekkor általánosan az (5) referencia egyenlet megoldását felírva belátható, hogy a szélsőérték félperiódusonként rekurzívan számítható:

$$N_{n+1} = -e^{-\Lambda_s \pi} N_n + (-1)^n (e^{-\Lambda_s \pi} + 1) f_0, \quad (6)$$

ahol $\Lambda_s = \zeta / (1 - \zeta^2)$, amely figyelembe veszi a súrlódás hatását is az egyenleten keresztül.

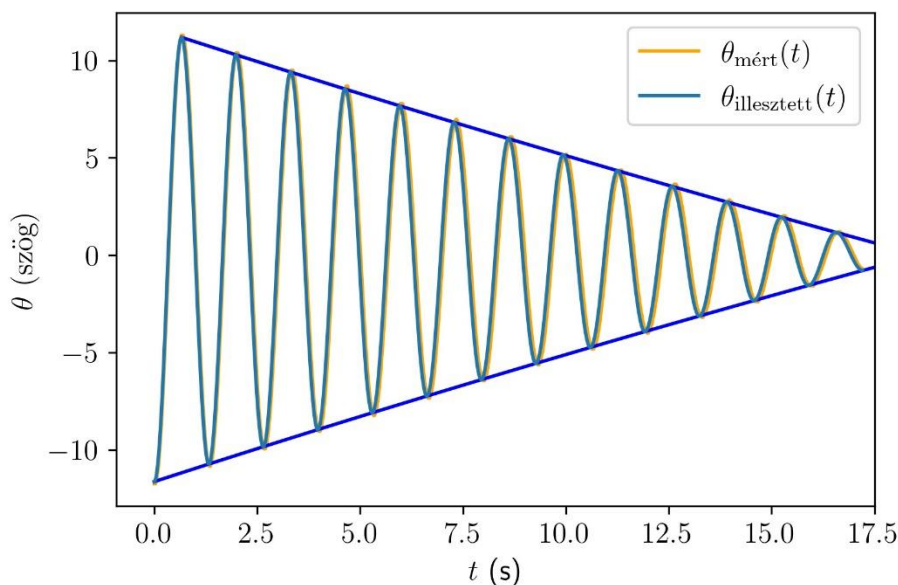
Az egyenletben két ismeretlen is található, az f_0 és Λ_s tagok. Ahhoz, hogy a mérésekből származó f_0 tagot ki lehessen ejteni, venni kell a különbségét 2, egymástól egy periódusra lévő szélsőértéknek, majd ezt követően az egyenletek rendezésével (6)-os egyenletből az alábbi alak kapható:

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = -\frac{1}{\pi} \ln \left(-\frac{N_{n+1} - N_{n-1}}{N_n - N_{n-2}} \right). \quad (7)$$

Szomszédos csúcsok vizsgálata esetén a módszer érzékeny a szög és idő mérésének pontosságára. A szakirodalom hasonló alakú megoldást adott a problémára [6]. Annak érdekében, hogy az érzékenység csökkenthető legyen, a képlet továbbfejleszthető a szélsőértékek eltolásával:

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{k} \ln \left(-\frac{N_{n+1} - N_{n-1}}{N_{n-2k} - N_{n-2(k+1)}} \right), \quad (8)$$

ahol k jelöli az átlagolt periódusok számát. ζ meghatározását követően f_0 a (6)-os egyenlet átrendezésével számítható. A mérést követően számított paraméterek meghatározását követően az illesztés eredménye ábrázolható, amit a 3. ábra mutat.



3. ábra. Száraz súrlódással kiegészített paraméter identifikáció eredménye ($R^2 = 0,9652$)

Az összeszerelt konstrukcióban a kar paraméter identifikációja ezt követően megtehető a mozgásegyenlet ismeretében. A mozgásegyenlet legegyszerűbben a másodfajú Lagrange-egyenletből származik. A kapott linearizált egyenletrendszer az inga felső egyensúlyi helyzete körül:

$$\begin{bmatrix} J_p & -mrl \\ -mrl & J_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p & 0 \\ 0 & b_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mgl & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M \end{bmatrix}, \quad (9)$$

ahol J_p az inga forgástengelyre számított tehetetlenségi nyomatéka, J_a az összeszerelt szerkezet tehetetlenségi nyomatéka a motor tengelyére vonatkoztatva, b_a a karra ható viszkózus csillapítási tényező, amely tartalmazza a motor által generált feszültségből származó tényezőt (back-EMF hatás), r a motor tengelyének és az inga középvonalának távolsága, M a motor által kifejtett nyomaték, míg θ az inga, φ pedig a kar szögelfordulása.

DC szervomotor esetén egy lineáris kapcsolat áll fenn a motor armatúra árama és a motor által kifejtett nyomaték között. A $k\phi_M$ ismert katalógus adat; ennek alapján a motorvezérlővel mérhető áram függvényében a motor által kifejtett nyomaték értéke számítható:

$$M = k\phi_M I_a. \quad (10)$$

A számításhoz szükséges sebesség és gyorsulás értékeket véges differenciával számítjuk. Így a mozgásegyenletbe helyettesítve az ismert adatokat, J_a tehetetlenségi nyomaték értéke meghatározható, b_a paraméter pedig egy előző munka alapján már ismert [3].

Az eredmények ellenőrizhetők a tervezéskor készített CAD modellekből származtatott tehetetlenségi nyomatékokkal. Mivel a CAD rendszerben nincs minden alkatrész modellezve (lásd pl. kábelek), az ellenőrzés csupán a megfelelő nagyságrend eldöntését szolgálja. A mérések eredményeit az 1. táblázat tartalmazza, ezeket tekintettük megbízható értékeknek a dinamikai számításokhoz. A relatív hiba a számítása az alábbi formula segítségével történt:

$$\text{relatív hiba} = \frac{J_{\text{mérés}} - J_{\text{CAD}}}{J_{\text{CAD}}} \cdot 100 (\%). \quad (11)$$

Tehetlenségi nyomaték nagyságrendi vizsgálata

1. táblázat

Paraméter	CAD eredmény	Mért eredmény	Relatív hiba (%)
J_p (kg mm ²)	21282	18880	-11,29
J_a (kg mm ²)	2308	3779	63,74

4. STABILITÁS ÉS KRITIKUS IDŐKÉSÉS

A meghatározott paraméterek felhasználhatóak szabályozási eljárások fejlesztéséhez, illetve ezek segítségével definiálhatóak az egyensúlyozásra vonatkozó elméleti határok. Algoritmus fejlesztési szempontból egy kiemelten fontos paraméter a kritikus időkézés, amely azt szabja meg, hogy milyen gyorsan szükséges beavatkozni a rendszerbe annak érdekében, hogy a felső egyensúlyi helyzet körül stabilizálódjon a rendszer. Ehhez a linearizált mozgásegyenletből levezethető a rendszer állapottermodellje, amely a [3] cikkel összhangban digitális esetben az alábbi alakot ölti:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_j + \mathbf{B}U_j, \quad (12)$$

ahol a rendszer és a bemeneti mátrix felírható az $\mathbf{x}_j = [\theta_j \quad \dot{\theta}_j \quad \varphi_j]^T$ állapotterében, mint

$$\mathbf{A} = \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} 0 & J^2 & 0 \\ -mglJ_a & -b_p J_a & -mrlb_a \\ -m^2 rgl & -mrlb_p & -J_p b_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{J^2} \begin{bmatrix} 0 \\ mrl \\ J_p \end{bmatrix}, \quad (13)$$

ahol $J^2 = J_a J_p - (mrl)^2$. Megfigyelhető, hogy φ nem szerepel a (9) linearizált mozgásegyenletben, így ciklikus koordinátaként az állapotter modellből elhagyható.

A \mathbf{C} kimeneti mátrix ezt követően előáll az $\mathbf{y}_j = [\mathbf{x}_j^T \quad U_j]^T$ kimeneti vektorra vonatkozóan:

$$\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{C}\mathbf{y}_j, \quad (14)$$

ahol a \mathbf{C} kimeneti mátrix struktúrája:

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|cc} \left[\begin{array}{cc} e^{A\tau} & \\ \hline -P_p & -D_p \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{array} \right] \end{array} \right]. \quad (15)$$

Itt egy $P_p D_p$ lineáris szabályozót használtunk az ingára, míg D_a szabályozót a kar koordinátájára, hiszen annak pozíciója ciklikus koordinátaként a feladat szempontjából nem meghatározott; a \mathbf{B}_1 vektor előállítható, mint

$$\mathbf{B}_1 = (e^{A\tau} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \quad (16)$$

A digitális rendszer stabilitása meghatározható \mathbf{C} mátrix sajátértékeinek segítségével, amelyeket karakterisztikus multiplikátoroknak nevezünk. A stabilitás feltétele, hogy a karakterisztikus multiplikátorok a komplex síkon az egység sugarú körön belül helyezkedjenek el, azaz

$$|\mu_j| < 1, \quad j = 1, \dots, 3. \quad (17)$$

Az időkézés növelésével a stabilitási térkép szűkül, míg végül egy pont marad: az ehhez tartozó τ időkézés adja meg a kritikus értéket. Ennek nagysága a Pólya-Szegő tétel alapján megadható a karakterisztikus egyenlet segítségével, mivel ekkor annak első és második deriváltja is zérus 3 nagyságú állapotter esetében [7-8]. Ebből adódóan az \mathbf{A} mátrix $\lambda_j, j = 1, \dots, 3$ sajátértékei segítségével a kritikus érték számítható, mint a

$$24 - 6e^{\lambda_1 \tau_{cr}} - 6e^{\lambda_2 \tau_{cr}} - 6e^{\lambda_3 \tau_{cr}} = 0 \quad (18)$$

egyenlet pozitív, valós megoldása. Az adott konstrukció esetében a paramétereket behelyettesítve ennek értéke

$$\tau_{cr} \approx 0,277 \text{ s.}$$

5. ÖSSZEFOGLALÁS

Mechanikai rendszerek kamerával történő irányításának tervezése komplex mérnöki feladat, amelyhez szükséges a konstrukció gondos megválasztása, modell alapú irányításokhoz és elméleti számításokhoz szükséges mechanikai számítások elvégzése, a rendszer finomhangolása és szabályozási algoritmus fejlesztése. Ez a tanulmány a konstrukciós tervezés és mechanikai modellezés témakörét járja körbe, kitérve az algoritmus fejlesztéshez elengedhetetlen szempontokra.

Elkészítésre került egy konstrukció, amely megfelel a kamerával történő szabályozásra vonatkozó követelményeknek. Összeszerelést követően meghatározásra kerültek az így előálló rendszer paraméterei. A paraméterek felhasználásával meghatároztuk a rendszer stabilitási térképét és a kritikus időkézés értékét. Az így bemutatott munka eredménye a későbbiekben felhasználható mind kamerával, mind enkóderrel történő szabályozások megvalósítására.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás a Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-23-1-I-BME-325 azonosító számú Új Nemzeti Kiválóság Programjának és NKFI-KKP-133846 kódszámú projekt keretében a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott támogatásával készült.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Guskiewicz, K. M., Perrin, D. H., *Research and clinical applications of assessing balance*. Journal of Sport Rehabilitation, Human Kinetics Publishers, 1996, 5(1), 45-63.
- [2] Furuta, K., Yamakita, M., Kobayashi, S., *Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback*, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, SAGE Publications, 1992, 206(4), 263-269.
- [3] Vizi, M. B., Stepan, G., *Digital stability of the Furuta pendulum based on angle detection*, Journal of Vibration and Control, 2024, 30(3-4), 588-597.
- [4] Al-Asadi, M. M., Duffy, A. P., Hodge, K. G., Willis, A. J., *Twisted pair cable design analysis and simulation*, In 49th IWCS conference, Atlantic City, NJ, USA, 2000, 13-16.
- [5] Csernák, G., Stépán, G., *Rezgésstan*, Akadémia Kiadó, 2019.
- [6] Liang, J. W., Feeny, B. F., *Identifying Coulomb and viscous friction from free-vibration decrements*. Nonlinear Dynamics, Springer Nature, 1998, 16, 337-347.
- [7] Boussaada, I., Niculescu, S. I., Trabelsi, K., *Towards a decay rate assignment based design for time-delay systems with multiple spectral values*. In 23rd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 2018., 864-871.
- [8] Boussaada, I., Tliba, S., Niculescu, S. I., Ünal, H. U., Vyhlídal, T., *Further remarks on the effect of multiple spectral values on the dynamics of time-delay systems*. Application to the control of a mechanical system. Linear Algebra and its Applications, Elsevier, 2018, 542, 589-604.