

Inverz inga robosztus stabilizálhatósága komplex értékű ingahossz esetén

The robust stabilizability of the inverted pendulum in case of complex-valued length

GREGOSITS Tamás¹, Dr. INSPERGER Tamás¹

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Műszaki Mechanikai Tanszék,
Cím: 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 5., Tel.: +36 1 463 1369, tomek.atat@gmail.com, insperger@mm.bme.hu

Abstract

In virtual environment in the case of motion control problems, it is easy to modify the parameters of the controlled system. In this way we can realize experiments that cannot be implemented in real world experiments. An example can be the balancing of the inverted pendulum in the case when the length of the pendulum is not a real number, but a complex number. This generates a complex-valued dynamics that consist of a real and an imaginary part. In my research, I investigate the effect of the complex parameter on the balancing performance, namely the maximum delay (critical delay) for which the pendulum can be stabilized. In the theoretical stability analysis, it was calculated that the critical delay does not depend on the imaginary part of the pendulum length. This means that the disappearance of the stable domain is not affected by the imaginary length. However, by introducing the robust stabilizability, we get that the critical delay corresponding to a given level of parameter uncertainty decreases if the imaginary component of the pendulum length increases. This means that the imaginary length affects the size of the stable region.

Kivonat

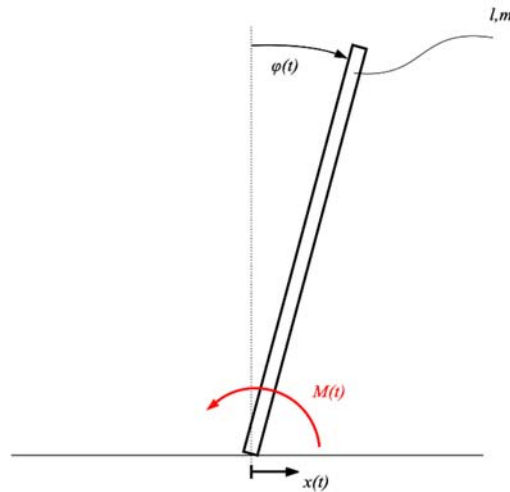
Virtuális környezetben megvalósított mozgáskoordinációs feladatok esetén könnyen lehet az egyes paramétereket változtatni, így olyan kísérleteket és méréseket is végre tudunk hajtani, amit valódi körülmények között nehezen, vagy nem is tudnánk megtenni. Ilyen lehet az inverz inga egyensúlyozása, abban az esetben, ha az inga hosszát nem valós, hanem komplex számmal írjuk le, ami egy komplex értékű dinamikát generál. A kutatásomban azt vizsgálom, hogy elméletben milyen hatással van az egyensúlyozásra a komplex értékű paraméter, azaz mi az időkézés legnagyobb értéke (kritikus időkézés), ami esetén stabilizálható az inverz inga. Az elméleti stabilizálhatósági vizsgálat során az derül ki, hogy az inverz inga kritikus időkézése nem függ az inga hosszának képzetes részétől, csak a valóstól, tehát a stabil tartomány eltűnését nem befolyásolja a képzetes hossz. Azonban a robosztus stabilizálhatóság fogalmát bevezetve azt kapjuk, hogy minél nagyobb a képzetes hossz, annál kisebb az adott paraméter bizonytalansághoz tartozó kritikus időkézés, tehát a stabil tartomány méretét befolyásolja az inga képzetes hossza.

Kulcsszavak: inverz inga, egyensúlyozás, komplex hossz, reakció időkézés

1. Bevezetés

Az emberi mozgás szabályozási feladatok során az idegrendszer reakció ideje egy határt szab a rendszerek stabilizálhatóságának [4]. Emiatt be lehet vezetni a kritikus hossz és kritikus időkézés fogalmát, amik a stabilizálhatóság határát mutatják. Ezen paraméterek segítségével lehet különböző rendszereket vizsgálni időkézést is figyelembe véve [1].

Virtuális környezetet alkalmazva olyan elméleti kísérletek is megvalósíthatóak, amik a valóságban nehezen vagy egyáltalán nem végre hajthatóak [5]. Erre egy példa lehet, amikor egy inverz inga egyensúlyozás során nem a Newtoni, hanem az Arisztotelészi dinamika van alkalmazva [6]. Ebben a kutatásban egy hasonló elméleti kísérlet van megvalósítva. Az inverz inga egyensúlyozásának feladata van vizsgálva abban az esetben, amikor az inga tisztán valós hossza ki van egészítve egy képzetes résszel. Az inga komplex hossza egy komplex mozgási dinamikát generál. Az inga mechanikai modellje látható az első ábrán.



1. ábra. Inverz inga egyensúlyozásának mechanikai modellje.

2. Inverz inga valós hosszal

Inverz inga egyensúlyozási feladatok során a mérési alanynak a felső egyensúlyi pozícióban kell tartania az ingát, az alsó pontja mozgásának segítségével. Ebben az esetben az ember modellezhető arányos-differenciáló, azaz PD szabályozóként, mivel az ember képes a pozíció és a sebesség érzékelésre is [1]. Az emberi idegrendszer egy természetes reakció időkésést tartalmaz, emiatt modellként késleltetett PD szabályozó alkalmazható. A kis kocsin szabályozott inverz ingának a linearizált mozgásegyenlete, egyenletes tömegeloszlással, felírható az alábbi alakban

$$\ddot{\varphi}(t) - \frac{6g}{cl} \varphi(t) = -\frac{6}{lc(m+m_0)} Q(t). \quad (1)$$

ahol φ az inga szögpozíciója, l az inga hossza, g a gravitációs gyorsulás, m az inga, m_0 pedig az ingához rögzített kis kocsinak a tömege. $Q(t)$ a szabályozási erő és c pedig egy paraméter az alábbi értékkel

$$c = \left(4 - \frac{3m}{m+m_0}\right). \quad (2)$$

A numerikus szimulációk során a kis kocsi tömege $m_0 = 100$ kg és az inga tömege $m = 1$ kg. Ilyen módon modellezhető az eset, amely során a kis kocsi tömege sokkal nagyobb, mint az ingájé. A késleltetett PD szabályozó szabályozási erejének az egyenlete az alábbi

$$Q(t) = K_p \varphi(t - \tau) + K_d \dot{\varphi}(t - \tau), \quad (3)$$

ahol τ az időkésés, K_p az arányos tag, K_d pedig a differenciáló tag.

3. Inverz inga Komplex hosszal

Abban az esetben, ha az inverz ingának a hossza egy komplex szám, a mozgásegyenlet paraméterei is komplex számmá válnak, tehát az alábbi jelölés alkalmazható

$$\ddot{\varphi}(t) - a\varphi(t) = -bQ(t), \quad (4)$$

ahol

$$l = L + Ri \quad a = \alpha + \beta i \quad b = \delta + \kappa i,$$

és a szögpozíció felbontható valós és képzetes részre:

$$\varphi(t) = \varphi_{\text{Re}}(t) + i\varphi_{\text{Im}}(t) \quad (5)$$

Az L és az R a valós és a képzetes része az inverz ingának. Az α , β és δ , κ a valós és a képzetes része az a és b paramétereknek. Ezeknek a paramétereknek az értékei kiszámolhatók az alábbi módon:

$$a = \frac{6g}{c(L+Ri)} = \frac{6g}{c(L+Ri)} \cdot \frac{L-Ri}{L-Ri} = \frac{6g(L-Ri)}{c(L^2+R^2)} = \underbrace{\frac{6gL}{c(L^2+R^2)}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{6gR}{c(L^2+R^2)}}_{\beta} i \quad (6)$$

$$b = \frac{6}{c(m+m_0)(L+Ri)} = \frac{6}{c(m+m_0)(L+Ri)} \cdot \frac{L-Ri}{L-Ri} = \frac{6(L-Ri)}{c(m+m_0)(L^2+R^2)} =$$

$$= \frac{6L}{\underbrace{c(m+m_0)(L^2+R^2)}_{\delta}} - \frac{6R}{\underbrace{c(m+m_0)(L^2+R^2)}_{\kappa}} i. \quad (7)$$

Fontos megjegyezni, hogy β és κ tartalmazza a negatív jelet is. Az $R = 0$ esetben a valós hosszú inverz inga dinamika kapható vissza.

4. Stabilitás

Egyensúlyozási feladatok során a rendszer stabilitás diagramja a D-felosztás módszerével vezethető le. A stabilitás diagram az úgynevezett D-görbét mutatja a paraméter síkban, ahol a karakterisztikus együttható valós résszel létezik. A D-görbét a mozgásegyenlet karakterisztikus egyenletéből lehet levezetni [2]. A λ karakterisztikus együttható egy komplex szám. A rendszer akkor van a stabilitás határán, amikor a valós része a karakterisztikus gyökök zérus. Tehát γ egyenlő nullával és az exponenciális függvény felírható, mint trigonometrikus függvények lineáris kombinációja. A kiszámolt egyenlet szétbontható valós és képzetes részre:

$$\operatorname{Re}(D(\lambda)) = -\omega^2 - \alpha + \delta K_p \cos(\omega\tau) + \kappa K_p \sin(\omega\tau) - \kappa K_d \omega \cos(\omega\tau) + \delta K_d \omega \sin(\omega\tau) = 0, \quad (8)$$

$$\operatorname{Im}(D(\lambda)) = -\beta + \kappa K_p \cos(\omega\tau) - \delta K_p \sin(\omega\tau) + \delta K_d \omega \cos(\omega\tau) + \kappa K_d \omega \sin(\omega\tau) = 0. \quad (9)$$

Ez az egyenletrendszer megoldható K_p és K_d változókra és két különböző eset elkülöníthető,

- Ha $\omega = 0$

A D-görbék az $\omega = 0$ paraméteres egyenletből indulnak ki. Ez az egyenes a statikus D-görbe.

$$-\alpha + \delta K_p = 0 \rightarrow K_p = \frac{\alpha}{\delta} \quad (10)$$

$$-\beta + \kappa K_p = 0 \rightarrow K_p = \frac{\beta}{\kappa} \quad (11)$$

Ez a megoldás ellentmondásosnak tűnik, de a két megoldás pontosan egyenlő egymással.

- Ha $\omega \neq 0$

Ahhoz, hogy megkapjuk K_p és K_d változókat, mint az ω függvénye ez a két egyenlet az alábbi módon manipulálható:

$$\begin{aligned} (8) \times \cos(\omega\tau) - (9) \times \sin(\omega\tau) &\Rightarrow \\ (-\omega^2 - \alpha) \cos(\omega\tau) + \beta \sin(\omega\tau) + K_p \delta - K_d \kappa \omega &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (8) \times \sin(\omega\tau) + (9) \times \cos(\omega\tau) &\Rightarrow \\ (-\omega^2 - \alpha) \sin(\omega\tau) - \beta \cos(\omega\tau) + K_p \kappa + K_d \delta \omega &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Ezeket megoldva megkapjuk az egyenletrendszer megoldását.

$$\begin{aligned} \Rightarrow K_d(\omega) &= \frac{1}{\kappa^2 \omega + \delta^2 \omega} (\omega^2 \delta \sin(\omega\tau) + \alpha \delta \sin(\omega\tau) + \beta \delta \cos(\omega\tau)) + \\ &+ \frac{1}{\kappa^2 \omega + \delta^2 \omega} (-\omega^2 \kappa \cos(\omega\tau) - \alpha \kappa \cos(\omega\tau) + \kappa \beta \sin(\omega\tau)), \end{aligned} \quad (14)$$

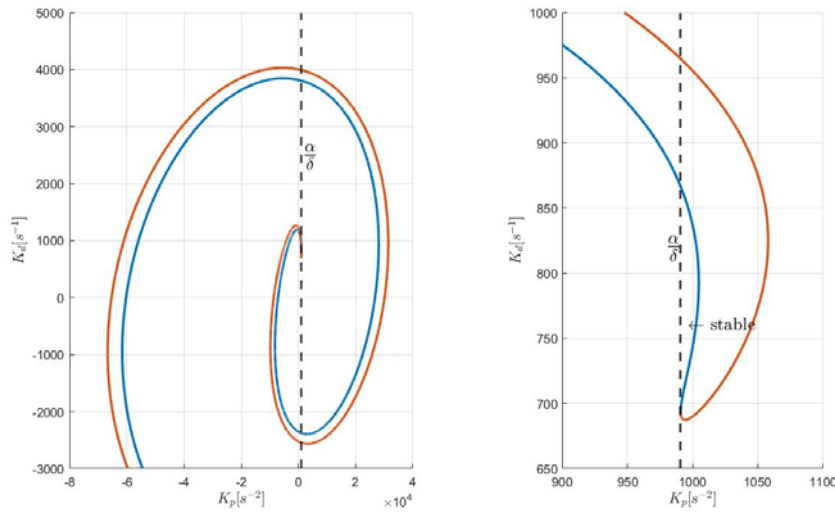
$$\begin{aligned} \Rightarrow K_p(\omega) &= \frac{\omega^2 + \alpha}{\delta} \cos(\omega\tau) - \frac{\beta}{\delta} \sin(\omega\tau) + \frac{1}{\kappa^2 + \delta^2} (\omega^2 \kappa \sin(\omega\tau) + \alpha \kappa \sin(\omega\tau)) + \\ &+ \frac{1}{\kappa^2 + \delta^2} \left(\beta \kappa \cos(\omega\tau) - \frac{\omega^2 \kappa^2}{\delta} \cos(\omega\tau) - \frac{\alpha \kappa^2}{\delta} \cos(\omega\tau) + \frac{\kappa^2 \beta}{\delta} \sin(\omega\tau) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Fontos megjegyezni, hogy a karakterisztikus gyökök nem komplex párok, mint a valós inga hosszú esetben, hiszen a karakterisztikus egyenlet tartalmaz komplex együtthatókat. Tehát, ha $\lambda = \gamma + \omega i$ egy karakterisztikus együttható, akkor $\lambda = \gamma - \omega i$ nem feltétlenül karakterisztikus együttható. Emiatt a K_p és a K_d függvények különböző dinamikus D-görbét adnak pozitív és negatív ω értékekre. Tehát a tisztán valós értékű inga hosszú esettel szemben, az ω paramétert a negatív és a pozitív tartományban is vizsgálni kell. Ezen kívül a dinamikus D-görbék esetében csak egy karakterisztikus együttható valós része változtat előjelet.

5. Stabilitás diagram

A stabilitás diagram látható az 2. ábrán. Nem nulla képzetes hossz esetén két fajta D-görbe tűnik fel: egy $\omega > 0$ és egy $\omega < 0$ esetén, piros és kék vonallal jelölve. Ugyanakkora pozitív és negatív képzetes R résszel, a D-görbék szimmetrikusak. Ez a K_p és K_d R -rel való parametrizálásával is látható: $K_p(\omega, R) =$

$K_p(-\omega, -R)$ és $K_d(\omega, R) = K_d(-\omega, -R)$. A 2. ábrán látható, hogy a dinamikus D-görbék érintik a statikus D-görbét a $(K_p, K_d) = \left(\frac{\alpha}{\delta}, \tau \frac{\alpha}{\delta}\right)$ pontban.



2. ábra. Stabilitás diagram késleltetett PD szabályozó esetén, $\tau = 0.7$ s időkéssel és $l = 5 + 1i$ m komplex hosszal. A fekete vonal a statikus D-görbe $\lambda = 0$ esetén, a piros és kék vonalak pedig a dinamikus D-görbék $\omega > 0$ és $\omega < 0$ esetén.

6. Kritikus hossz és időkésés

Szabályozási feladatok során a szabályozó időkésése határt szab a rendszer stabilizálhatóságának. Inverz inga egyensúlyozása esetén egy kritikus hossz l_{crit} definiálható egy adott τ időkéséshez. Ha a rúd hossza a kritikus hossz alatt van, akkor a rendszer nem stabilizálható, mert a rúd hamarabb eldől, mint ahogy a szabályozó közbe tudna avatkozni. Ehhez hasonlóan egy kritikus időkésés τ_{crit} definiálható egy adott l inga hosszhoz. Ha a szabályozó időkésése nagyobb, mint a kritikus időkésés, akkor a rendszer nem stabilizálható, ugyanezen ok miatt. Az 3. ábrán egy stabilitás diagram sorozat látható. Jól látszik, hogy a stabil tartomány mérete csökken a képzetes hossz növelésével. Ez a megfigyelés valószínűsíti, hogy a kritikus időkésés csökken, amikor az inga hossza egy komplex szám. Ugyanakkor ahogy később látható a cikkben, ez nem teljesül.

6.1. Inga valós hosszal

A kritikus hossz és kritikus időkésés a szabályozó paraméterek Taylor sorából számolható ki. Ez az összefüggés tisztán valós hossz értékű inverz ingáknál a következő:

$$\tau_{crit} = \sqrt{\frac{4l}{3g}}. \quad (16)$$

6.2. Inga komplex hosszal

A szabályozó paraméterek Taylor sora komplex hossz értékű ingánál is kiszámolható.

$$K_p(\omega) = \frac{\kappa\beta + \alpha\delta}{\kappa^2 + \delta^2} + \underbrace{\left(\frac{\kappa\alpha\tau - \beta\delta\tau}{\kappa^2 + \delta^2}\right)}_{C_1} \omega + \underbrace{\left(\frac{-\frac{1}{2}\alpha\delta\tau^2 + \delta - \frac{1}{2}\kappa\beta\tau^2}{\kappa^2 + \delta^2}\right)}_{C_2} \omega^2 + \dots \quad (17)$$

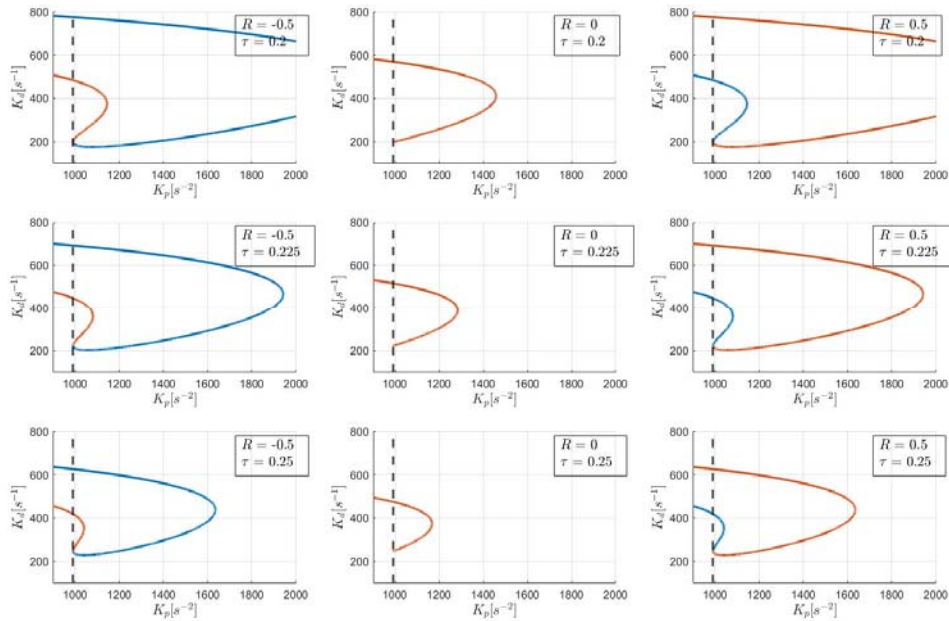
Az első domináns rész a lineáris, azonban itt a C_1 együttható zérus. A másik domináns rész a négyzetes, a C_2 -es együtthatóval. Ebből a kritikus időkésés és a kritikus hossz kiszámolható.

$$C_2 \Rightarrow \frac{\delta}{\kappa^2 + \delta^2} = \frac{-\frac{1}{2}\alpha\delta - \frac{1}{2}\kappa\beta}{\kappa^2 + \delta^2} \tau_{crit}^2 \quad (18)$$

A szimbolikus inga paraméterek behelyettesíthetők, az $l = L + Ri$ inga hossz használatával. Így a következő összefüggés számolható ki:

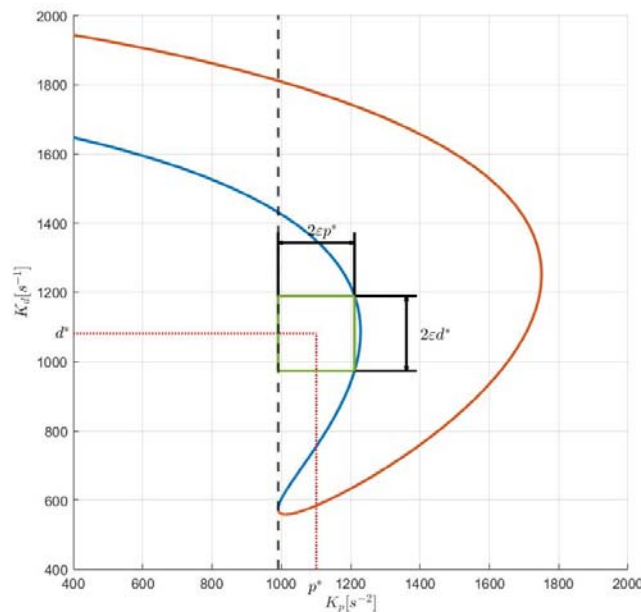
$$\tau_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{cL_{\text{crit}}}{3g}} \quad (19)$$

A meglepő eredmény, hogy a kritikus időkézés független a képzetes R hosszától. Ez azt jelenti, hogy a kritikus időkézést nem befolyásolja, ha a rúd hosszat kiegészítjük egy képzetes résszel. Ugyanakkor a 3. ábrán látszik, hogy a stabil tartomány mérete csökken, a képzetes hosszt növelve. Ez azt feltételezi, hogy valami-féle robusztus kritikus időkézés függ a képzetes hossz nagyságától. Ez a kritikus időkézés definiálható alapul véve a legnagyobb négyzetet, ami teljesen belefér a stabil tartományba.



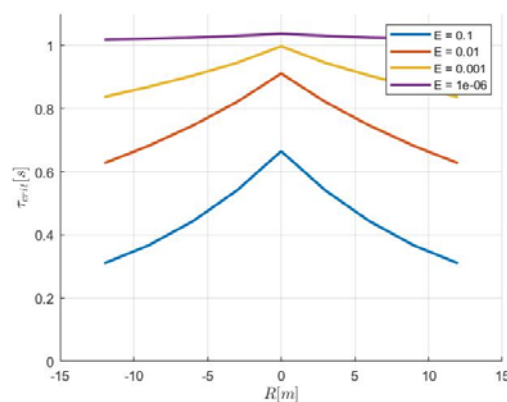
3. ábra. Stabilitás diagramjai egy inverz ingának késleltetett PD szabályozóval, $L = 8$ m-es valós hosszal, különböző időkézésekkel és képzetes hosszokkal.

7. Robosztus kritikus időkézés



4. ábra. Stabilitás diagramjai egy inverz ingának késleltetett PD szabályozóval, $L = 8 + 2i$ m-es hosszal és 10%-os, tehát $\epsilon = 0.1$ -es toleranciával. Ez az az iterációs lépés, amikor a tolerancia négyzetépphogy belefér a belső D-görcbébe. Ebben az esetben a kritikus időkézés $\tau_{\text{crit}} = 0.58$ s.

Valós hossz értékű ingánál az időkésés növelése a stabil tartomány méretének csökkenésével jár. Mint ahogy az látszik az előző fejezetből, a kritikus időkésés értéke csak a valós inga hosszától függ, a képzetestől nem. Ugyanakkor a 3. ábrából látszik, hogy a képzetes hossz befolyásolja a stabil tartomány méretét. Ez azt jelenti, hogy a rendszer robusztussága csökken, a képzetes hossz növelésével. Amikor a stabil tartomány kicsi, akkor az embernek nehezebb egyensúlyoznia, mert nehezebb kiválasztani a megfelelő arányos és differenciáló szabályozó paramétereket. Tehát csökken a stabilizálhatóság, ami alatt azt értjük, hogy milyen nehéz stabil helyzetben tartani az inverz ingát. A csökkenő robusztusság vizsgálható az ε változó bevezetésével, ami egy mérőszáma a rendszer toleranciájának [4]. A p^* és d^* paraméterek a stabil tartomány közepén találhatóak. Ezekkel a paraméterekkel egyenesen arányosan egy négyzet rajzolható a stabil tartományba $2\varepsilon p^*$ és $2\varepsilon d^*$ méretű oldalhosszokkal, ahogy az 4. ábrán látható. Egy adott rúdhosszra és toleranciára a kritikus időkésés kiszámolható, egyre kisebb időkésés értékekkel iterálva. A kritikus időkésés az az időkésés érték lesz, amikor a négyzet épphogy befér a stabil tartományba és a következő τ időkéséssel számolva, már nem fér bele. Az 5. ábrán a kritikus időkésések láthatóak, mint a képzetes hossz függvényei, különböző ε toleranciákra. Látható, hogy ahogy csökken a tolerancia, a τ_{crit} kritikus időkésés egy vízszintes vonalhoz közelít. Ez azzal magyarázható, hogy ahogy a tolerancia nullához közelít, a négyzet egy ponttá szűkül össze, így ebben az esetben a stabil tartomány tolerancia nélkül van vizsgálva és tolerancia nélkül a kritikus időkésés nem függ a képzetes hossz nagyságától.



5. ábra. Kritikus időkésés, mint a képzetes hossz függvénye, különböző ε tolerancia értékekkel. Az inga valós hossza $L = 8$ m.

8. Összefoglalás

Összefoglalásként kijelenthető, hogy az inverz inga hosszát kiegészítve egy képzetes hosszal, a stabilitás diagram stabil tartományának mérete csökken. Tehát növekvő robusztussággal csökken a rendszer kritikus időkésése. Azonban a stabil tartomány eltűnését nem befolyásolja a képzetes hossz.

9. Irodalmi hivatkozások

- [1] Kovacs BA, Milton J, and Insperger T. *Virtual stick balancing: sensorimotor uncertainties related to angular displacement and velocity*. Royal Society Open Science, 6:191006, 2019.
- [2] Insperger T. Egyensúlyozás dinamikája (dynamics of balancing), előadás jegyzet. 2021.
- [3] Insperger T and Stépán G. *Semi-discretization for time-delay systems – Stability and Engineering Applications, Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2011.
- [4] Insperger T and Milton J. *Delay and uncertainty in human balancing tasks, Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences*. Springer, Cham, 2021.
- [5] Sae Franklin, Justinas Cesonis, Raz Leib, and David W. Franklin. *Feedback delay changes the control of an inverted pendulum*. IEEE, 978:1517–1520, 2019.
- [6] BA Kovács and T Insperger. *Virtual stick balancing: skill development in newtonian and aristotelian dynamics*. Journal of the Royal Society Interface, 19:20210854, 2022.