

A virtuális teljesítmény elvének alkalmazása többtestdinamikai szimulációkban

Application of the principle of Virtual Power in Multibody dynamics simulations

Dr. habil. FEKETE Gusztáv¹, egyetemi docens, Prof. Dr. habil. BÍRÓ István², egyetemi tanár, Dr. JÁNOSI Endre¹, egyetemi docens

¹Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar, Savaria Műszaki Intézet
H-9700 Szombathely Károlyi Gáspár tér 4.

tel: +36-94-504-460, E-mail: fg@inf.elte.hu, Website: smi.inf.elte.hu

²Szegedi Tudományegyetem, Mérnöki Kar, Műszaki Intézet
H-6724 Szeged, Mars Tér 7.

Abstract

In the mechanical engineering course of Eötvös Loránd University, undergraduate mechanical engineering students study applied mechanics for six semesters. In the last semester, the Multibody Dynamics subject is given, which includes mechanical modeling and the numerical solution of the derived equations of motion. The numerical solution is carried out by the help of mathematical programs and a multibody dynamics software. In this article, an example will be shown to demonstrate the benefits of using the principle of Virtual Power in mechanical modeling. In addition to the derivation of the equations of motion, one of the approximate methods, which is studied and applied during the semester, is also presented.

Keywords: Principle of Virtual Power, multibody dynamics simulation, numerical solution.

Kivonat

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem gépészmérnöki szakán, egyedülálló módon, hat féléven keresztül tanulnak alkalmazott mechanikát az alapszakos gépészmérnök hallgatók. A hallgatók az utolsó szemeszterben tanulják a Többtestdinamikai modellezés című tárgyat, amely magába foglalja a mechanikai modellalkotást, valamint a modellekből levezetett mozgásegyenletek numerikus megoldását. Ez utóbbit matematikai programrendszerek és egy többtestdinamikai szoftver segítségével. Ebben a cikkben bemutatjuk egy mechanikai példán keresztül, hogy milyen előnyöket kínál a Virtuális teljesítmény elvének alkalmazása a mechanikai modellezésben. A mozgásegyenletek levezetése mellett bemutatásra kerül egy közelítő módszer is, amelynek alkalmazását a hallgatók a szemeszter során sajátítják el.

Kulcsszavak: Virtuális teljesítmény elve, többtestdinamikai modellezés, numerikus megoldás.

1. Bevezetés

Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen oktatott „Többtestdinamikai modellezések” című tárgy elsődleges célja az volt, hogy a hallgatók képesek legyenek rutinszerűen egy többtestdinamikai szoftver segítségével, dinamikai rendszereket létrehozni és elemezni. Az évek során a kezdeti célok bővültek, és a számítógépes megvalósítás mellett nagyobb hangsúly került a mechanikai modellezésre, a modellből levezetett differenciálegyenlet-rendszer numerikus megoldására, és a közelítő módszerek megismerésére.

Felvetődhet a kérdés, hogy a Többtestdinamika vajon nem csupán a Dinamika bővített kiadása? Igaz, hogy a két tárgyban sok közös rész van, ám legalább annyi új, eddig ismeretlen elem is.

A Dinamika adja az alapegyenleteket (Impulzus- és Perdülettel), amelyek a Többtestdinamikában kiegészülnek az úgynevezett kényszeregyenletekkel. A Dinamikában megtanulják a hallgatók, hogyan miként hozhatnak létre mechanikai rendszerek alapján differenciálegyenleteket, majd megismerik azok linearizált változatait és analitikus megoldásait.

A Többszintűdinamikában új leírási módokat ismernek meg, és megtanulják, hogyan lehet a lineáris és nemlineáris differenciálegyenleteket megoldani numerikus módszerekkel.

Ebben a cikkben, azt mutatjuk be, hogy miként lehet a Virtuális Teljesítmény elvével síkbeli, holonom, kötött (amelyeknek tagjai egymással és a környezettel kényszerek és támaszok révén kapcsolódnak) mechanikai rendszereket modellezni és megoldani. Elemzéseink során tisztán geometriai típusú kényszerek alkalmazunk, a levezetett matematikai modelleket pedig eredeti, nemlineáris formájukban oldjuk meg.

2. Anyag és módszer

2.1 Elméleti háttér

A virtuális teljesítmény elvének megismeréséhez induljunk ki először a D'Alembert elvből [1]. A D'Alembert elv kimondja, hogy egy kinetikai probléma formálisan visszavezethető statikai problémára, ha a külső (aktív vagy valóságos) erőkhöz hozzáadjuk a tehetetlenségi erőket ($-m \cdot \mathbf{a}_s$) és nyomatékokat ($-\mathbf{J}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_s \cdot \boldsymbol{\omega})$).

Tételezzünk fel egy szabad dinamikai rendszert, amelyre csak külső erők (\mathbf{F}_s) és nyomatékok (\mathbf{M}_s) hatnak, majd alakítsuk át a dinamikai egyenleteinket úgy, hogy átvisszük az ún. tehetetlenségi erőket és nyomatékokat a külső erők és nyomatékok mellé:

$$\dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{F}_s \quad (1)$$

$$m \cdot \mathbf{a}_s = \mathbf{F}_s$$

$$\mathbf{0} = -m \cdot \mathbf{a}_s + \mathbf{F}_s$$

$$\dot{\mathbf{I}}_s = \mathbf{M}_s \quad (2)$$

$$\mathbf{J}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_s \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}_s$$

$$\mathbf{0} = -\mathbf{J}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_s \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}_s$$

Ezekből az egyenletekből tudjuk képezni az ún. Newton-Euler egyenletet:

$$\mathbf{0} = - \begin{bmatrix} m \cdot \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_s \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_s \cdot \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{M}_s \end{bmatrix} \quad (3)$$

Alakítsuk át (3)-at kompakt alakra:

$$\mathbf{0} = -\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f} \quad (4)$$

ahol \mathbf{M} a tömegmátrix, $\ddot{\mathbf{x}}$ a keresett gyorsulások vektora, míg \mathbf{f} a külső erők, nyomatékok és inerciális mennyiségek vektora. Ezek után az átalakított Newton-Euler egyenletet szorozzuk meg a virtuális sebességgel ($\delta\dot{\mathbf{x}}$), amellyel megkapjuk a rendszer virtuális teljesítményét (δP)!

$$\delta P = (-\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}) \cdot \delta\dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (5)$$

$$\forall \delta\dot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$$

A virtuális teljesítmény elve kimondja, hogy egy dinamikai rendszer, bármely t időpontjában, külső-, belső- és tehetetlenségi erői által végzett virtuális teljesítménye nulla, bármilyen megengedhető virtuális sebesség-állapotra [2]. Ennek az elvnek az a fizikai magyarázata, hogy amíg megfelelő virtuális sebességeket alkalmazunk, úgy a rendszer nem tud elmozdulni az adott, kényszerekkel lekötött pontokban, így teljesítményt sem tud leadni.

Rendszerünk ebben a formájában nem alkalmas egy kötött mechanikai rendszer leírására, mivel a kényszererők nem jelennek meg benne. Egészítsük ki rendszerünket a kényszererőkkel úgy, hogy a rendszer virtuális teljesítménye továbbra is zérus maradjon!

Dinamikai rendszerünk mozgását $\Phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ geometriai kényszeregyenlettel kötjük meg, amely folytonos és legalább egyszer deriválható.

Mivel súrlódásmentes, ideális kényszereket alkalmazunk, így a kényszererő a felületre (vagy ívre) merőleges. Ebből az következik, hogy a kényszererőből és a virtuális sebességből származtatott virtuális teljesítmény is zérus lesz, hiszen a virtuális sebesség a felület (vagy ív) adott pontján érintő irányú:

$$\delta P_K = \mathbf{F}_K \cdot \delta\dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (6)$$

Ahol, \mathbf{F}_K az adott pontban értelmezett kényszererővektor. Az ismeretlen nagyságú kényszererőt képezhetjük a kényszeregyenlet gradiense ($\nabla\Phi^T \equiv \mathbf{D}^T$) és a Lagrange-féle multiplikátor ($\boldsymbol{\lambda}$) szorzatából:

$$\mathbf{F}_K = \nabla\Phi^T \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{D}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (7)$$

A Lagrange-féle multiplikátor egy vektor, amely magába foglalja az ismeretlen kényszererők komponenseit (F_{Ax}, F_{Ay} , etc.). Mivel a kényszererők virtuális teljesítménye is nulla, így a (7) egyenlet hozzáadható a (5) egyenlethez, így megkapjuk a kötött mechanikai rendszer virtuális teljesítményét:

$$\delta P = (-\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f} - \mathbf{D}^T \cdot \boldsymbol{\lambda}) \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (8)$$

A Lagrange-féle multiplikátor bevezetésével a $\delta \dot{\mathbf{x}}$ virtuális sebességet tetszőlegesen választhatjuk meg. Ebből kifolyólag a (8) egyenlet a következő formára egyszerűsödik:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f} \quad (9)$$

Mivel a rendszerben megjelentek a kényszererők, így több ismeretlen van, mint egyenlet. Ha a kényszeregyenletet kétszer deriváljuk, akkor az így kapott összefüggéssel kiegészítve a (9) egyenletet, a rendszer határozottá válik. Vegyük példaként egy holonom-reonóm rendszer kényszeregyenletét:

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (10)$$

$$\dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{D}^T \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

$$\ddot{\Phi} = \mathbf{a} = \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{D}(\mathbf{x})}{dt} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$$

A (10) egyenlet második deriváltjával a rendszer határozott, az ismeretlen mennyiségek és az egyenletek egyensúlyban vannak:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}^T \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f} \quad (11)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \ddot{\mathbf{x}} = - \left(\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\gamma}$$

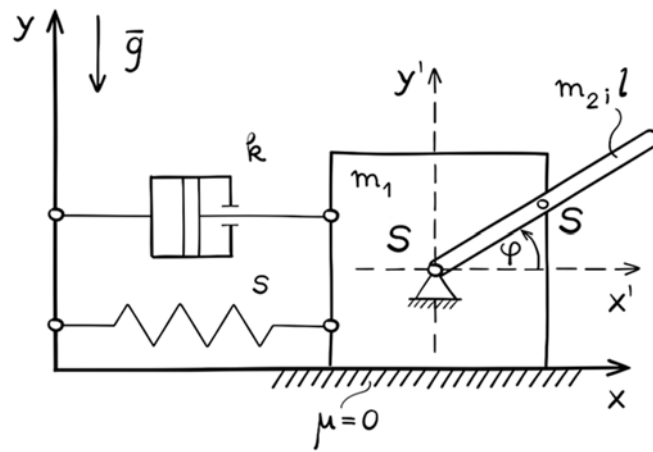
Így a végső differenciál-algebrai egyenletünk formája Flores alapján [3]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ebből az egyenletből könnyen látható, hogy amennyiben ismerjük a dinamikai rendszerünk $\Phi(\mathbf{x})$ kényszeregyenletét, úgy néhány differenciálási művelettel képesek vagyunk meghatározni, szabadtest ábrák nélkül is, a rendszert leíró differenciál-algebrai egyenletrendszerét.

2.2 Futómacska-daru mechanikai modellje

Egy futómascskára szerelt daru egyszerűsített mechanikai modelljét láthatjuk az 1. ábrán. Ha a futómascskát mozgás közben hirtelen lefékezzük, akkor rövid ideig lengeni kezd, így a daru mozgását is befolyásolja. Hozzuk létre ennek a mechanikai rendszernek a differenciál-algebrai egyenletrendszerét a virtuális teljesítmény elvének segítségével!



1. ábra: Futómacska-daru mechanikai modellje

A rendszer kétszabadságfokú, ebből következően, két kényszeregyenletre lesz szükségünk, ha az ún. abszolút koordinátákkal való leírást választjuk. Az abszolút koordinátákkal való leírás során a test súlypontjának mozgását írjuk le egy álló koordinátarendszerben:

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi \\ y_2 - \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (13)$$

A Φ vektor felhasználásával létre tudjuk hozni a dinamikai rendszer differenciál-algebrai egyenletrendszerét:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{D}^T \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (14)$$

Ahol a következő vektorokat ismerjük, vagy tudjuk közvetlenül felírni:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \cdot m_2 \cdot l^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -s \cdot \dot{x}_1 - k \cdot x_1 \\ 0 \\ -m_2 \cdot g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \varphi \end{bmatrix} \quad \text{valamint } \lambda = \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg a további tagokat (\mathbf{D} , \mathbf{D}^T , γ), kezdve a \mathbf{D} mátrixszal:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{l}{2} \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi & -\frac{l}{2} \cdot \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (16)$$

Végül határozzuk meg a γ vektort:

$$\gamma = -\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \dot{\mathbf{x}}\right) \cdot \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \\ \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Így a végeredmény a következő differenciál-algebrai egyenletrendszer lesz:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \cdot m_2 \cdot l^2 & \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi & -\frac{l}{2} \cdot \cos\varphi \\ 1 & 1 & 0 & \frac{l}{2} \cdot \sin\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{l}{2} \cdot \cos\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{\varphi} \\ F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \cdot x_1 - k \cdot \dot{x}_1 \\ 0 \\ -m_2 \cdot g \\ 0 \\ -\frac{l}{2} \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \\ -\frac{l}{2} \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

A MATLAB (vagy bármely más matematikai program) segítségével invertáljuk a teljes tömegmátrixot (amely magába foglalja a D és D^T mátrixokat), amelynek eredményeként az összes differenciál- és algebrai elemet megkapjuk.

Ezen elemekből emeljük ki az \ddot{x}_1 és $\ddot{\varphi}$ elemeket:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2m_2 l \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - 4k \cdot \dot{x}_1 - 4s \cdot x_1 + \frac{3}{2} m_2 g \cdot \sin 2\varphi}{4m_1 + m_2 + 3m_2 \cdot \cos\varphi^2} \\ \frac{3m_2 l \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + 6 \cdot \sin\varphi \cdot (s x_1 + k \dot{x}_1) - 6g \cdot \cos\varphi \cdot (m_1 + m_2)}{4m_1 l + m_2 l + 3m_2 l \cdot \cos\varphi^2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

2.3 Futómacska-daru numerikus megoldása

Oldjunk meg az (19)-ben kapott másodrendű differenciálegyenlet-rendszert! Ezt a másodrendű differenciálegyenlet-rendszert vissza lehet vezetni négy darab elsőrendű egyenletre, így megoldható például a másodrendű Runge-Kutta módszerrel [4] (továbbiakban RK-2):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 & &= f_1 & (20) \\ \dot{y}_2 &= \frac{-2m_2 l \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - 4k \cdot \dot{x}_1 - 4s \cdot x_1 + \frac{3}{2} m_2 g \cdot \sin 2\varphi}{4 \cdot m_1 + m_2 + 3 \cdot m_2 \cdot \cos\varphi^2} & &= f_2 \\ \dot{y}_3 &= y_4 & &= f_2 \\ \dot{y}_4 &= \frac{3m_2 l \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + 6 \cdot \sin\varphi \cdot (s \cdot x_1 + k \cdot \dot{x}_1) - 6g \cdot \cos\varphi \cdot (m_1 + m_2)}{4 \cdot m_1 \cdot l + m_2 \cdot l + 3 \cdot m_2 \cdot l \cdot \cos\varphi^2} & &= f_4 \end{aligned}$$

Az RK-2 módszer esetén a numerikus számítás a következőképpen végezhető el:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{10} + \frac{1}{2} \cdot (k_{11} + k_{12}) \\ y_2 &= y_{20} + \frac{1}{2} \cdot (k_{21} + k_{22}) \\ y_3 &= y_{30} + \frac{1}{2} \cdot (k_{31} + k_{32}) \\ y_4 &= y_{40} + \frac{1}{2} \cdot (k_{41} + k_{42}) \end{aligned} \quad (21)$$

Ahol,

$$\begin{aligned} k_{11} &= h \cdot f_1(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ k_{21} &= h \cdot f_2(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ k_{31} &= h \cdot f_3(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ k_{41} &= h \cdot f_4(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} k_{12} &= h \cdot f_1(y_1 + k_{11}, y_2 + k_{21}, y_3 + k_{31}, y_4 + k_{41}) \\ k_{22} &= h \cdot f_2(y_1 + k_{11}, y_2 + k_{21}, y_3 + k_{31}, y_4 + k_{41}) \\ k_{32} &= h \cdot f_3(y_1 + k_{11}, y_2 + k_{21}, y_3 + k_{31}, y_4 + k_{41}) \\ k_{42} &= h \cdot f_4(y_1 + k_{11}, y_2 + k_{21}, y_3 + k_{31}, y_4 + k_{41}) \end{aligned}$$

Az ismert és hatékony RK-2 módszer mellett oldjuk meg a differenciálegyenlet-rendszert az ún. Euler-Cromer módszerrel is [5] (másik nevén „fél-implicit Euler módszer” vagy „Newton–Størmer–Verlet módszer”)! Az Euler-Cromer módszer a következőképpen értelmezhető másodrendű differenciálegyenletekre. Legyen,

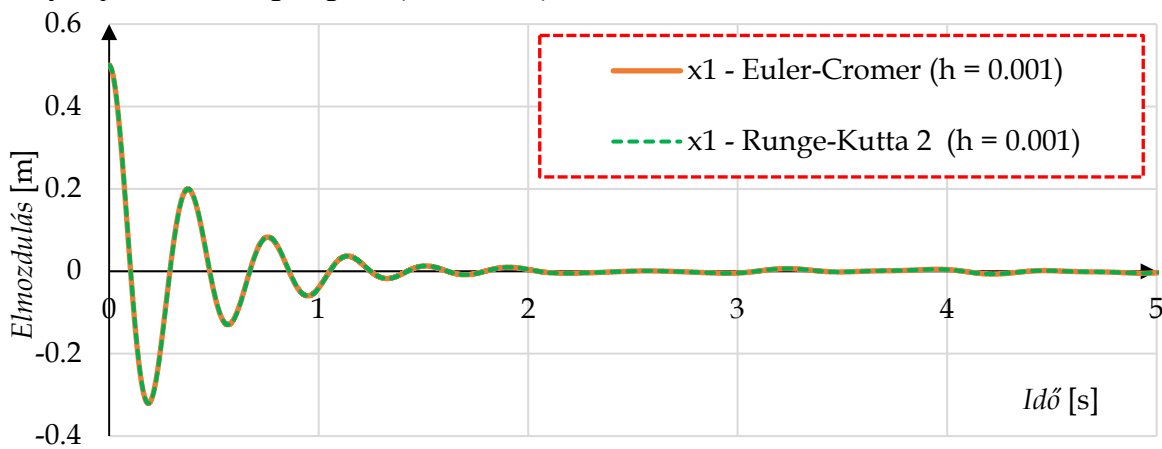
$$\begin{aligned} \ddot{y} &= f(\dot{y}, y, t) \\ \dot{y} &= g(\dot{y}, y, t) \end{aligned} \tag{20}$$

Amiből az Euler-Cromer közelítés a következőképpen írható le

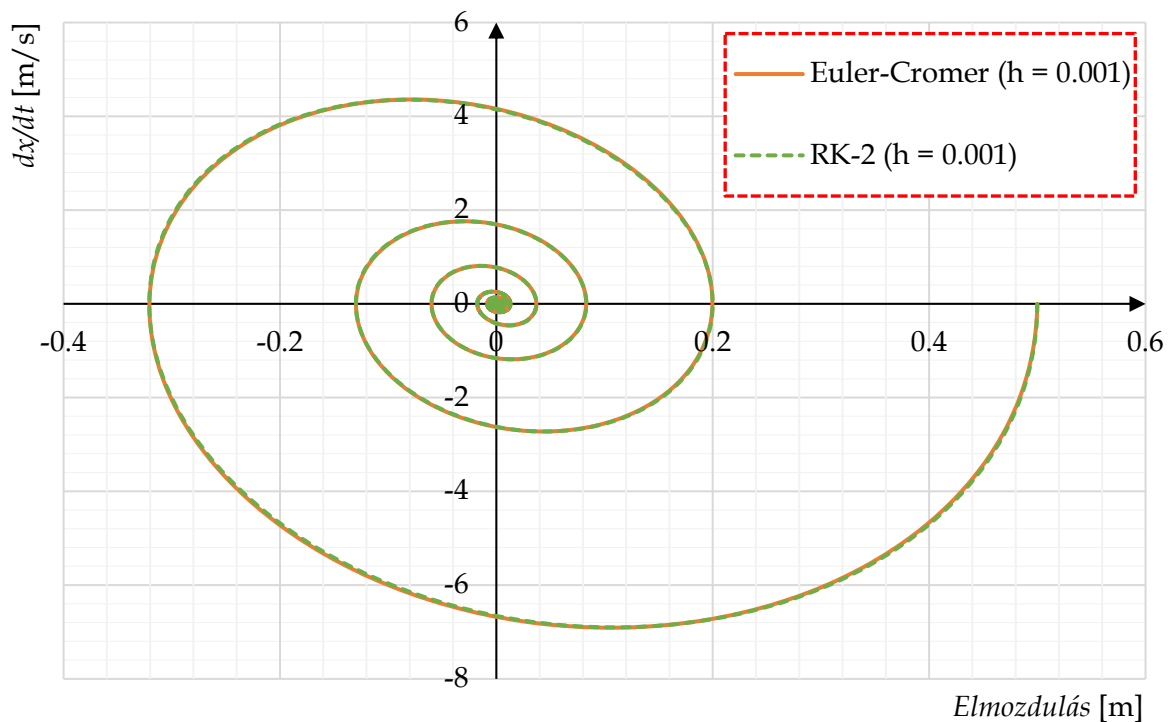
$$\begin{aligned} \ddot{y}_i &= f(\dot{y}_i, y_i, t_i) \\ \dot{y}_{i+1} &= \dot{y}_i + h \cdot f(\dot{y}_i, y_i, t_i) \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot g(\dot{y}_{i+1}, y_i, t_i) \end{aligned} \tag{21}$$

Legyenek a rendszer paraméterei a következők: $m_1 = 10$ [kg], $m_2 = 1$ [kg], $l = 1$ [m], $g = 9.81$ [m/s²], $k = 50$ [Ns/m] míg $s = 3000$ [N/m]. Legyenek a rendszer kezdeti feltételei a következők: $x_1(0) = 0.5$ [m], $\dot{x}_1(0) = 0$ [m/s], valamint $\varphi(0) = -30$ [°] (-0.5235 rad), $\dot{\varphi}(0) = 0$ [1/s].

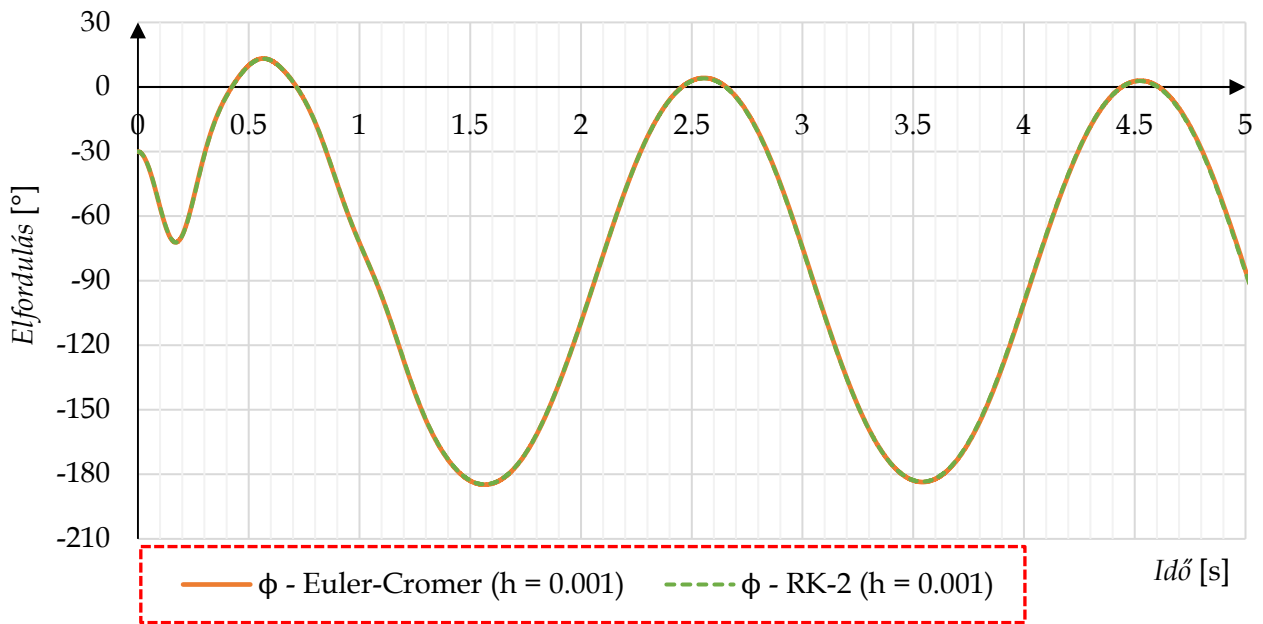
A numerikus megoldáshoz a lépésközt vegyük $h = 0.001$ -re, és végezzük el a lépéseket $t = \{0 - 5\}$ [s] tartományon pl. az Excel segítségével (2-3-4 ábrák).



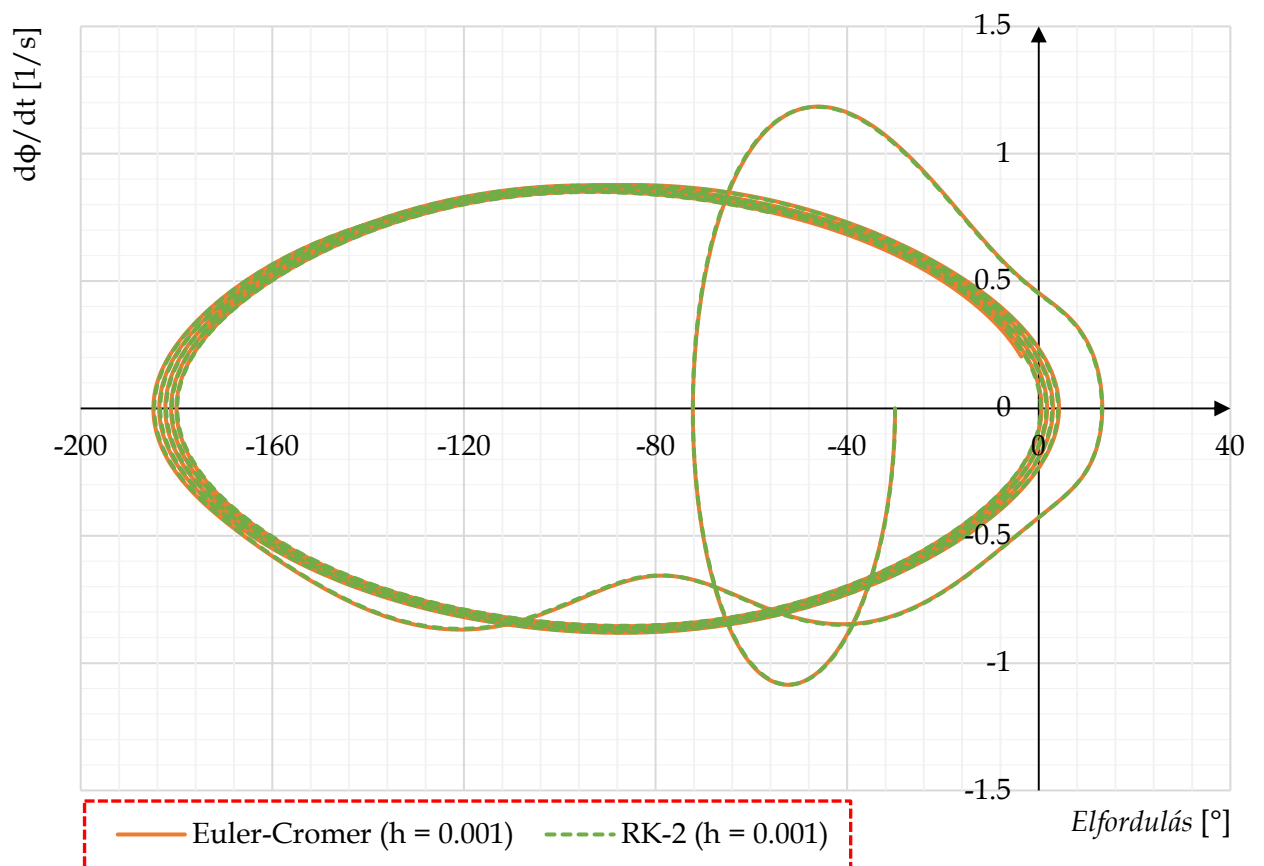
2. ábra: A futómacska elmozdulása



3. ábra: A futómacska fázisdiagramja



4. ábra: A daru elfordulása



5. ábra: A daru fázisdiagramja

3. Eredmények és következtetések

Az ábrák alapján látható, hogy az Euler-Cromer-fél közelítés segítségével roppant stabil és pontos megoldást tudunk elérni, függetlenül attól, hogy a levezetett mozgásegyenletek nemlineárisak. Emellett, az RK-2 megoldóhoz képest 70%-al kevesebb adatot kell előállítani!

A megoldásokról a következő mondható el. A futómacska fázisdiagramja láthatóan konvergál a nulla közelébe amit azonban, a daru csillapítatlan mozgása miatt, nem ér el. A daru fázisdiagramján is megfigyelhető a klasszikus csillapítatlan mozgás. Ezt kezdetben megzavarja a futómacska hirtelen megállása (a kezdeti érték megadásával), de utána a fázisdiagram stabil mozgást mutat.

Az explicit megoldó, egyszerűségéből adódóan, nem igényel összetett programozást, így egy egyszerű Excel-táblában meg lehet oldani lépésről-lépésre bármilyen összetett differenciálegyenletet vagy egyenletrendszert.

A megoldás mellett fontos kiemelni, hogy a Virtuális teljesítmény elvének segítségével mindössze néhány egyszerű parciális deriválással létrehozható a differenciál-algebrai egyenletrendszer, ha a kényszeregyenletvektor rendelkezésünkre áll.

4. Összefoglaló

Cikkünkben bemutattunk egy egyszerű, kétszabadságfokú többtestdinamikai probléma matematikai leírását és numerikus megoldását. A fő célunk az volt, hogy a mechanikai leírások során általánosan alkalmazott Newton-Euler egyenlet mellett, ami gyakorlatilag az Impulzus- és Perdület-tétel mátrixegyenletbe történő átírása, alternatívát kínáljunk a mechanika oktatásában a Virtuális Teljesítmény elvének többtestdinamikai alkalmazásával.

A BSc hallgatók számára a bemutatott elmélet megértése valamivel több absztrakciót és matematikai tudást igényel, azonban a problémák leírása során nem szükséges a Perdület- vagy Impulzustételt illetve a szabadtestábrákat alkalmazni. A módszer alkalmazásával dinamikai rendszerünk minden eleme a kényszeregyenletek egyszerű deriválásával létrehozható, amely a számítógépes adaptációt is megkönnyíti.

Köszönetnyilvánítás

A kutatást támogatta: Eötvös Loránd Tudományegyetem Informatikai Kara, Key R&D Program of Zhejiang Province China (2021C03130), Zhejiang Province Science Fund for Distinguished Young Scholars (R22A021199) valamint a Magyar Tudományos Akadémia Bolyai János Kutatási Ösztöndíja (BO/00047/21/6).

Irodalmi hivatkozások

- [1] M. Csizmadia Béla, Nádori Ernő. Mechanika Mérnököknek: Mozgástan. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, Magyarország, 1997.
- [2] J. L. Lagrange. Méchanique Analytique. Párizs, Franciaország, 1788.
- [3] P. Flores. Concepts and Formulations for Spatial Multibody Dynamics. Springer, International Publishing, 2015. DOI: 10.1007/978-3-319-16190-7
- [4] E. Süli, D. F. Mayers. An Introduction to Numerical Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2003. DOI: 10.1017/CBO9780511801181
- [5] A. Cromer. Stable solutions using the Euler approximation. American Journal of Physics, 49 (5), pp. 455-459, 1981. DOI: 10.1119/1.12478