

# Új hiperelasztikus konstitutív modell fejlesztése és implementálása végeleemes szoftverbe

## Development of a new hyperelastic constitutive model and implementation in a finite element software

*HAVASI Kristóf, PhD hallgató, Dr. KOSSA Attila, egyetemi docens*

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék,  
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3; Tel.: +36-1463-1369; fax: +36-1463-3471  
havasi@mm.bme.hu, kossa@mm.bme.hu

### Abstract

*The paper presents a new hyperelastic model, which is a combination of two previously existing models. The manuscript describes the analytical stress solutions for the model in the commonly used homogeneous loading cases. The authors perform a parameter fitting task to determine the parameters of the new model using uniaxial and equibiaxial material tests. The UHYPER and VUMAT Fortran subroutines written for the Abaqus finite element software provide the possibility to use the new hyperelastic model for general 3D geometry.*

**Keywords:** hyperelasticity, constitutive model, Abaqus, parameter-fitting, UHYPER.

### Kivonat

*A cikk egy új hiperelasztikus modellt mutat be, amelyet két korábban létező modell kombinálásával állítanak elő a szerzők. A kézirat ismerteti a modellhez tartozó analitikus feszültségmegoldásokat az általánosan alkalmazott homogén terhelési esetek során. A szerzők paraméter-illesztési feladat elvégzésével meghatározzák az új modellben szereplő paramétereket egy- és kéttengelyű anyagvizsgálatok segítségével. Az Abaqus végeleemes szoftverhez írt UHYPER és VUMAT Fortran szubrutinok lehetőséget biztosítanak arra, hogy az új hiperelasztikus modellt általános 3D geometria esetén is használhassuk.*

**Kulcsszavak:** hiperelasztikus anyagok, konstitutív modell, Abaqus, paraméter-illesztés, UHYPER.

## 1. Bevezetés

A gumyszerű alapanyagok mechanikai anyagmodellezésére a legtöbb esetben hiperelasztikus konstitutív modelleket használunk [1,2,3]. Ezek fő jellemzője, hogy tisztán rugalmas anyagi viselkedést írnak le, de ellentétben a klasszikus Hooke-törvénnyel, a feszültségi tenzor és az alakváltozási tenzor közötti kapcsolat nemlineáris. Emellett a hiperelasztikus modelleket a véges alakváltozások tartományában használjuk, ahol a kinematikai leírás során figyelembe vesszük a geometriai nemlinearitást is. A szakirodalomban számos hiperelasztikus modellt javasoltak már a kutatók, de napjainkban is rendre jelennek meg új modellek. Példaképpen említünk egy viszonylag friss folyóiratcikket [4], ahol a szerzők 85 különböző hiperelasztikus modellt hasonlítanak össze abból a szempontból, hogy milyen pontosan tudják leírni egy alapanyag mérés során rögzített nemlineáris mechanikai viselkedését. Fontos megjegyeznünk, hogy a számos rendelkezésre álló modell közül nem tudunk egyet kiválasztani, mint a „legjobb” hiperelasztikus modell. Könnyen előfordulhat, hogy egy adott modell egy bizonyos alapanyag modellezésére nagy pontossággal használható, de egy másik alapanyag esetén jelentkező nemlineáris karakterisztika leírásánál már pontatlan eredményt szolgáltat.

Jelen tanulmányban egy új hiperelasztikus modellt vezetünk be, melyet két korábbi létező modell kombinálásával állítunk elő. Az új hiperelasztikus modell esetén megadjuk a mérnöki feszültség (*engineering stress*) és a nyúlás (*stretch*) közötti nemlineáris analitikus összefüggéseket a térfogatilag összenyomhatatlan esetre a három alap terhelési mód esetén, melyek az alábbiak: egytengelyű nyújtás, kéttengelyű nyújtás, gátolt egytengelyű nyújtás. Az új hiperelasztikus modellnek egy térfogatilag összenyomható alakját is felírjuk, melynek segítségével a kis mértékű térfogati alakváltozásokat is figyelembe tudjuk venni. Szilikon lapból kivágott próbatesteken egy- és kéttengelyű húzókísérleteket végzünk el és ezáltal mérési eredményeket állítunk elő a mérnöki feszültség és a nyújtás között. Ezen mérési adatokra illesztjük az új hiperelasztikus modellt és

megadjuk a modellben szereplő paramétereket. Annak érdekében, hogy illusztráljuk az új modell pontosságát, a kapott eredményeket összehasonlítjuk a másodrendű Ogden-féle hiperelasztikus modell alkalmazásával kapott eredményekkel. Előállítjuk az új modell UHYPER és VUMAT felhasználói szubrutinjait Fortran-ban az Abaqus végeleemes szoftver számára, ezáltal lehetőségünk van tetszőleges geometria esetén végeleemes környezetben is használni az új hiperelasztikus modellt.

A térfogati alakváltozást is figyelembe vevő hiperelasztikus modelleknél az alakváltozási energiasűrűséget (potenciált) (*strain energy density*) megadhatjuk az alábbi alakban:

$$U = U_{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + U_{vol}(J), \quad (1)$$

ahol  $U_{iso}$  az alaktorzításhoz tartozó tag, míg  $U_{vol}$  a térfogati alakváltozásból keletkező alakváltozási energiasűrűség.  $J = \det \mathbf{F}$  jelöli a térfogathányadost (*volume ratio*), ahol a  $\mathbf{F}$  deformációs gradiens tenzor (*deformation gradient tensor*).  $\bar{I}_1$  és  $\bar{I}_2$  a bal- és jobboldali Cauchy-Green-féle deformációs tenzorok ( $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  és  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ ) módosított első és második fő skalár invariánsai, melyeket az alábbi formulák definiálnak:

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3} I_1 = J^{-2/3} \text{tr} \mathbf{b}, \quad (2)$$

$$\bar{I}_2 = J^{-4/3} I_2 = J^{-4/3} ((\text{tr} \mathbf{b})^2 - \text{tr}(\mathbf{b}^2))/2. \quad (3)$$

A Cauchy-féle feszültségi tenzorra adódó összefüggés [1,2,3]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left( \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) \mathbf{b} - \frac{\partial U}{\partial I_2} \mathbf{b}^2 + \frac{J}{2} \frac{\partial U}{\partial J} \mathbf{I} \right), \quad (4)$$

ahol  $\mathbf{I}$  a másodrendű egységtenzor (*second-order identity tensor*). A térfogatilag összenyomhatatlan (*incompressible*) esetre felírt alak:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left( \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) \mathbf{b} - \frac{\partial U}{\partial I_2} \mathbf{b}^2 \right) + \xi \mathbf{I}. \quad (5)$$

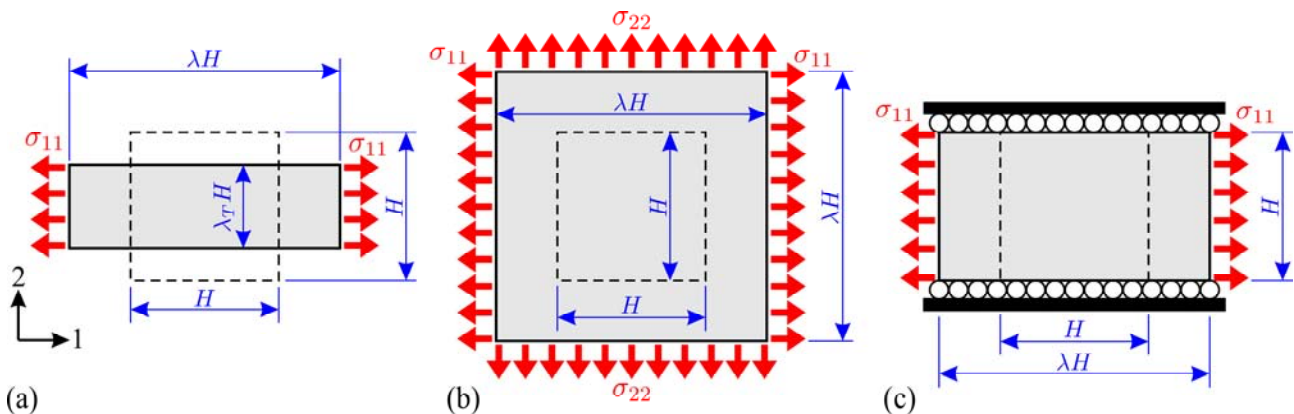
Az utóbbi esetenél az általános felírásban megjelenő  $\xi$  skalármennyiséget az alakváltozásból nem tudjuk meghatározni, ennek számítására az adott feladatnál érvényes peremfeltételeket is figyelembe kell vennünk.

A hiperelasztikus modellek paramétereinek meghatározásához leggyakrabban alkalmazott terhelési eseteket mutatja az 1. ábra. A későbbiekben U, B és P felső indexekkel jelöljük az egytengelyű, kéttengelyű és gátolt egytengelyű nyújtásokhoz kapcsolódó mennyiségeket. Ezen homogén terhelések esetén a főbb kinematikai mennyiségek a térfogatilag összenyomhatatlan esetben az alábbiak:

$$\mathbf{F}^U = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1/2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^P = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$I_1^U = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}, \quad I_1^B = 2\lambda^2 + \lambda^{-4}, \quad I_1^P = 1 + \lambda^2 + \lambda^{-2}, \quad (7)$$

$$I_2^U = \lambda^{-2} + 2\lambda, \quad I_2^B = \lambda^4 + 2\lambda^{-2}, \quad I_2^P = I_1^P. \quad (8)$$



1. ábra. Homogén terhelési esetek illusztrálása. A szaggatott vonallal a kezdeti deformálatlan alakok vannak ábrázolva. (a) Egytengelyű nyújtás (b) Kéttengelyű nyújtás (c) Gátolt egytengelyű nyújtás.

Amennyiben  $U$  alakja adott, akkor a Cauchy-féle feszültségtenzort fel tudjuk írni az (5) összefüggés segítségével. A  $\sigma_{33} = 0$  peremfeltétel alkalmazható mindhárom terhelési esetben arra, hogy az (5) általános

felírásban szereplő  $\xi$  feszültségértéket meghatározzuk és segítségével a terhelési irányban a feszültségmegoldást előállítjuk.

A térfogatilag összenyomható esetre vonatkozó összefüggések felírását jelen kéziratban a terjedelmi korlátok miatt nem közöljük. Ezen kifejezések megtalálhatóak szakkönyvekben [1,2].

## 2. Új hiperelasztikus modell bevezetése

Az új hiperelasztikus modellhez tartozó alakváltozási energiasűrűség függvényt (potenciált) két meglévő hiperelasztikus modell kombinálásával állítjuk elő. A Gent-Thomas-féle [5] és a Humphrey-Yin-féle [6] modellekhez tartozó  $U$  függvényeket összegezzük. A hiperelasztikus modellek ilyen jellegű kombinálása ismert a szakirodalomban. Példaképpen Bergström által előállított BAM-féle modellt említjük, aminél a szerző az elsőrendű Ogden-féle modellt összegzi az Arruda-Boyce-féle modellel [3]. Az új modellhez tartozó potenciálfüggvény általános alakja:

$$U = C_1(e^{C_2(\bar{I}_1-3)} - 1) + C_3(\bar{I}_1 - 3) + C_4 \ln\left(\frac{\bar{I}_2}{3}\right) + \frac{1}{D}(J - 1)^2, \quad (9)$$

ahol az utolsó tag a leggyakrabban alkalmazott formula a térfogati alakváltozásból adódó alakváltozási energiasűrűség felírására. A térfogatilag összenyomhatatlan esetben összesen négy modell paramétert tartalmaz az összefüggés:  $C_1 \dots C_4$ . A  $D$  paraméter a térfogati rugalmassággal van kapcsolatban.  $D = 0$  esetén az anyag térfogatilag összenyomhatatlan.

Az előző fejezetben bemutatott homogén terhelési esetekhez tartozó feszültségmegoldásokra a térfogatilag összenyomhatatlan esetben az alábbi összefüggések adódnak az (5) egyenlet felhasználásával:

$$\sigma^U = \frac{2(\lambda^3 - 1)}{\lambda + 2\lambda^4} \left( C_3(1 + 2\lambda^3) + C_4\lambda + C_1 C_2 e^{C_2(\lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3)}(1 + 2\lambda^3) \right), \quad (10)$$

$$\sigma^B = \frac{2(\lambda^6 - 1)}{2\lambda^4 + \lambda^{10}} \left( C_3(2 + \lambda^6) + C_4\lambda^4 + C_1 C_2 e^{C_2(2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)}(2 + \lambda^6) \right), \quad (11)$$

$$\sigma^P = \frac{2(\lambda^4 - 1)}{\lambda^2 + 1 + \lambda^4} \left( C_4 + (C_3 + C_1 C_2 e^{C_2(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)})(1 + \lambda^{-2} + \lambda^2) \right). \quad (12)$$

Ezen terhelési eseteknél a mérnöki feszültség értékeket megkapjuk, ha a Cauchy-féle feszültségre adódó megoldásokat elosztjuk  $\lambda$ -val. Fontos megjegyezni, hogy amennyiben a térfogati alakváltozást megengedjük, akkor zárt alakú feszültségmegoldásokat a modellre nem tudunk előállítani. Ezt a megállapítást egy friss folyóiratcikk igazolja a neo-Hookean-féle egyszerű hiperelasztikus anyagmodell példáján [7]. Ellenben a térfogatilag összenyomható esetben lehetőségünk adódik a modell linearizálására a kezdeti konfiguráció körül és ezáltal előállítani a kezdeti rugalmassági moduluszt ( $E_0$ , *ground-state Young's modulus*), a kezdeti térfogati rugalmassági moduluszt (*ground-state bulk modulus*) és a kezdeti Poisson-tényezőt (*ground-state Poisson's ratio*). A részletes levezetés hosszú terjedelme miatt itt most a végeredményeket közöljük:

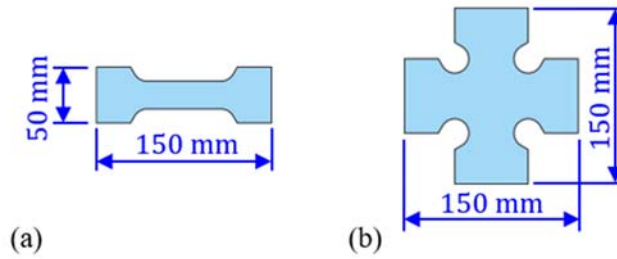
$$E_0 = 18(3C_1 C_2 + 3C_3 + C_4)/(9 + D(3C_1 C_2 + 3C_3 + C_4)), \quad (13)$$

$$K_0 = 2/D, \quad (14)$$

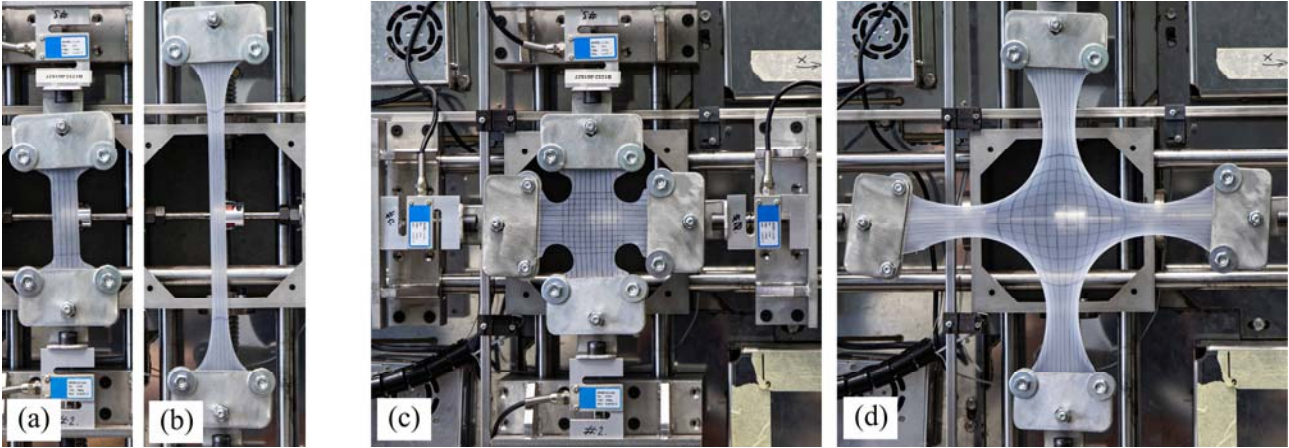
$$\nu_0 = (9 - 2D(3C_1 C_2 + 3C_3 + C_4))/(18 + 2D(3C_1 C_2 + 3C_3 + C_4)). \quad (15)$$

## 3. Mérések

Egy- és kéttengelyű húzóméréseket végeztünk 2 mm vastagságú szilikon próbatesteken. A próbatestek geometriáját a 2. ábra mutatja. A mérések elvégzéséhez a BME Műszaki Mechanikai Tanszéken fejlesztett kéttengelyes anyagvizsgáló berendezést használtuk. Az egy- és kéttengelyű mérések esetén a deformált próbatesteket a 3. ábra szemlélteti. A mérések során a terhelési sebesség 0,25 mm/s volt, aminek segítségével az anyag viszkoelasztikus viselkedésének hatását minimalizálni tudtuk. A mérések során több irányban kivágott próbatesteket is vizsgáltunk és anizotrop viselkedést nem tapasztaltunk. A húzóvizsgálatok során a terhelés irányában mért nyúlás és mérnöki feszültség értékeket rögzítettük. Gátolt egytengelyű méréseket a kutatás jelenlegi fázisában még nem végeztünk. A mérési adatokat a 4. ábrán látható szaggatott vonallal jelölt görbék mutatják.



2. ábra. Alkalmazott próbatestek befoglaló méretei. (a) Egytengelyű eset (b) Kéttengelyű eset.



3. ábra. Az egy- és kéttengelyű húzóvizsgálatokról készített fényképek. (a) és (b): egytengelyű esetben a kezdeti és a deformált próbatestek. (c) és (d): kéttengelyű esetben a kezdeti és a deformált próbatestek.

#### 4. Paraméter-illesztés

A mért adatsorokra illesztettük az új modellre kapott analitikus feszültségmegoldásokat, amiket a (10)-(12) összefüggések definiálnak. A paraméter-illesztés során az átlagos relatív hibákra (*root mean squared relative error*) kapott összefüggést minimalizáltuk. A hibafüggvény alakja ebben az esetben:

$$Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - P_i^{sim}(\lambda_i)/P_i^{exp})^2}, \quad (16)$$

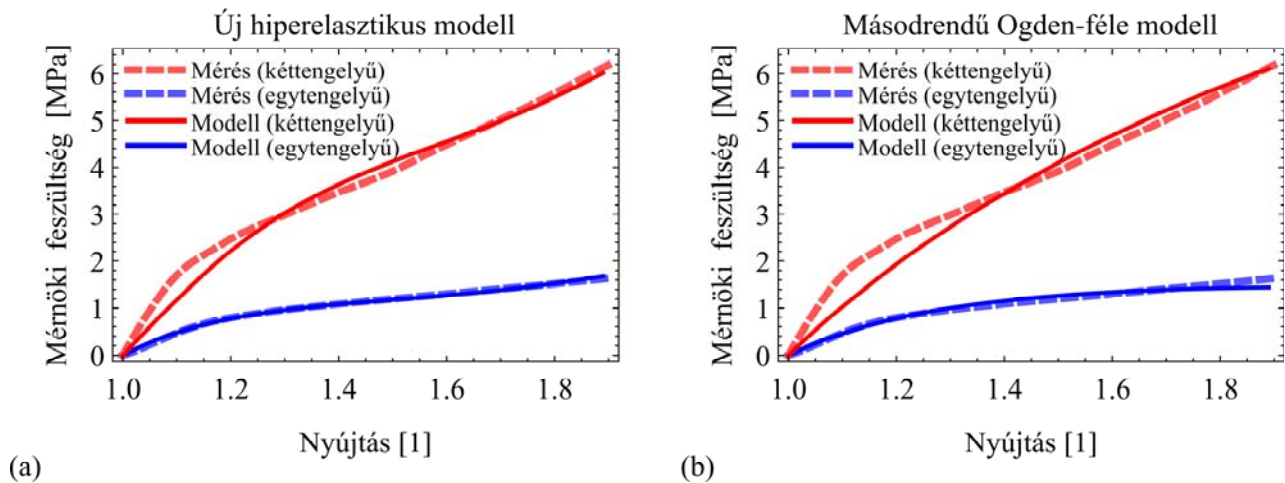
ahol  $n$  a mérési adatpontok száma,  $P_i^{exp}$  a mért mérnöki feszültség a  $\lambda_i$  helyen,  $P_i^{sim}$  pedig az ugyanezen a helyen a modellel kapott mérnöki feszültségérték. A hibafüggvény megadásánál mindkét mérési adatsort (egytengelyű és kéttengelyű) figyelembe vettük. A minimalizálási feladat elvégzéséhez a Wolfram Mathematica [8] **NMinimize** beépített függvényét használtuk. A kapott paraméterek az alábbiak:

$$C_1 = 97.997 \text{ MPa}, \quad C_2 = 0.0443, \quad C_3 = -4.641 \text{ MPa}, \quad C_4 = 3.914 \text{ MPa}. \quad (17)$$

Ezen paraméterekkel az eredő hibafüggvény értéke  $Q = 0.107$ . A modellel kapott feszültségmegoldásokat és a méréssel kapott feszültségértékeket a 4.a ábra hasonlítja össze. Megfigyelhető, hogy az egytengelyű esetben az illesztés pontossága jobb, mint a kéttengelyű esetben. Az új hiperelasztikus modell pontosságának illusztrálására a mért adatokhoz előállítottuk a másodrendű Ogden-féle modell paramétereit is. Ennél a modellnél szintén négy paraméter segítségével írjuk le az anyagi viselkedést. Az Ogden-féle modellel kapott megoldásokat mutatja a 4.b ábra. A hibafüggvény értéke  $Q = 0,127$ , a modell paraméterek pedig az alábbiak:

$$\mu_1 = 53.316 \text{ MPa}, \quad \alpha_1 = -0.2499, \quad \mu_2 = -51.484 \text{ MPa}, \quad \alpha_2 = -0.2025. \quad (18)$$

Annak ellenére, hogy az Ogden-féle modell a szerkezetéből adódóan nagy szabadságot biztosít az illesztés során, az új hiperelasztikus modell pontosabb eredményt szolgáltat ennél az alapanyagnál. Más, az Abaqus-ban [9] elérhető modellekkel történt összehasonlítás során is azt tapasztaltuk, hogy az új modell szolgáltatja a legjobb eredményt.



4. ábra. A mért és a modellekkel számított feszültségek összehasonlítása. (a) Az új hiperelasztikus modellel kapott megoldások (b) A másodrendű Ogden-féle modellel kapott megoldások.

## 5. Abaqus szubrutinok

Az új hiperelasztikus modellhez tartozó UHYPER és VUMAT Fortran szubrutinokat elkészítettük az Abaqus végelelemes szoftver számára. Az UHYPER szubrutin esetén elegendő megadni az alakváltozási energiasűrűség függvényét és annak a szoftver által kért deriváltjait, míg a VUMAT kód során a feszültségmegoldásokat is le kell programozni. A UHYPER és VUMAT szubrutinokat megírtuk mind a térfogatilag összenyomhatatlan, mind az összenyomható esetekre. A terjedelmi korlátok miatt ebben a kéziratban most csak a térfogatilag összenyomható esetre érvényes UHYPER kódot ismertetjük az 5. ábrán.

```

1 SUBROUTINE UHYPER (BI1, BI2, AJ, U, UI1, UI2, UI3, TEMP, NOEL, CMNAME,
2 INCMPFALG, NUMSTATEV, STATEV, NUMFIELDV,
3 FIELDV, FIELDVINC, NUMPROPS, PROPS)
4 INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
5 CHARACTER*80 CMNAME9
6 DIMENSION UI1 (3), UI2 (6), UI3 (6), STATEV (*), FIELDV (*),
7 FIELDVINC (*), PROPS (*)
8 PARAMETER (ZERO=0.0D0, ONE=1.0D0, TWO=2.0D0, THREE=3.0D0)
9 C1=PROPS (1)
10 C2=PROPS (2)
11 C3=PROPS (3)
12 C4=PROPS (4)
13 D1=PROPS (5)
14 U=C1*(EXP(C2*(BI1-THREE))-ONE)+C3*(BI1-THREE)+C4*LOG(BI2/THREE)
15 +(AJ-ONE)**2/D1
16 UI1 (1)=C1*C2*EXP(C2*(BI1-THREE))+C3
17 UI1 (2)=C4/BI2
18 UI1 (3)=TWO*(AJ-ONE)/D1
19 UI2 (1)=C1*C2*C2*EXP(C2*(BI1-THREE))
20 UI2 (2)=-C4/BI2/BI2
21 UI2 (3)=TWO/D1
22 UI2 (4)=ZERO
23 UI2 (5)=ZERO
24 UI2 (6)=ZERO
25 UI3 (1)=ZERO
26 UI3 (2)=ZERO
27 UI3 (3)=ZERO
28 UI3 (4)=ZERO
29 UI3 (5)=ZERO
30 UI3 (6)=ZERO
31 RETURN
32 END

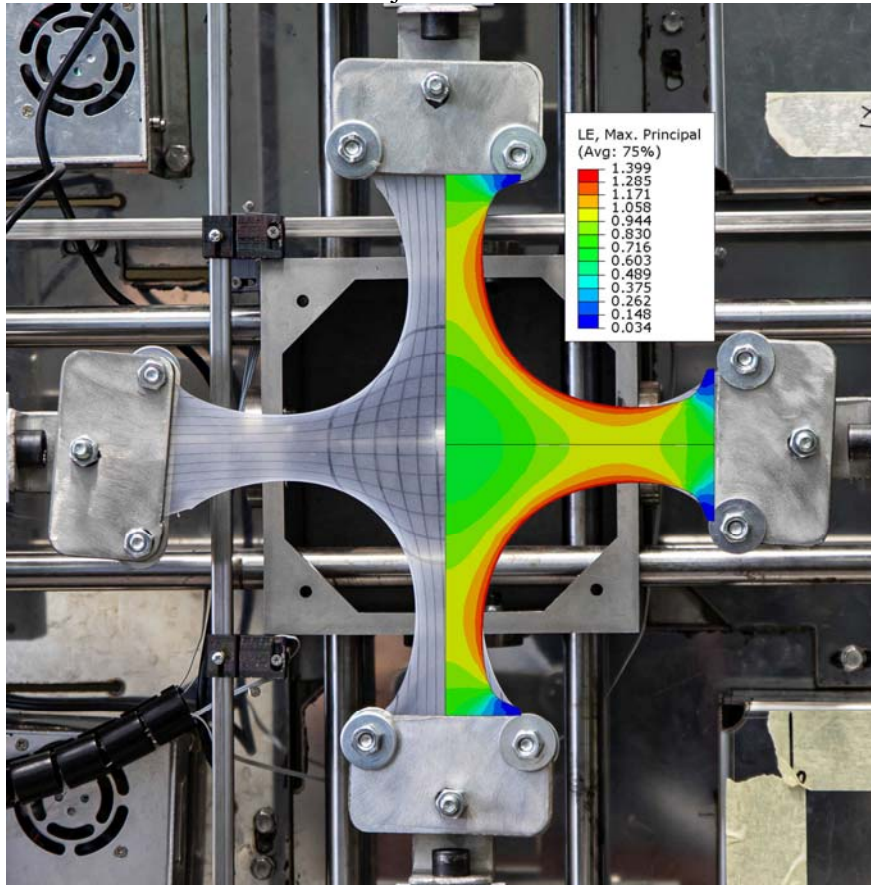
```

5. ábra. A térfogatilag összenyomható esetre írt UHYPER Fortran szubrutin az új hiperelasztikus modell esetén.

Az elkészített UHYPER kód segítségével a kéttengelyű próbatest valós geometriájának deformációját meghatároztuk. A teljes végelelemes modell leírására a terjedelmi korlátok nem adnak lehetőséget, itt most csak illusztrálás végett a deformált alakot hasonlítjuk össze a mérés során készített felvétellel a 6. ábrán. A végelelemes számítással kapott eredményből kitakartuk a próbatest felét, hogy jobban látható legyen a



mérésről készített fénykép és a modellel kapott eredmény közötti hasonlóság. A színskála a síkban ébredő maximális logaritmikus alakváltozás értékét mutatja.



6. ábra. A mérés során kapott deformáció és a VEM modellel kapott deformált alak összehasonlítása.

## Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezi ki az NKFIH FK 142457 projekt keretében kapott támogatásért. Az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-22-2-I-BME-65 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

## Irodalmi hivatkozások

- [1] Doghri I. *Mechanics of Deformable Solids*, Springer, Berlin, 2000.
- [2] Holzapfel G. *Nonlinear solid mechanics*, Wiley, New York, 2000.
- [3] Bergström J. *Mechanics of Solid Polymers*, Elsevier, Amsterdam, 2015.
- [4] He H., Zhang Q., Zhang Y., Chen J., Zhang L., Li F. *A comparative study of 85 hyperelastic constitutive models for both unfilled rubber and highly filled rubber nanocomposite material*, Nano Materials Science, Elsevier, 2022, 4(2), 64-82.
- [5] Gent A. N., Thomas A. G. *Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized rubber*, Journal of Polymer Science, Wiley, 1958, 28(118), 625-628.
- [6] Humphrey J. D., Yin F. C. P. *On Constitutive Relations and Finite Deformations of Passive Cardiac Tissue: I. A Pseudostrain-Energy Function*, Journal of Biomechanical Engineering, ASME, 1987, 109(4), 298-307.
- [7] Kossa A., Valentine M. T., McMeeking R. M. *Analysis of the compressible, isotropic, neo-Hookean hyperelastic model*, Meccanica, Springer, 2023, 58, 217-232.
- [8] Wolfram Mathematica 12.0-ás verzió. [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com).
- [9] Dassault Systèmes Abaqus 2020-as verzió. <https://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>.