

Energiatranszfer folyamatok hiszterézises oszcillátor láncokban

Energy transfer in hysteretic oscillator chains

LELKES János, HORVÁTH Dávid András, KALMÁR-NAGY Tamás

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Áramlástan Tanszék
H-1111 Budapest, Bertalan Lajos u. 4-6. Telefon: +36-1-463-4072, Fax: +36-1-463-3464
Honlap: www.ara.bme.hu, E-mail: lelkes.janos@gpk.bme.hu, david_horvath67@yahoo.com,
kalmar.nagy.tamas@gpk.bme.hu

Abstract

The dynamical behavior of a periodic hysteretic relay oscillator chain is investigated in this paper. The continuous-time hybrid system is transformed into a discrete map, which describes the evolution of the state variables at the transitions of the relay elements. The energy change rate, energy allocation, and evolution of the dominant states of the chain oscillator are studied using the discrete map.

Keywords: Hysteresis, hybrid system, energy distribution, discrete system

Kivonat

Ebben a cikkben egy periodikus hiszteretikus relé oszcillátorlánc dinamikai viselkedését vizsgáljuk. A folytonos idejű hibrid dinamikai rendszert egy diszkrét leképezéssé alakítjuk, amellyel leírjuk az állapotváltozók alakulását az egyes reléelemek váltásánál. A diszkrét leképezés segítségével tanulmányozzuk az oszcillátor lánc energianövekedési rátáját, energiaallokációját és domináns állapotainak alakulását.

Kulcsszavak: Hiszterézis, hibrid rendszer, energiaallokáció, diszkrét rendszer

1. Bevezetés

Az elmúlt évtizedekben, Fermi, Pasta és Ulam első numerikus vizsgálata óta, számos különböző lineáris és nemlineáris oszcillátorláncot tanulmányoztak [1]. A hiszterézis típusú nemlinearitás számos fizika, kémia, biológia és mérnöki jelenségben megjelenik [2]. A tudományban hiszterézissel találkozunk plaszticitásban, sűrűdésben, ferromágnesességben, ferroelektromosságban, szupravezetésben, adszorpcióban, deszorpcióban és alakmemóriával rendelkező anyagokban [3].

Számos tanulmány vizsgálta nemlineáris oszcillátorok dinamikáját hiszterézises blokkokkal és elasztikus rugókkal [4]. Zech és tsai. egy Ising-típusú kapcsolt gerjesztett harmonikus oszcillátor dinamikáját vizsgálta véletlenszerű mágneses mezőkben [5]. Concha és mtsai. bipoláris oszcillátorláncokat használtak egy előre definiált hiszterézis jelleggörbe tervezésére [6]. Biswas és Das tanulmányában [7] inhomogén csatolt rácsok mintázatait, bifurkációit, multistabilitását és hiszterézises viselkedését tanulmányozták. Az Ising-lánc spontán és indukált mágnesesedésére vonatkozó analitikai kifejezéseket véletlen séta izomorfizmus segítségével származtatta García a [8]-as tanulmányban. A töltött részecskék harmonikus láncának dinamikáját is vizsgálták véletlenszerű mágneses térben [9].

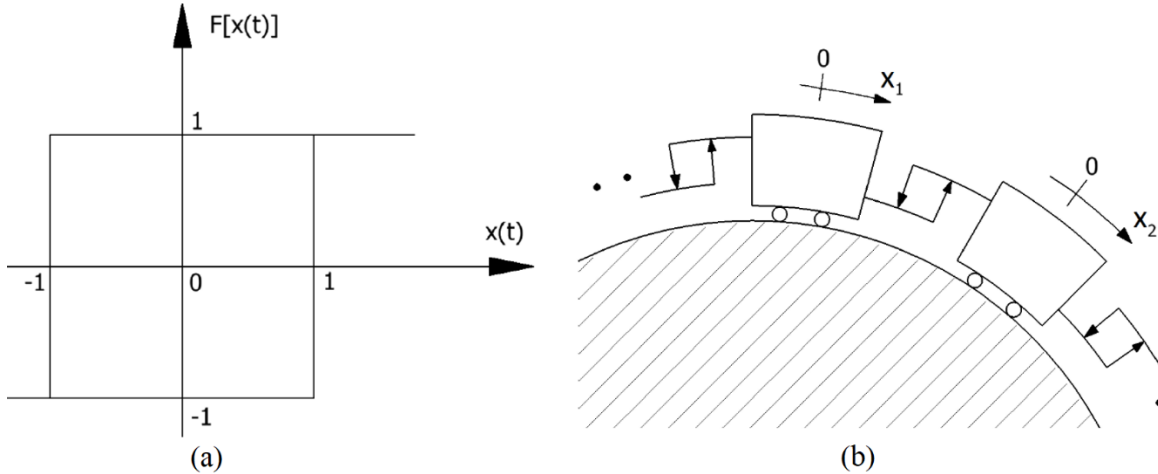
1.1. Nemideális relé matematikai leírása

Általában a reléknek két kimeneti ága van, és a relé kimenete megszakítás nélkül ugrik, amikor a bemenet meghalad egy bizonyos kritikus értéket. Ideális relénél egyetlen kritikus érték van, amelynél a kimenet nem folytonos, míg a hiszterézises relénél két ilyen kritikus bemeneti érték van. A hiszterézis úgy definiálható, mint egy rendszer állapotának a múltbéli állapotoktól való függése. Ez a jelenség többféleképpen modellezhető. A két legismertebb és leggyakrabban alkalmazott hiszterézis modell a Preisach és a Bouc-Wen modell.

Ebben a cikkben szimmetrikus elemi hiszteretikus relé operátort (hiszteront) fogunk alkalmazni. Az $F[x(t)]$ hiszteretikus relé kezelője a következőképpen van definiálva:

$$F[x(t)] = \begin{cases} -1, & x(t) \leq -1, \\ e \in \{-1,1\}, & -1 < x(t) < 1, \\ 1, & x(t) \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Ezen operátor az $x(t)$ folytonos függvény időtörténetétől függ; azaz az e diszkrét változó -1 vagy 1 , attól függően, hogy az $x(t)$ függvény balról vagy jobbról lép be a hiszterézis tartományba $(-1,1)$ (lásd 1a. ábra).



1. ábra. (a) Elemi hiszterézis hurok, (b) Oszcillátorlánc sematikus ábrája.

2. Hiszterézises lánc mozgásegyenlete

Az N szabadsági fokú (NDOF) hiszteretikus oszcillátor mozgásegyenlete (lásd 1b. ábra) a kezdeti feltételekkel együtt a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(t) + F[x_1(t) - x_N(t)] - F[x_2(t) - x_1(t)] &= 0, \\ \ddot{x}_2(t) + F[x_2(t) - x_1(t)] - F[x_3(t) - x_2(t)] &= 0, \\ &\vdots \\ \ddot{x}_{N-1}(t) + F[x_{N-1}(t) - x_{N-2}(t)] - F[x_N(t) - x_{N-1}(t)] &= 0, \\ \ddot{x}_N(t) + F[x_N(t) - x_{N-1}(t)] - F[x_1(t) - x_N(t)] &= 0, \\ x_i(0) = x_{i,0}, \quad \dot{x}_i(0) = y_{i,0}, \quad i = 1, \dots, N, \\ F[x_1(0) - x_N(0)] = s_{N,0}, \quad F[x_i(0) - x_{i-1}(0)] = s_{i-1,0} \quad i = 2, \dots, N, \\ x_{i,0} \in \mathbb{R}, \quad y_{i,0} \in \mathbb{R}, \quad s_{i,0} \in \{-1,1\}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

Az F relé operátor s kezdeti állapotát $t = 0$ -ban kell megadni, ha az operátor argumentuma a tartomány $(-1,1)$; egyébként F definíciója egyértelműen meghatározza a kezdeti állapotát.

A relé operátorokban lévő állapotváltozók számának csökkentése érdekében bevezetjük a relatív koordinátákat:

$$z_N(t) = x_1(t) - x_N(t), \quad z_{i-1}(t) = x_i(t) - x_{i-1}(t), \quad i = 2, \dots, N. \quad (3)$$

Továbbá a rendszer teljes ismeretéhez szükségünk van egy referencia koordinátára is, ami a jelen esetben a $z_R(t) = x_1(t)$. A relatív koordináták segítségével differenciálegyenlet a kezdeti feltételekkel a következő lesz

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{F}[\mathbf{z}], \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad \dot{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{F}[\mathbf{z}(0)] = \mathbf{s}_0. \quad (4)$$

ahol \mathbf{z} az állapotváltozók vektora, $\mathbf{F}[\mathbf{z}]$ relévektor és az \mathbf{A} kapcsolati mátrix. A relévektor és a kapcsolati mátrix a következő:

$$\mathbf{F}[\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} F[z_1(t)] \\ F[z_2(t)] \\ \vdots \\ F[z_N(t)] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times (N+1)}. \quad (5)$$

A (4)-es hibrid differenciálegyenletről egy diszkrét leképezést hozunk létre. Ezen leképezés az egyes váltási időpontokban határozza meg a rendszer állapotait. A (4)-es folytonos idejű rendszer a következő diszkrét leképezésként írható fel:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z}_{k+1} \\ \mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{s}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & (t_{k+1} - t_k)\mathbf{I} & (t_{k+1} - t_k)^2\mathbf{A}/2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & (t_{k+1} - t_k)\mathbf{A} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & \mathbf{Q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{v}_k \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix}, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

ahol a t_{k+1} váltásidő a következő összefüggéssel számolható:

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= \min\{T_1, T_2, \dots, T_N\}, \\ T_i &= \inf\{t \mid z_i(t) = -s_{i,k}, t_k < t\}, i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

A tranzíciós \mathbf{Q}_k mátrix, amely az egyes relé elemek állapotváltozását írja le, a következőként írható fel:

$$\mathbf{Q}_k = \text{diag}(q_1, \dots, q_N), \text{ ahol } q_i = \begin{cases} -1 & \text{ha } T_i = t_{k+1}, \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}, i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

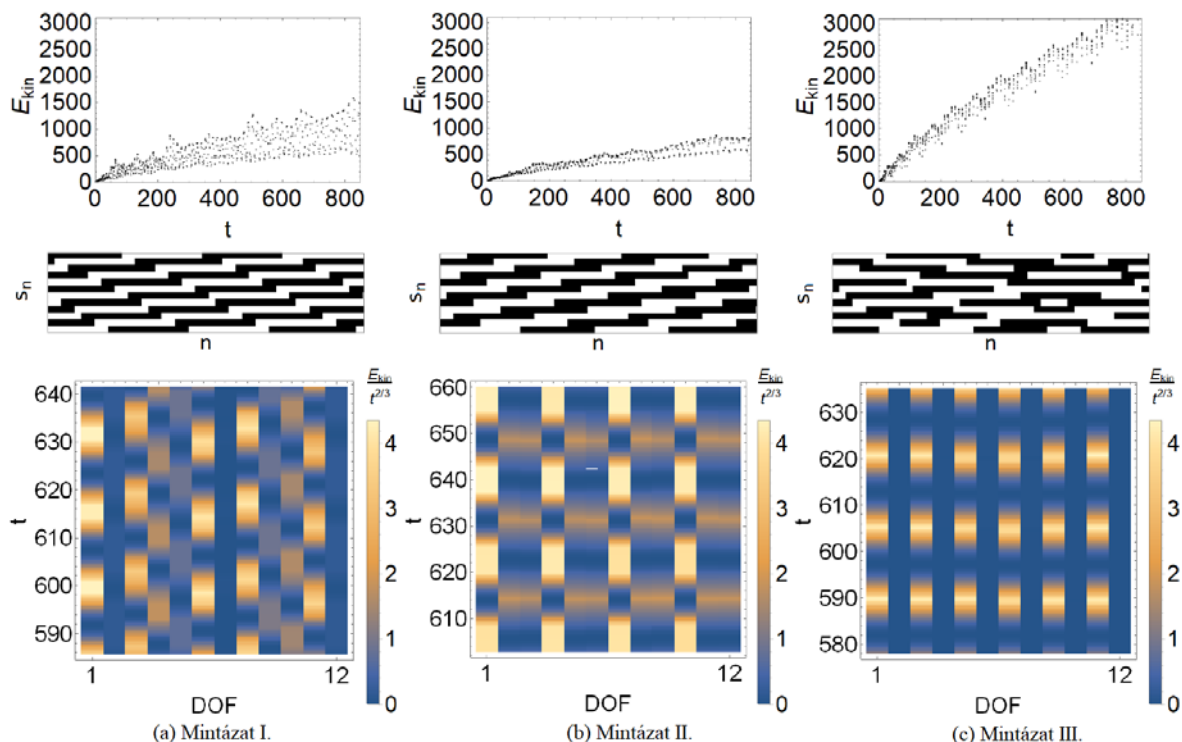
A következő fejezetben a (6)-os diszkrét leképezés segítségével fogjuk vizsgálni a rendszer dinamikai viselkedését, a lejátszódó energiátöransfer folyamatokat.

3. Energianövekedési ráta és Energiaeloszlás

Ebben a fejezetben az energiaeloszlás, a teljes energia és a domináns relé állapotok közötti kapcsolatot vizsgáljuk. A rendszer teljes kinetikus energiája a következő összefüggéssel számítható:

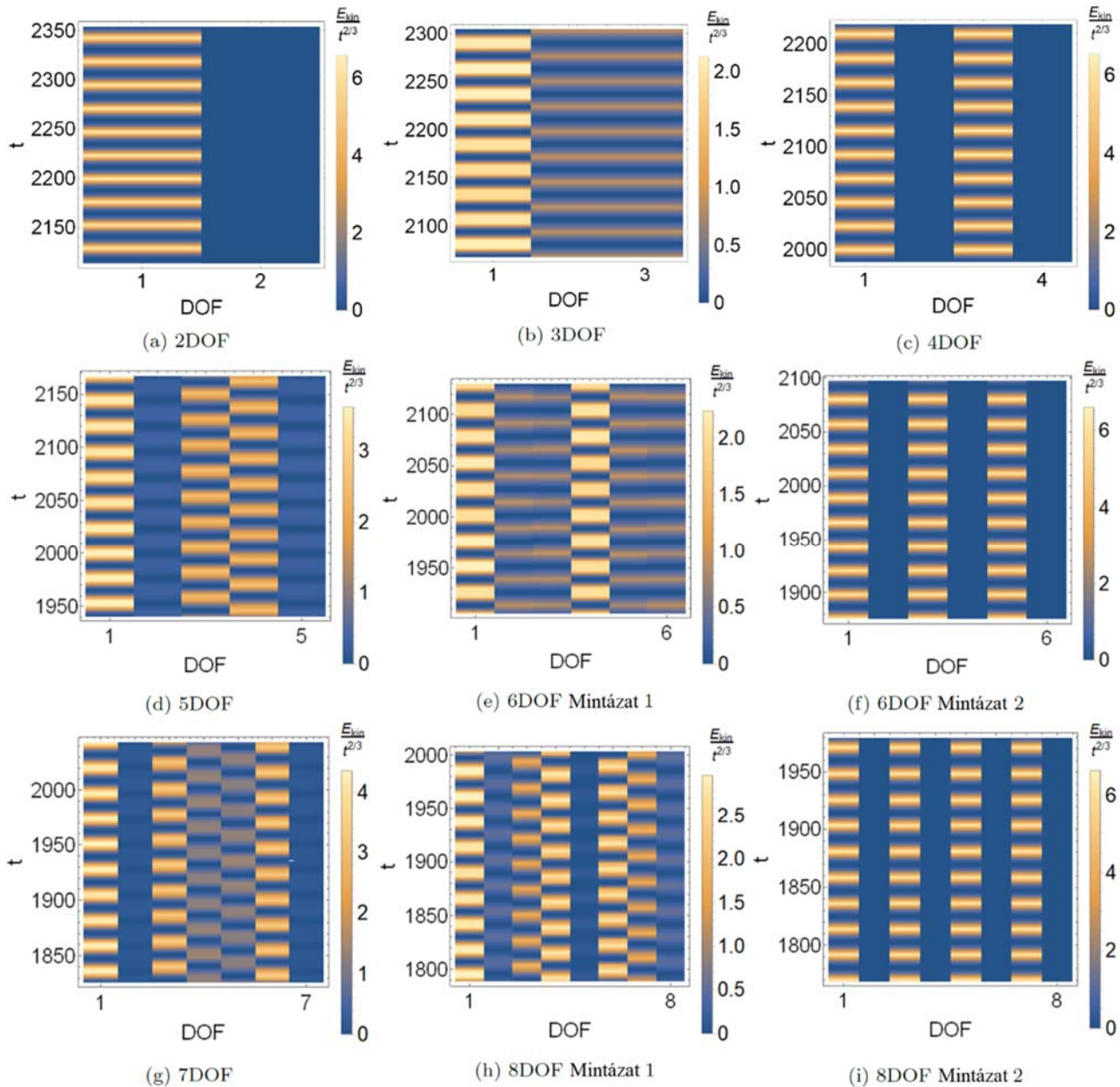
$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} \dot{z}_R(t)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^i \dot{z}_R(t) + \dot{z}_j(t) \right)^2. \quad (9)$$

Többféle összeállított és egyedi minta fordul elő a magasabb szabadsági fokú láncokhoz. A 2. ábra egy 12 szabadsági fokú (12DOF) oszcillátorlánc kinetikus energiájának alakulását szemlélteti. A kezdeti transziens rezgések után a rendszer kezdeti körülményeitől függően három különböző energiamintázat léphet fel. Egy egyedi minta (2a. ábra) és két, alacsonyabb DOF-mintákból összeállított minta (2b. és 2c. ábra) figyelhető meg. Megfigyelhető, hogy a lassabb energianövekedés szabályos reléállapotoknak felel meg, míg a gyors energianövekedést szabálytalan reléállapotok váltakozása jellemzi.



2. ábra. Összenergia, reléállapotok és energiaeloszlások kapcsolata.

Ezek után 2-8DOF láncok eloszlási mintázatait mutatjuk be a 3. ábrán. Csak egy energiamintázat fordul elő a 2-5DOF és 7DOF láncoknál, míg a 6DOF és 8DOF esetében két mintázat létezik, a kezdeti feltételektől függően. Azt is megfigyelhetjük, hogy a 6DOF lánc mintái (3e. és 3f. ábra) a 2DOF (3a. ábra) vagy a 3DOF (3b. ábra) minták ismétlődéséből alakultak ki. A 8DOF lánc esetén egy egyedi új mintázat is megfigyelhető (3h. ábra) a 2DOF ismétlődő mintázata mellett (3i. ábra).



3. ábra. Energiaeloszlás változásának mintázatai.

4. Összefoglalás

Ebben a cikkben egy hiszteretikus relé oszcillátorlánc dinamikusszelvedését vizsgáltuk. A folytonos idejű hibrid rendszert egy diszkrét leképezéssé alakítottuk, amely leírja az állapotváltozók alakulását a reléelemek átmeneteinél. A diszkrét leképezés segítségével tanulmányoztuk a láncoszcillátor energianövekedési sebességét, energiaeloszlását és domináns reléállapotainak időbeli alakulását. Megfigyeltük, hogy az alacsony szabadságfokú láncoknál a teljes kinetikus energia növekedése arányos a kapcsolási idő kétharmados hatványával. A nagy szabadságfokú láncoknál a kinetikus energia növekedése szabálytalan és erősen függ a kezdeti feltételektől. A kinetikus energia eloszlásban kezdeti tranziens ingadozás után a mozgási energia szinkronizált fluktuációja figyelhető meg. Végül a különböző jellegű energiaeloszlások, a hozzájuk tartozó relé mintázatok és a rendszer kinetikus energiájának kapcsolatát vizsgáltuk.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal K-21 137726 projektjének a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával, és a Kulturális és Innovációs Minisztérium ÚNKP-22-3-II-BME-106 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült. A bemutatott kutatás a BME-NVA-02 számú projekt részeként az Innovációs és Technológiai Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatással, a TKP2021 pályázati program finanszírozásában valósult meg.



Irodalmi hivatkozások

- [1] Lichtenberg, A. J., Livi, R., Pettini, M., & Ruffo, S. *Dynamics of Oscillator Chains*. In: Gallavotti, G. (eds) *The Fermi-Pasta-Ulam Problem. Lecture Notes in Physics*, vol 728. Springer, 2008, p. 21-121.
- [2] Mayergoyz, I. D. *Mathematical models of hysteresis and their applications*, Academic Press, 2003
- [3] Bertotti, G. *Hysteresis in magnetism: for physicists, materials scientists, and engineers*. Academic press, 1998.
- [4] Meleshenko, P. A., Tolkachev, A. V., Semenov, M. E., Perova, A. V., Barsukov, A. I., Klinskikh, A. F. *Discrete hysteretic sine-Gordon model: soliton versus hysteresis*. MATEC Web of Conferences, EDP Sciences 2018, vol. 241.
- [5] Zech, P., Otto, A., Radons, G. *Dynamics of a driven harmonic oscillator coupled to pairwise interacting Ising spins in random fields*. Physical Review E, 2021. vol. 104, iss 5.
- [6] Concha, A., Aguayo, D., Mellado, P. *Designing hysteresis with dipolar chains*. Physical Review Letters, 2018, vol. 120 (no. 15).
- [7] Biswas, S., Das, A. *Patterns, bifurcations, multistability and hysteresis in an inhomogeneous coupled map lattice*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2016, vol. 26 (no. 03)
- [8] García-Pelayo, R. *Distribution of magnetization in the finite Ising chain*. Journal of Mathematical Physics, (2009), vol. 50 (no. 1).
- [9] Cane, G., Bhat, J. M., Dhar, A., Bernardin, C. *Localization effects due to a random magnetic field on heat transport in a harmonic chain*. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2021, vol. 11.