Axiális erővel terhelt hajlított-nyírt rudak deformációjának számítása

The determination of the deformation of beams with axial and transverse loads

Dr. ECSEDI István professor emeritus[1], Dr. BAKSA Attila egyetemi docens[2], Dr. LENGYEL Ákos József adjunktus[3]

[1]Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-46-565-162, mechecs@uni-miskolc.hu
[2]Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-46-565-162, mechab@uni-miskolc.hu
[3]Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-46-565-162, mechlen@uni-miskolc.hu

Kivonat

A tanulmány tárgyát axiális erővel is terhelt állandó keresztmetszetű hajlított-nyírt rudak statikai feladatainak analitikus megoldására alkalmas módszer alkotja. A kidolgozott analitikus eljárás az Euler-Bernoulli rúdelmélet kinematikáján, valamint a rúd deformációjának figyelembevételével felírt egyensúlyi egyenleteken alapul. A tanulmány a probléma megoldását alkalmasan megválasztott alapmegoldások lineáris kombinációjával állítja elő. A kidolgozott módszer alkalmazását több példa szemlélteti.

Kulcsszavak: Euler-Bernoulli rúd, axiális erő, kritikus nyomóerő, lehajlás

Abstract

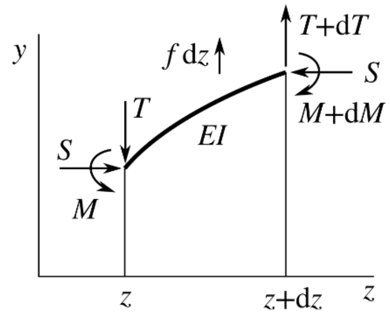
The object of this paper is the determination of the deformation of beams under the simulataneous actions of axial and transverse loads. The derivation of the governing equations uses the Euler-Bernoulli beam theory and the second order forms of equilibrium equations. The determination of the analytical solutions of the considered problems is based on so called fundamental solutions. Linear combination of the fundamental solutions which are filling to the given loading and boundary conditions gives the total solution. Two examples illustrate the applications of the presented analytical method.

1. BEVEZETÉS

A tanulmány egy analitikus megoldást ismertet az állandó keresztmetszetű axiális erővel is terhelt hajlított-nyírt rudak néhány statikai feladatára. A mechanikai modell az Euler-Bernoulli rúdelmélet kinematikai egyenleteit használja, továbbá az alkalmazott nyomatéki egyensúlyi egyenlet tartalmazza a nyomott rúd deformációját is (másodrendű elmélet). A kitűzött statikai feladatok megoldásához úgynevezett alapmegoldások alkalmas lineáris kombinációjával jutunk el. Az alapmegoldások kielégítik az axiális erővel is terhelt hajlított-nyírt rudakra vonatkozó rugalmasságtani egyenleteket, nevezetesen a geometriai, egyensúlyi és anyag egyenleteket, továbbá speciális kezdeti feltételeknek tesznek eleg. Az általunk megoldott feladatok megoldása öt alapmegoldást igényel. Ezeket a következő kezdeti feltételek és terhelési előírások határozzák meg:

1. $v_1(0)=1,\ \psi_1(0)=0,\ M_1(0)=0,\ T_1(0)=0,\ f=0,$ (1)
2. $v_2(0)=0,\ \psi_2(0)=1,\ M_2(0)=0,\ T_2(0)=0,\ f=0,$ (2)
3. $v_3(0)=0,\ \psi_3(0)=0,\ M_3(0)=1,\ T_3(0)=0,\ f=0,$ (3)
4. $v_4(0)=0,\ \psi_4(0)=0,\ M_4(0)=0,\ T_4(0)=1,\ f=0,$ (4)
5. $v_5(0)=0,\ \psi_5(0)=0,\ M_5(0)=0,\ T_5(0)=0,\ f=1,$ (5)

A fenti egyenletekben (1. ábra) $v=v(z)$ lehajlás függvény, $\psi=\psi(z)$ keresztmetszet szögelfordulása, $M=M(z)$ hajlító nyomaték, $T=T(z)$ függőleges komponense a keresztmetszetet terhelő belső erőrendszernek, f az y irányban alkalmazott megoszló terhelés.



1. ábra *Az S axiális erővel terhelt rúdelem egyensúlya*

Feltételezve, hogy a rúd hossza mentén $S=áll.$, a $v_i=v_i(z)$, $\psi_i=\psi_i(z)$, $M_i=M_i(z)$, $T_i=T_i(z)$, $(i=1,...,5)$ alapmegoldások számítása az alábbi egyenletek felhasználásával történik [1,2]:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}+f=0,\quad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}-S\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}-T=0, \tag{6}$$

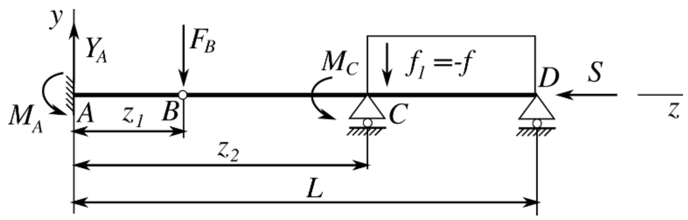
$$\psi=-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z},\quad M=EI\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}z}. \tag{7}$$

Itt E a rúd anyagának rugalmassági modulusa, I a keresztmetszetnek az x súlyponti főtengelyére számolt másodrendű nyomatéka, továbbá az yz sík a rúd szimmetria síkja, amely tartalmazza az alkalmazott megtámasztási kényszereket és egyben az alkalmazott síkbeli terhelés síkja is.

2. PÉLDÁK

2.1 Példa adott terhelésű hajlított-nyírt tartó deformációjának és igénybevételeinek számítására

A 2. ábra szemlélteti a vizsgálat tárgyát képező rugalmas anyagú rudat.



2. ábra *Állandó nyomóerővel és függőleges irányú erőrendszerrel terhelt rúd.*

A feladat numerikus megoldása az alábbi adatokkal történt:

$$E=2\times10^5\,\text{MPa},\ I=8{,}5333\times10^5\,\text{mm}^4,\ z_1=700\,\text{mm},\ z_2=1300\,\text{mm},$$

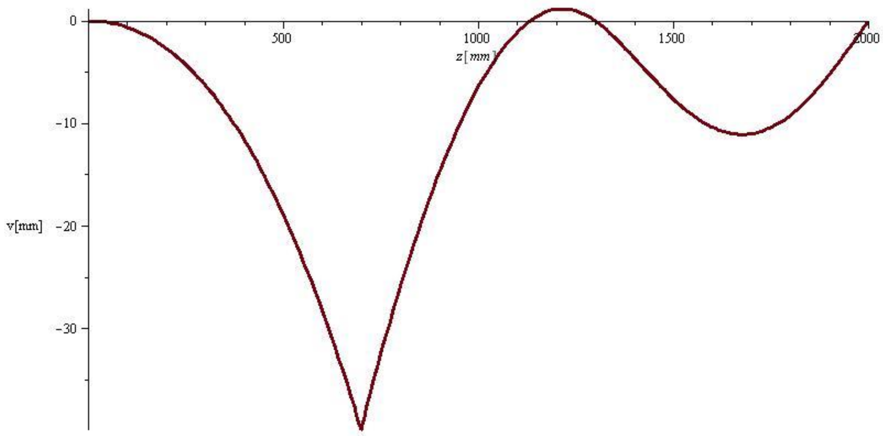
$$L=2000\,\text{mm},\ F_B=1000\,\text{N},\ f=1000\,\text{N/m},\ M_C=2000\,\text{Nmm},\ S=2\times10^5\,\text{N}.$$

A 3. ábra a lehajlás függvényt, a 4. ábra pedig a hajlító nyomaték függvényt szemlélteti a z axiális koordináta függvényeként. A lehajlás függvény az alapmegoldások ismeretében a

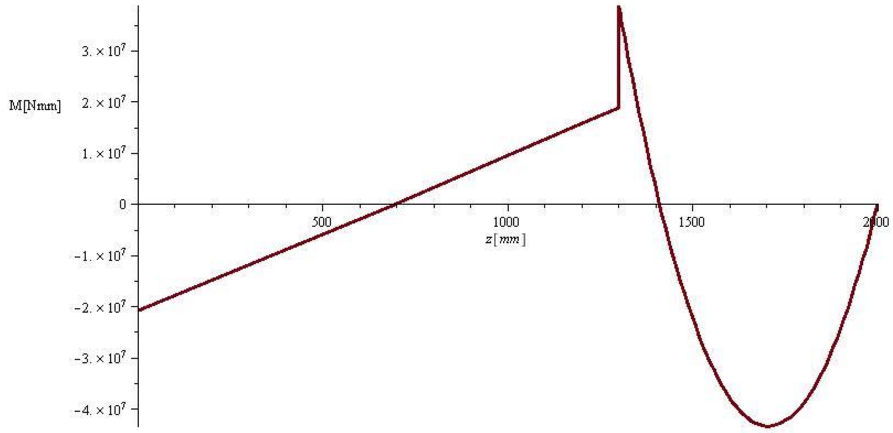
$$\begin{aligned} v(z)&=M_A v_3(z)+Y_A v_4(z)+F_B H(z-z_1)v_4(z-z_1)+M_C H(z-z_2)v(z-z_2)+\\ &Y_C H(z-z_2)v_4(z-z_2)+f_1 H(z-z_2)v_5(z-z_2)+\vartheta_B H(z-z_1)v_2(z-z_1)\end{aligned} \tag{8}$$

egyenletből számítható ahol $H=H(z)$ a Heaviside függvény. Az ismeretlen $M_A, Y_A, \vartheta_B, Y_C$ állandók az alábbi egyenletekből számíthatók.

$$M(z_1)=0,\ v(z_2)=0,\ v(L)=0,\ M(L)=0. \tag{9}$$



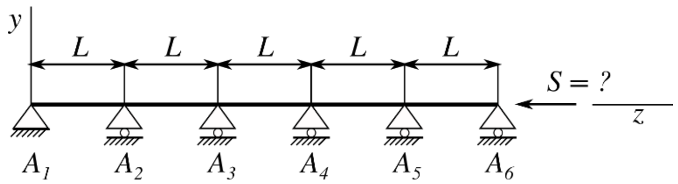
3. ábra *Lehajlás függvény*



4. ábra *Hajlító nyomatéki függvény*

2.2 Kritikus teher számítása

Az 5. ábra egy hat támaszú állandó keresztmetszetű hosszú nyomott rudat szemléltet. Feladat az S erő kritikus értékének meghatározása, amely a nyomott rúd stabilitás vesztését okozza. A következő adatokhoz tartozó kritikus terhelés számítását végeztük el.



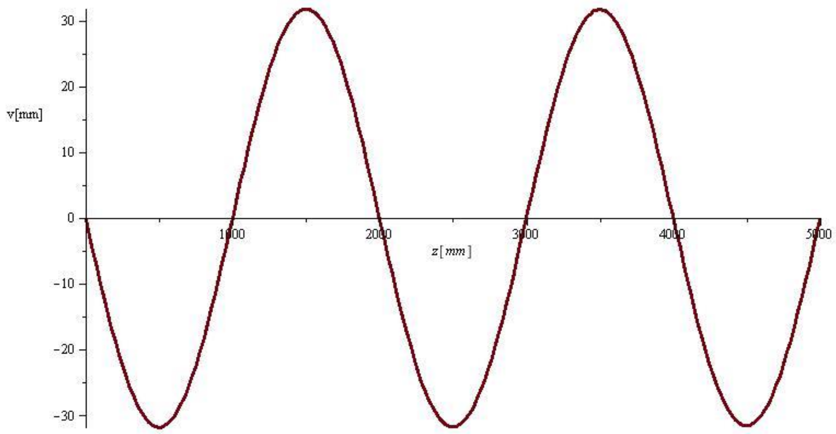
5. ábra *Példa kritikus nyomóerő számítására*

$$E = 2\times10^5 \text{ MPa},\ I = 8{,}5333\times10^5 \text{ mm}^4,\ \ L = 1000\,\text{mm}.$$

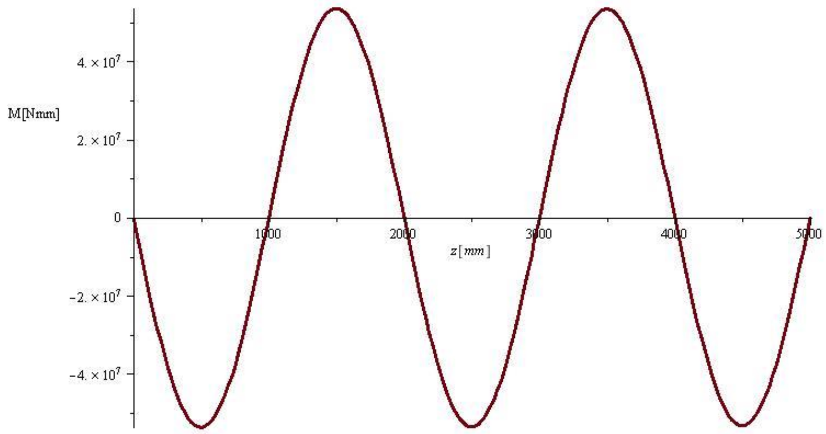
A részletes számítás az alábbi eredményre vezetett.

$$S = 1{,}685\times10^5 \text{ N}. \tag{10}$$

Az S_{krit}-hoz tartozó kihajlási alakot a 6. ábra, a 7. ábra pedig a hajlító nyomaték amplitudóját szemlélteti, feltéve, hogy az A_1 keresztmetszet szögelfordulása $\psi(0) = 0{,}1$ rad.



6. ábra *Kihajlási alak függvény*



7. ábra *Az S_{krit}-hoz tartozó hajlító nyomatéki alak függvény*

3. KÖVETKEZTETÉSEK

A dolgozat állandó axiális erővel terhelt hajlított-nyírt rudak statikai feladatainak megoldására egy analitikus módszer ismertet, amely úgynevezett alapmegoldások használatán alapul. Az alapmegoldások előállítása minimális matematikai ismereteket igényel. Két példa szemlélteti a kidolgozott analitikus módszer alkalmazását.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutató munka a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, K115701 projekt támogatásával valósult meg, amelyért a szerzők köszönetüket fejezik ki.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

[1] Giandomenico Toniolo: Introduction to the frame analyses. First and second order analyses. Springer, Berlin, 2019.

[2] Stephan P. Timoshenko, James M. Gere: Theory of elastic stability. Dover Publications, INC, New York, 2009.

[3] John D. Renton: Elastic beam and frames. Camford Books, Oxford, 1999.

[4] Nicholas John Hoff: The analysis of structures. John Wiley & Sons, New York, 1956.