

# Áramlástanban megjelenő nem normális, lineáris rendszerek stabilitásának vizsgálata

## Stability investigation of non-normal linear systems in fluid dynamics

*Dr. NAGY Péter Tamás*

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Gépészmérnöki Kar, Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp 3 D. épület 3. emelet  
Tel.: +36 1 463-1442, E-mail: pnagy@hds.bme.hu  
Honlap: www.hds.bme.hu / <https://flowstabilityhungary.github.io/hu/>

### Abstract

*The linear stability analysis is a fundamental tool in designing and investigating mechanical systems. The real parts of the eigenvalues of the system matrix determine the stability. However, there are systems where linear stability analysis is not useful in engineering practice. Even in the case of a small disturbance of the equilibrium situation, the system's state changes significantly and returns only after a long time or due to the significant deflection, the neglected non-linear effects can become important, and the system does not return to the investigated equilibrium state at all. The reason for the problem is that the descriptive matrix is not normal, i.e. its eigenvectors are not orthogonal. In these cases, the energy method should be used, which will be presented in the paper.*

**Keywords:** stability analysis, linearized system, energy method, non-normal system, eigenvalue problem

### Kivonat

*Gépészeti rendszerek tervezésénél, vizsgálatánál alapvető eszköztár a lineáris stabilitásvizsgálat. Ilyenkor a rendszer mátrixának sajátértékeinek valós részét vizsgáljuk. Előfordulhatnak azonban olyan rendszerek, amiknél a lineáris stabilitásvizsgálat a mérnöki gyakorlatban mégsem hasznos. Az egyensúlyi helyzet kis mértékű megzavarása esetén is a rendszer állapota jelentősen megváltozik, és csak hosszú idő múlva tér vissza. A jelentős kitérés miatt az elhanyagolt nem-lineáris hatások fontossá válhatnak, és a rendszer nem tér vissza a vizsgált egyensúlyi állapotba. A probléma oka, hogy a leíró mátrix nem normális, azaz sajátvektorai nem ortogonálisak. Ilyen esetekben az energia módszer használandó, amit a cikkben bemutatok.*

**Kulcsszavak:** stabilitásvizsgálat, linearizált rendszerek, energia módszer, nem normális rendszer, sajátértékprobléma

## 1. Bevezetés

Gépészeti rendszerek tervezésénél, vizsgálatánál alapvető eszköztár a lineáris stabilitásvizsgálat. Első lépésben meghatározzuk a rendszer későbbiekben vizsgálandó egyensúlyi helyzetét. Áramlástanban általában egy ilyen időben állandó egyensúlyi helyzet van, amit lamináris alapáramlásnak hívunk. A következő lépésben ekörül az állapot körül linearizáljuk a rendszert leíró egyenleteket, amiket diszkretizált rendszerek esetén egy mátrixszal írhatunk le. A lineáris stabilitásvizsgálat során ennek a mátrixnak a sajátértékeit vizsgáljuk. Az általános mechanikai tapasztalatok alapján az egyensúlyi állapot akkor stabil, ha a sajátértékek valós része (felírás módjától függően) negatív.

Előfordulhatnak azonban olyan rendszerek is, amikor matematikailag ez tényleg stabilitást jelent, azonban a mérnöki gyakorlatban mégsem ezt tapasztaljuk. Az egyensúlyi helyzet kismértékű megzavarása esetén a rendszer állapota jelentősen megváltozik (kitér), és csak hosszú idő múlva megy vissza az egyensúlyi helyzet közelébe. A jelentős kitérés miatt a linearizálás során elhanyagolt nem-lineáris hatások fontossá válhatnak, és előfordulhat, hogy a valós rendszer nem is jut vissza a vizsgált egyensúlyi állapotba. Ilyen esetekben a klasszikus lineáris stabilitásvizsgálat értelmét veszti, mert mérnöki szempontból nem ad releváns választ az egyensúlyi helyzet stabilitási tulajdonságára.

Miközben mechanikában és akusztikában olyan rendszerek a jellemzőek, melyekben jól használható a lineáris stabilitásvizsgálat, sajnos az áramlástanban nem ez a helyzet. Az egyik legismertebb példa a csőáramlás. Ennek egyensúlyi helyzete egy paraboloid alakú alapáramlás, amely tetszőlegesen nagy Reynolds-szám esetén is lineárisan stabil. A mérnöki gyakorlatban azonban mégis turbulens, azaz eredeti egyensúlyi állapotot elhagyó kaotikusan viselkedő áramlást kapunk, melynek időbeni átlagáról természetesen már sok ismerettel rendelkezünk, de a jelenség pontos mechanizmusának feltérképezése továbbra is a fizika egyik legnagyobb megoldatlan problémája. [1]

Természetesen a lineáris stabilitásvizsgálat ebben az esetben is pontos matematikailag. Miközben a gyakorlatban azt tapasztaljuk, hogy 2000-3000-es Reynolds-szám (átlagsebességgel, csőátmérővel és a kinematikai viszkozitással definiálva) felett turbulens lesz az áramlás, nagyon nyugodt kísérleti körülmények közt, precízen gyártott csövekben akár 100 000-es Reynolds-számon is megfigyelhető lamináris áramlás! Azonban ilyenkor már a legkisebb zavarás hatására is kialakul a turbulens áramlás.

Ilyen esetekben a lineáris stabilitásvizsgálat gyakorlati eredménytelenségének az oka, hogy a rendszert leíró mátrix nem normális, azaz sajátvektorai nem ortogonálisak, sőt általában nagyon hasonlóak, skalárisszorzatuk abszolútértéke közel egységnyi. Ilyen esetekben célravezető az úgynevezett energia módszer használni. A módszer lényege, hogy az állapot időbeli megváltozása helyett a zavarás energiaváltozását vizsgáljuk. Ennek a változásnak keressük a maximumát, ami hasonlóan a klasszikus vizsgálathoz egy sajátérték problémára vezet. Az így kapott sajátértékek előjele alapján állapítható meg, hogy a linearizált rendszer stabil-e vagy sem. A korábban bemutatott problémák így nem fordulhatnak elő. Ha az energia módszer stabilitást jelez elő, akkor kis mértékű zavarások esetén sem távolodhatunk el az egyensúlyi állapottól, így a nem-lineáris hatások biztosan kicsik maradnak. Sőt, áramlástanban a Reynolds-Orr azonosságból következik, hogy a nem-lineáris tagok által okozott energiaváltozás nulla, így ha az energia egyenlet szerint stabil az áramlás, akkor az feltétel nélküli stabilitást is jelent. Nincs olyan mértékű zavarás, ami esetén ne állna vissza a vizsgált egyensúlyi helyzet adott idő után. A cikkben először a klasszikus lineáris stabilitásvizsgálatot, majd az energia módszert, végül egyszerű példákat mutatok be.

## 2. A stabilitásvizsgálat lépései

A gépészeti rendszerünk állapotát írja le a  $\underline{q}_t$  állapotvektor, melynek változását a

$$\frac{d\underline{q}_t(t)}{dt} = \underline{f}(\underline{q}_t(t)) \quad (1)$$

közönséges differenciál egyenlet írja le. Feltételezzük, hogy a rendszer homogén, azaz  $\underline{f}$  független az időtől és a rendszerünket nem éri külső zavarások. Az első lépésben a rendszer egyensúlyi állapotát kell megtalálnunk, melyre érvényes, hogy

$$\underline{0} = \underline{f}(\underline{Q}). \quad (2)$$

Az (1) egyenletbe visszahelyettesítve, a  $\underline{Q}$  állapot megzavarását,  $\underline{q}_t(t) = \underline{Q} + \underline{q}(t)$ , majd kihasználva a (2)-es egyenletet felírható egy egyenlet a zavarások változására:

$$\frac{d\underline{q}(t)}{dt} = \underline{g}(\underline{q}(t)). \quad (3)$$

A (3)-as egyenlettel adott kezdeti  $\underline{q}(t=0) = \underline{q}_0$  zavarás időbeli változását lehet vizsgálni. Ha  $\underline{q}(t) \rightarrow 0$ , tetszőleges  $\underline{q}_0$  kezdeti zavarás esetén, akkor a rendszer feltétel nélkül stabil. A (3)-as egyenlet átírható a következő alakra, ahol az átláthatóság kedvéért az egyes változók időfüggését nem jelöljük:

$$\frac{d\underline{q}}{dt} = \underline{A}\underline{q} + \underline{n}(\underline{q}), \quad (4)$$

ahol  $\underline{A}$  a linearizált rendszert leíró mátrix,  $\underline{n}(\underline{q})$  pedig a nem-lineáris hatásokat kifejező tag. Lineáris stabilitásvizsgálat esetén az  $\underline{A}$  mátrix  $\lambda$  sajátértékeit vizsgáljuk. A nem-lineáris tagokat elhanyagolva a (4)-es egyenlet megoldása a következő alakban írható:

$$\underline{q}_{\text{lin}} = \sum_{i=1}^N a_i \underline{v}_i e^{\lambda_i t}, \quad (5)$$

ahol  $N$  az egyenletek száma,  $a_i$  a kezdeti értéktől függő állandók,  $\underline{v}_i$  a rendszer sajátvektorai,  $\lambda_i$  pedig a sajátértékei. Amennyiben mindegyik sajátérték negatív; jól látható, hogy a zavarás adott idő után elhal, tehát

a rendszer visszatér az egyensúlyi állapotba. Azonban ez nem jelenti azt, hogy közben  $q_{\text{lin}}$  nagysága nem lehet tetszőlegesen nagy és okozhat az  $\underline{n}(q)$  tag problémát, akár nagyon kicsi kezdeti zavarás ( $q_0$ ) esetén!

Definiáljuk a zavarás energiáját a zavarásvektor önmagával vett skalárszorzataként:

$$e = \langle \underline{q}, \underline{q} \rangle = \underline{q}^T \underline{q}, \quad (6)$$

ahol a felsőindexben a T a transzponáltat jelöli. Az energia időbeli változását a következőképp számolhatjuk:

$$\frac{de}{dt} = \frac{dq^T}{dt} \underline{q} + \underline{q}^T \frac{dq}{dt}, \quad (7)$$

majd felhasználva (4)-es egyenletet

$$\frac{de}{dt} = \underline{q}^T \underline{A}^T \underline{q} + \underline{n}^T \underline{q} + \underline{q}^T \underline{A} \underline{q} + \underline{q}^T \underline{n}, \quad (8)$$

ahol az átláthatóság kedvéért az  $\underline{n}$  függését a  $\underline{q}$ -tól nem jelöltük. Ha a nem-lineáris tagot elhanyagoljuk, a differenciálegyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$\frac{de_{\text{lin}}}{dt} = \underline{q}^T (\underline{A}^T + \underline{A}) \underline{q}. \quad (9)$$

Ahogy már említettük, az áramlástanban a nem lineáris tag okozta energiaváltozás a legtöbb esetben ténylegesen nulla ( $\underline{n}^T \underline{q} + \underline{q}^T \underline{n} = 0$ ), így ez nem minősül elhanyagolásnak. Továbbá azt is megjegyezzük, hogy mivel  $\underline{q}^T \underline{A}^T \underline{q}$  egy szám, igaz rá, hogy  $\underline{q}^T \underline{A}^T \underline{q} = (\underline{q}^T \underline{A}^T \underline{q})^T = \underline{q}^T \underline{A} \underline{q}$ , ezért írhatjuk, hogy

$$\frac{de_{\text{lin}}}{dt} = 2 \underline{q}^T \underline{A} \underline{q}. \quad (10)$$

Az energia növekedési rátáját a

$$\mu(\underline{q}) = \frac{1}{e_{\text{lin}}} \frac{de_{\text{lin}}}{dt} \quad (11)$$

egyenlettel számíthatjuk, amibe behelyettesítve a (6)-os és (9)-es egyenleteket a következő kifejezésre jutunk

$$\mu(\underline{q}) = \frac{\underline{q}^T (\underline{A}^T + \underline{A}) \underline{q}}{\underline{q}^T \underline{q}}. \quad (12)$$

Ez nem más, mint a  $\underline{G} = \underline{A}^T + \underline{A}$  mátrix Rayleigh-hányadosa. Mivel  $\underline{G}$  szimmetrikus, a Rayleigh-hányadosa  $\underline{G}$  legkisebb ( $\mu_{\text{min}}$ ) és legnagyobb ( $\mu_{\text{max}}$ ) sajátértéke közé fog esni. A hányados a maximumát a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor esetén veszi fel, amit emiatt a **kritikus zavarási állapot**. Fontos konklúzió, ha a  $\underline{G}$  mátrix legnagyobb sajátértéke negatív, akkor a zavarás energiája nem növekedhet, tehát  $\underline{G}$  **legnagyobb sajátértékének előjelétől függ, hogy az áramlás stabil-e vagy sem**. Ez nagyon hasonló a klasszikus lineáris stabilitásvizsgálathoz, annyi különbséggel, hogy nem  $\underline{A}$ , hanem  $\underline{A}^T + \underline{A}$  sajátértékeit kell vizsgálni. Sőt, belátható, hogy a lineáris stabilitás vizsgálat legnagyobb valósrésztű sajátértéke és az energia módszerrel kapott legnagyobb sajátérték közt a kapcsolat:

$$2 \Re(\lambda_{\text{max}}) \leq \mu_{\text{max}}. \quad (13)$$

Egyenlőség akkor áll fent, ha  $\underline{A}$  sajátvektorai merőlegesek, azaz belső szorzatuk közel nulla. A különbség annál nagyobb lehet, minél több sajátvektor közel párhuzamos, azaz belső szorzata minél jobban közelíti az egyet vagy a mínusz egyet. Az ilyen nem normálmátrixszal leírható rendszereket nem-normális rendszereknek hívjuk. [2, 3]

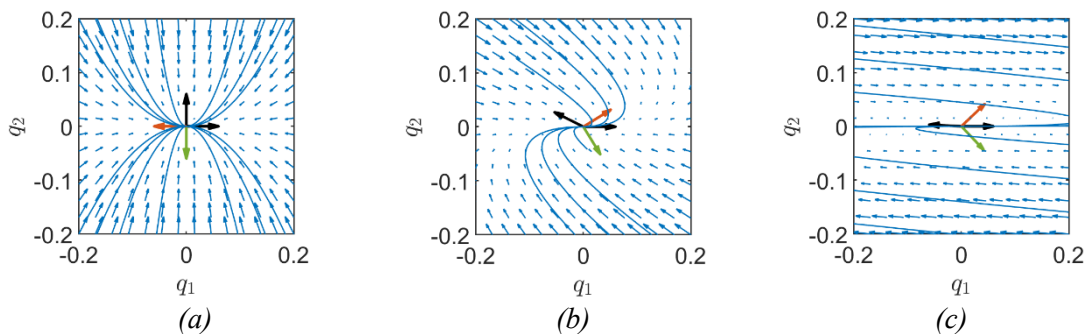
(Megjegyzendő, hogy egy szimmetrikus, valóselemű mátrix sajátértékei csak valós számok lehetnek, ahogy az  $\underline{G}$  esetén fizikailag is várható. Továbbá, ha a (10)-es egyenlet felhasználva definiáljuk az energia növekedési rátáját, és úgy keressük a maximumot, az egyenlet variációja után, szintén azt kapnánk, hogy a maximum az  $\underline{A}^T + \underline{A}$  mátrix legnagyobb sajátértéke.)

### 3. Példák

Első körben egy egyszerű két változós egyenleten mutatjuk be a nem-normalitás hatását. Első körben a nemlineáris hatásokat elhanyagoljuk. Vizsgáljuk a (4)-es egyenlet szerinti közönséges differenciál egyenletet a következő  $\underline{\underline{A}}$  mátrix esetén:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} & p \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

amiben  $p$  egy szabad paraméter.  $p = 0$  esetén a rendszer normális, és minél nagyobb értéket vesz fel, úgy lesz inkább nem normális. Vegyük észre, hogy a paraméter megválasztásától függetlenül az  $\underline{\underline{A}}$  mátrix sajátértékei:  $-1/20$  és  $-1/10$ . Miközben  $p$  jelentősen befolyásolja a rendszer sajátvektorait. Ezt az 1. ábra szemlélteti, ahol a dinamikai rendszer fázisterében fekete nyilakkal jelöltük a két sajátvektort. Jól látható, hogy ezek egyre inkább hasonlóak, ahogy a  $p$  értékét növeljük. (a)  $p = 0$ , (b)  $p = 0.1$ , (c)  $p = 1$ . (A láthatóság kedvéért ellentétes irányba rajzoltuk be őket, de a sajátvektor tetszőleges számmal beszorozva is sajátvektor, így tulajdonképpen az általuk meghatározott egyenesek által bezárt szög számít, ami jól láthatóan csökken.) A fázisteret kék színű nyilak jelképezik, melyekbe pár trajektória is berajzolásra került. A piros nyíl és a zöld nyíl pedig a  $\underline{\underline{G}}$  mátrix sajátvektorait jelképezik, a piros az instabilabb, a zöld pedig a stabilabb sajátértékhez tartozik. Jól látható, hogy  $p = 0$  esetén a két különböző módszerrel kapott leginstabilabb sajátértékhez tartozó sajátvektorok megegyeznek (a) és úgy lesz egyre nagyobb a különbség, ahogy a  $p$  értékét növeljük. Jól érzékelhető, hogy a legnagyobb vizsgált paraméter  $p = 1$  esetén, ha az  $\underline{\underline{A}}$  bármely sajátvektorából indítanánk a megoldást, akkor folyamatosan visszamennénk a stabil egyensúlyi pontban, miközben ha a  $\underline{\underline{G}}$  mátrix piros sajátvektorából indítanánk, a rendszer jelentősen eltávolodik  $q_1$  irányba, majd csak azután térne vissza az egyensúlyi helyzetbe.



1. ábra A (14)-es egyenletben definiált lineáris modell fázistere (kék) a leíró mátrix sajátvektorai (fekete) és a mátrixhoz tartozó energiaváltozáshoz kapcsolódó  $\underline{\underline{G}}$  mátrix sajátvektorai: piros a legnagyobb, zöld a legkisebb energiaváltozáshoz tartozó sajátvektor. (a)  $p = 0$ , (b)  $p = 0.1$ , (c)  $p = 1$ .

Azonban egy ilyen rendszer mérnöki szempontból már nem feltétlenül stabil. Ha pedig hozzáadunk kis mértékű nem-linearitást, látni fogjuk, hogy a rendszer nem tér vissza az eredeti állapotba, hanem egy új egyensúlyi állapothoz tart. Egészítsük ki a korábbi rendszerünket ( $p = 1$  esetén) egy nem-lineáris taggal hasonlóan Bagett és Trefethen [4] egyszerűsített turbulencia modelljéhez:

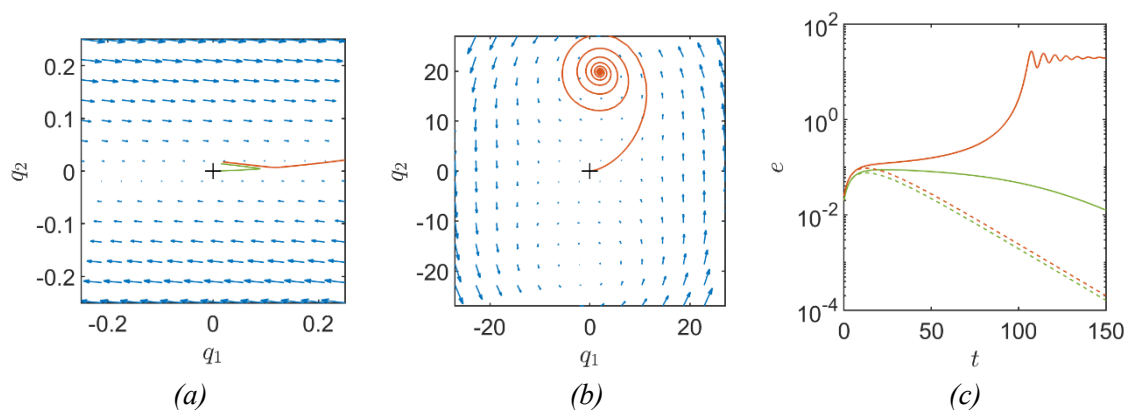
$$\frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{20} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} q + 0,02 \begin{bmatrix} 0 & -q_1 \\ q_1 & 0 \end{bmatrix} q. \quad (15)$$

A rendszert az energiamódszerrel kapott leginstabilabb sajátvektor ( $q_{\text{krit}} = [0,7245; 0,6892]^T$ ) 0,02 és 0,025-szorosából inicializálva láthatjuk az energia a kezdeti érték többszörösére nő. A második esetben, hiába az enyhe nem linearitás, egy másik egyensúlyi helyzetbe kerül a rendszer. A megoldásokat a fázistérben a 2 (a) és 2 (b) ábrákon jelenítettük meg zölddel a kisebb, pirossal pedig a nagyobb kezdeti állapotból indított megoldásokat. A 2 (a) ábrán az egyensúlyi pont közelében, még 2 (b) esetén egy nagyobb tartományon

ábrázoltuk a megoldásokat, hogy az új egyensúlyi pont is látszódjon. A megoldások energiaváltozását a 2 (c) ábra folytonos vonalai jelölik. Jól látható mindkét megoldásnál jelentős az energia növekedés. Szaggatottal pedig berajzoltuk azoknak a megoldásoknak az energiaváltozását, amiknél a megoldás során a nem-lineáris tagot elhagytuk. Jól látható, hogy a kezdeti energianövekedés ezekben az esetekben is megtörténik, tehát az tisztán lineáris eredetű volt.

Megvizsgálva a rendszert energia módszerrel a legnagyobb sajátérték 0,08512 volt, ami mivel egy pozitív szám, a rendszer energetikailag instabil. Természetesen, ha a rendszer lineáris lenne, visszaállna egy idő után az egyensúlyi állapotba, amit a 2 (c) ábrán szaggatott vonal jelölt görbékből láthatunk. Azonban a gyakorlatban általában van valamiféle nem-lineáris hatás is. Ha azonban azok a hatások ténylegesen elhanyagolhatók is, a jelentős kitérések, kilengések a műszaki gyakorlatban általában nem elfogadottak.

Összefoglalva érdemes az energiamódszeres stabilitásvizsgálatot elvégezni, ha a rendszer normális, akkor az eredménye megegyezik a lineárisal, ha pedig nem-normális, akkor pedig konzervatívabb becslést ad a rendszer stabilitási viselkedésére. Egyetlen hátránya, hogy a rendszer esetleges lengési frekvenciáját ezzel a módszerrel nem lehet meghatározni. Ha arra is szükség van a klasszikus stabilitásvizsgálatot is el kell végezni.



2. ábra. A (15)-ös egyenlettel leírt differenciál egyenlet megoldásai. Zöld görbe jelöli a kisebb energiaszintről ( $\underline{q}_0 = \mathbf{0}, 02 \underline{q}_{krit}$ ), piros pedig a magasabb energiaszintről indított megoldást. (a) és (b) a megoldások fázisterének kinagyított (a) és a tágabb (b) része, (c) az megoldások energiaváltozása az időben.

## Köszönetnyilvánítás

A cikk megjelenését a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFIH) K142675 kódszámú pályázat támogatta.

## Irodalomjegyzék

- [1] M Avila, D Barkley, B Hof, “Transition to turbulence in pipe flow” *Annual Review of Fluid Mechanics*. vol 55, pp 575–602, 2023
- [2] P J. Schmid, L Brandt. “Analysis of Fluid Systems: Stability, Receptivity, Sensitivity: Lecture notes from the FLOW-NORDITA Summer School on Advanced Instability Methods for Complex Flows.” *Applied Mechanics Reviews*, vol 66(2):024803. 2014
- [3] P. J. Schmid, “Nonmodal stability theory,” *Annual Review of Fluid Mechanics* vol 39, 129–162 2007
- [4] J. Baggett, L. N. Trefethen, “ Low-dimensional models of subcritical transition to turbulence”, *Physics of Fluids*, vol 9, 1043, 1997