

Hierarchikus rudak néhány érintkezési feladata

Some contact examples of hierarhic rods

*Dr. PÁCZELT István professor emeritus*¹, *Dr. SZABÓ Barna professor emeritus*²
*Dr. BAKSA Attila egyetemi docens*³

¹ Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-30-269-5189, paczelt@freemail.hu

² Washington University in St. Louis, USA, tel:+36-46-565-162, szabo@email.wustl.edu

³ Miskolci Egyetem, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, tel: +36-30-312-7097, attila.baksa@uni-miskolc.hu

Kivonat

A cikk röviden tárgyalja az [1]-ben bemutatott hierarchikus rúdmodellre alapozott érintkezési feladat kontakt végeelemének felépítését, továbbá prizmatikus tartók néhány érintkezési feladatának számítási eredményét mutatja be.

Kulcsszavak: hierarchikus modellezés, érintkezési feladat, végeelem módszer, rugalmasságtan

Abstract

This paper gives a brief summary of the building of the contact finite element for hierarchic rod [1], and present some numerical solution of the cantilever beam structures.

1. BEVEZETÉS

Térbeli rúd alakú testek hierarchikus modellezését [1] fogjuk elvégezni p -verziós végelemek felhasználásával. Vizsgálatainkban a lineáris rugalmasságtan elméletét alkalmazzuk. A modelleket a potenciális energia minimuma elv feltételéből vezetjük le oly módon, hogy az \mathbf{u} elmozdulásmezőt a keresztmetszetszeli és a hosszmenti lefutást jellemző függvények szorzatával közelítjük:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, s) = \mathbf{U}(x, y)\boldsymbol{\psi}(s) = \mathbf{U}(x, y)\{\mathbf{G}(s)\mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{a}\} \quad (1)$$

ahol $\mathbf{U}(x, y)$ a Pascal háromszög szerint rendezett hatványfüggvényeket (*irányfüggvények* nevezzük) tartalmazó mátrix, $\boldsymbol{\psi}(s)$ a p -verziós végeelem technika szerint közelített ún. *mezőfüggvények* tartalmazó vektor. A modellt az (x, y, s) görbevonalú koordinátarendszerben definiáljuk. Az x és az y tengelyek a keresztmetszet fő tengelyeivel esnek egybe, s a középvonal mentén mért ívhossz. Itt $\mathbf{G}(s)$, $\boldsymbol{\Phi}(s)$ approximációs mátrixok, \mathbf{q} a csomóponti általánosított elmozdulásvektor, \mathbf{a} a pótlólagos állandók vektora. Az $\mathbf{U}(x, y)$ -ba foglalt polinomok számától függően különböző hierarchiájú modellt tudunk képezni. Hat szintű modell került kifejlesztésre: $h1$ - $h6$. Mivel az elmozdulásmező szorzat alakban áll elő, így az $\boldsymbol{\varepsilon}$ alakváltozási vektor tömören az alábbi formában számolható a ∂ deriválási operátor mátrix segítségével

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, s) = \partial(\mathbf{U}(x, y)\boldsymbol{\psi}(s)) = \boldsymbol{\Gamma}(x, y) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}(s) \\ \boldsymbol{\psi}'(s) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Gamma}(x, y)\tilde{\boldsymbol{\psi}}(s) = \boldsymbol{\Gamma}(x, y) \begin{bmatrix} \mathbf{G}(s)\mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}(s)\mathbf{a} \\ \mathbf{G}'(s)\mathbf{q} + \boldsymbol{\Phi}'(s)\mathbf{a} \end{bmatrix} \quad (2)$$

A $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ feszültségi vektorral, a \mathbf{D} anyagállandók mátrixával, az alakváltozási energiához kötötten a $\tilde{\mathbf{D}} = \int_s \boldsymbol{\Gamma}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Gamma} dS$ redukált keresztmetszeti merevség mátrixhoz jutunk. Ezek után a potenciális

energia az egyváltozós feladatoknál ismert alakban jelenik meg $\Pi = \frac{1}{2} \int_s \tilde{\boldsymbol{\psi}}^T \tilde{\mathbf{D}} \tilde{\boldsymbol{\psi}} ds - W$. Itt W a külső terhelés munkája, $()'$ - az s szerinti deriválást jelöli.

2. SÚRLÓDÁS NÉLKÜLI ÉRINTKEZÉSI FELADAT FELÁLLÍTÁSA [2]

Legyen a szóbjöhető S_c érintkezési tartományon az érintkezési \mathbf{n}_c normális irányában a testek elmozdulása $u_n^{(i)}$, $i=1, 2$, g a kezdeti hézag. Érintkezés van, ha $d = u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + g = 0$ és $p_n \geq 0$, hézag vagy rés van jelen, ha $d = u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + g > 0$ és $p_n = 0$, ahol d és p_n az alakváltozás után kialakult rés, ill. az érintkezési nyomás. Látható, hogy $p_n d = 0$ feltétel a teljes S_c tartományon teljesül. Büntetőparaméteres technikával oldva meg a feladatot szükség van az ún. érintkezési büntető energia meghatározására

$$U^{kont} = \frac{1}{2} \int_{S_c} d^- c_n d^- dS_c = U^{kont} = \frac{1}{2} \int_{S_c} (u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + g) c_n (u_n^{(1)} - u_n^{(2)} + g) dS_c, \quad (3)$$

ahol $d^- \leq 0$, $c_n \gg 0$ büntetőparaméter. A normálirányú elmozdulást $u_n^{(i)} = \mathbf{n}_c \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n}^T \mathbf{u}$, $i=1, 2$ alakban képezzük. Ezzel, (1) felhasználásával $u_n^{(i)} = \mathbf{n}^T \mathbf{U}^{(i)}(x, y) (\mathbf{G}^{(i)}(s) \mathbf{q}^{(i)} + \Phi^{(i)}(s) \mathbf{a}^{(i)})$, továbbá $\mathbf{C}_n = c_n \mathbf{n}^T \mathbf{n}$ bevezetésével a büntető energia a kezdeti hézagból származó állandó tagot elhanyagolva tömör formában az alábbi alakban írható fel

$$U^{kont} = \frac{1}{2} [\mathbf{a}^T \mathbf{q}^T] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{qq} & \mathbf{C}_{qa} \\ \mathbf{C}_{aq} & \mathbf{C}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{cq} \\ \mathbf{f}_{ca} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T (\tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{q}} - 2\tilde{\mathbf{f}}), \text{ ahol } \mathbf{q}^T = [\mathbf{q}^{(1)T} \mathbf{q}^{(2)T}], \mathbf{a}^T = [\mathbf{a}^{(1)T} \mathbf{a}^{(2)T}],$$

$$\mathbf{C}_{qq} = \int_{S_c} \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{(1)T} \mathbf{U}^{(1)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{G}^{(1)} & -\mathbf{G}^{(1)T} \mathbf{U}^{(1)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{G}^{(2)} \\ -\mathbf{G}^{(2)T} \mathbf{U}^{(2)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{G}^{(1)} & \mathbf{G}^{(2)T} \mathbf{U}^{(2)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{G}^{(2)} \end{bmatrix} dS_c, \mathbf{f}_{cq} = - \int_{S_c} \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{(1)T} \mathbf{U}^{(1)T} \mathbf{n} g \\ -\mathbf{G}^{(2)T} \mathbf{U}^{(2)T} \mathbf{n} g \end{bmatrix} dS_c$$

$$\mathbf{C}_{aa} = \mathbf{C}_{qa}^T = \int_{S_c} \begin{bmatrix} \Phi^{(1)T} \mathbf{U}^{(1)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{G}^{(1)} & -\Phi^{(1)T} \mathbf{U}^{(1)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{G}^{(2)} \\ -\Phi^{(2)T} \mathbf{U}^{(2)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(1)} \mathbf{G}^{(1)} & \Phi^{(2)T} \mathbf{U}^{(2)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(2)} \mathbf{G}^{(2)} \end{bmatrix} dS_c,$$

$$\mathbf{C}_{aa} = \int_{S_c} \begin{bmatrix} \Phi^{(1)T} \mathbf{U}^{(1)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(1)} \Phi^{(1)} & -\Phi^{(1)T} \mathbf{U}^{(1)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(2)} \Phi^{(2)} \\ -\Phi^{(2)T} \mathbf{U}^{(2)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(1)} \Phi^{(1)} & \Phi^{(2)T} \mathbf{U}^{(2)T} \mathbf{C}_n \mathbf{U}^{(2)} \Phi^{(2)} \end{bmatrix} dS_c, \mathbf{f}_{ca} = - \int_{S_c} \begin{bmatrix} \Phi^{(1)T} \mathbf{U}^{(1)T} \mathbf{n} g \\ -\Phi^{(2)T} \mathbf{U}^{(2)T} \mathbf{n} g \end{bmatrix} dS_c \quad (4)$$

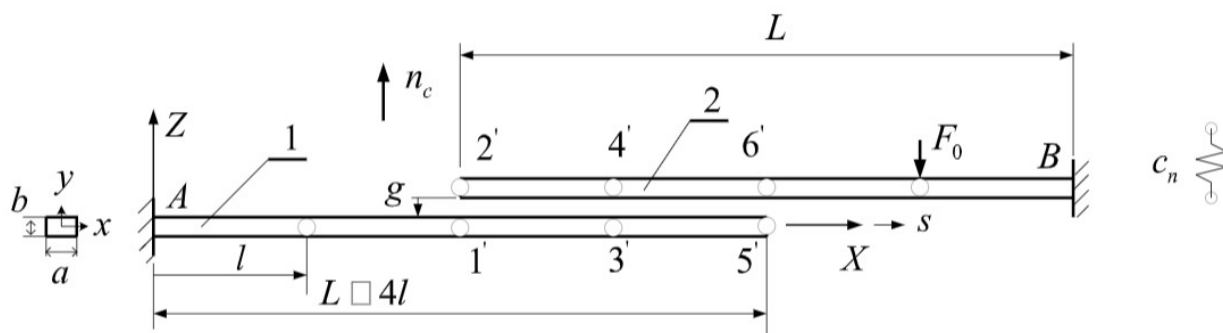
$\tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{f}}$ -ot a kontakt elem merevségi mátrixának és terhelési vektorának nevezzük. Ha $u_n^{(2)} = 0$, akkor az 1-es rúd *Winkler-típusú* ágyazásának merevségi mátrixához jutunk.

3. PRIZMATIKUS TARTÓRA VONATKOZÓ SZÁMPÉLDA

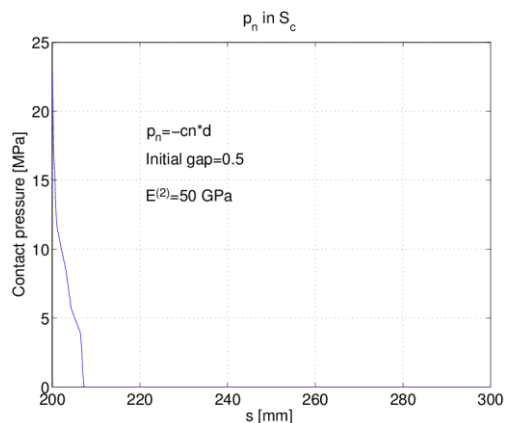
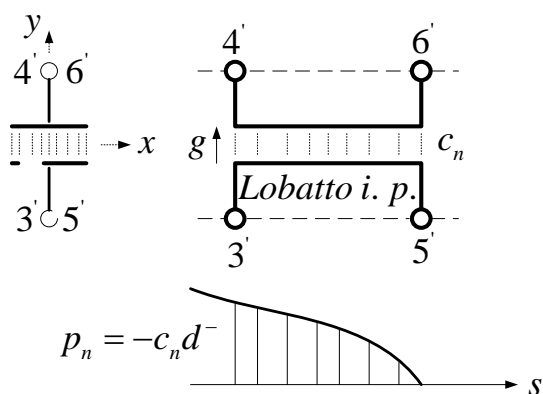
Vizsgáljuk az 1. ábrán vázolt rugalmas, prizmatikus tartókból álló szerkezetet. Geometriai méretek: $a = b = 15 \text{ mm}$, $l = 66.66 \text{ mm}$, $L = 300 \text{ mm}$. A szóbjöhető érintkezési tartomány $X \in (200 \dots 300)$. Rugalmassági tényezők: $E^{(1)} = 200 \text{ GPa}$, $E^{(2)} = 50 \text{ GPa}$, illetve 20 GPa , Poisson tényező $\nu = 0,3$

Terhelés $F_0 = 1 \text{ kN}$. A számításokat *h5*-ös hierarchikus rúdmodellel fogjuk elvégezni.

Az érintkezési feltételeket a (4)-ben szereplő formulák numerikus integrálásánál használt Lobatto pontokban ellenőrizzük le. Az X tengely mentén jobbról balra haladva jutunk el azon elem azon pontjához, ahol az először találunk negatív d értéket. Itt feltételezzük, hogy ennél az X értéknél keresztirányban az x tengely mentén végig érintkezés van. Ekkor ezt a pontot fogjuk kijelölni az elem utolsó előtti integrálási pontjának, amivel meg tudjuk határozni a jobboldali, pl. a δ' csomópont helyzetét. Újbóli számításokkal addig toljuk el az elem szélét, míg a 2. ábrán lévő helyzethez nem jutunk el. Tehát az elem teljes hosszában érintkezés van, a tőle jobbra lévőnél már hézag [2]. A 3-5. ábrák erre mutatnak be néhány példát. Az $E^{(2)} = 50 \text{ GPa}$ esetben az $3' - 4'$ csomópontok, az $E^{(2)} = 20 \text{ GPa}$ esetén a $3' - 4'$ és az $5' - 6'$ -os csomópontok mozgására került sor.

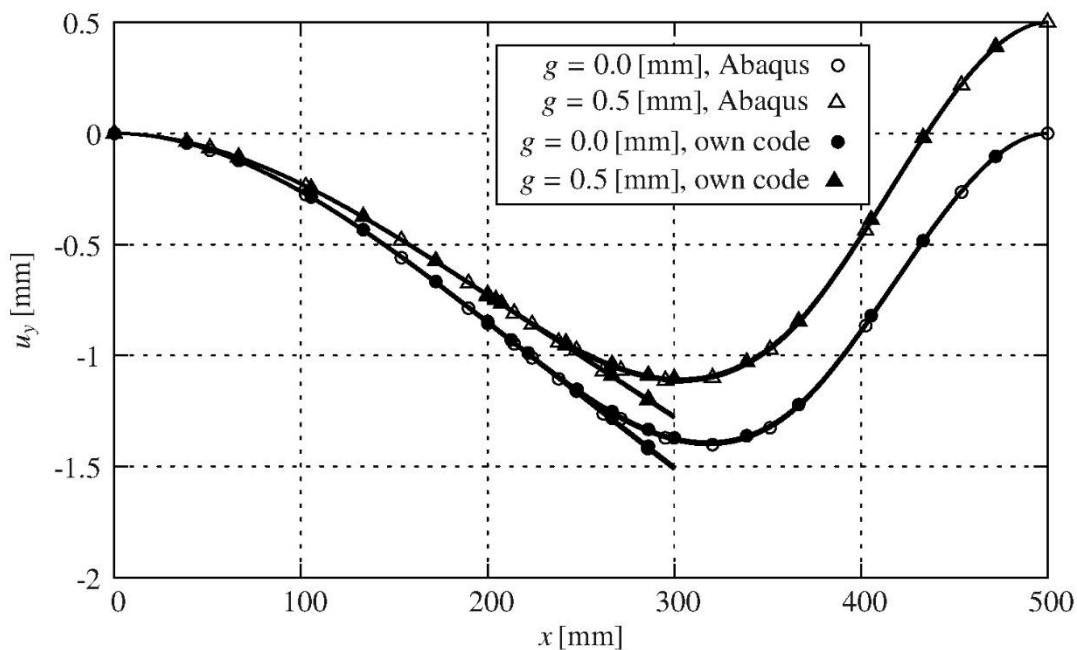


1. ábra Két prizmatikus tartó érintkezési feladata



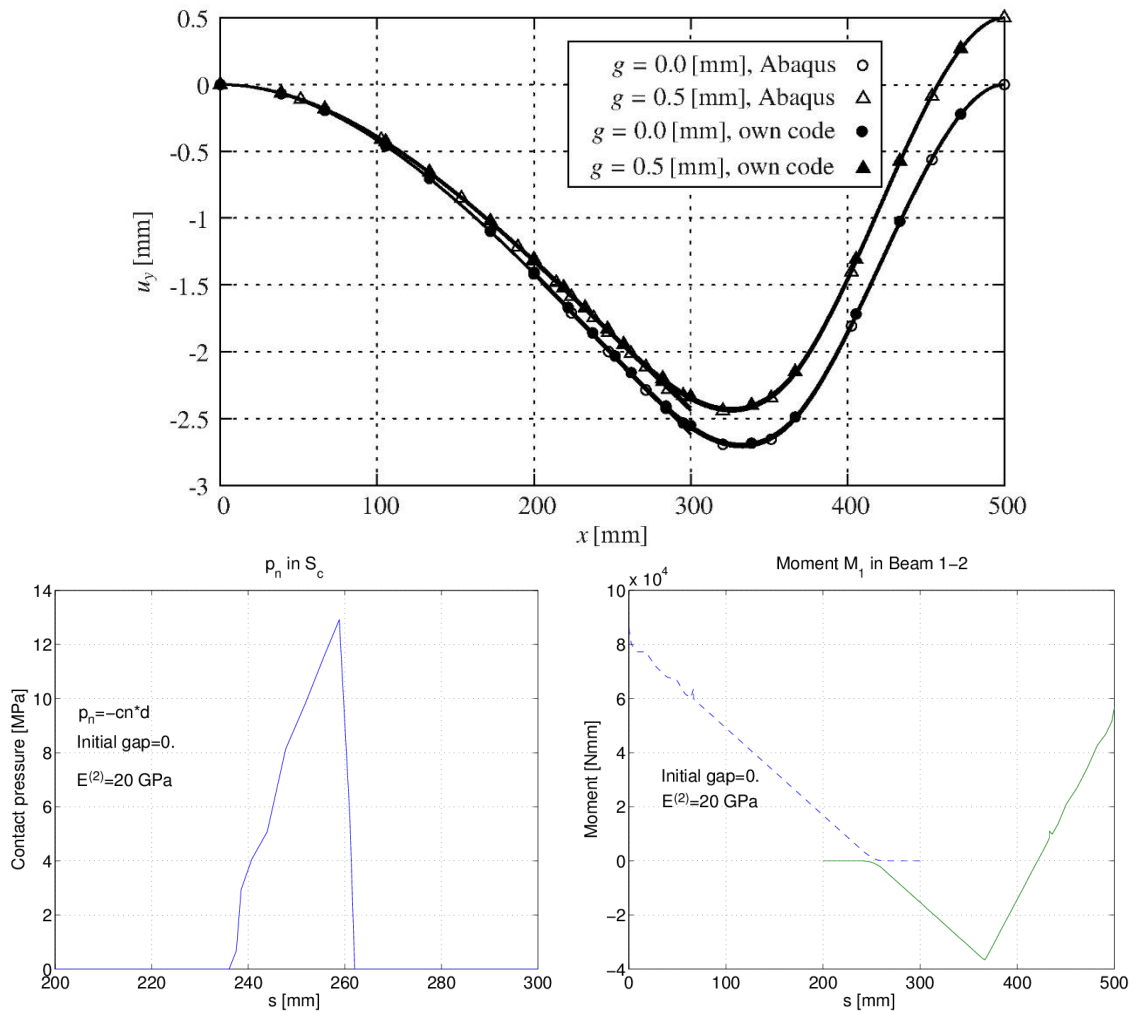
2. ábra. Kontakt elem

3. ábra Érintkezési nyomás, ha van kezdeti hézag



4. ábra A rudak lehajlása. A kontakt tartomány széle és a maximális hajlító feszültség az 2-es rúdban:

$g = 0, X_c = 221.71 \text{ mm}, \sigma_{\max}^{(2)} = 117.15 \text{ MPa}$ $g = 0.5, X_c = 207.47 \text{ mm}, \sigma_{\max}^{(2)} = 124.40 \text{ MPa}$



5. ábra Kiseb rugalmassági tényezőjű 2-es rúdnál a lehajlás, az érintkezési nyomás és a keletkező hajlító nyomaték kezdeti hézag nélküli esetben. A kontakt tartomány szélei és a maximális hajlító feszültség az 2-es rúdban:

$$g = 0, X_c = 237.52 - 262.05 \text{ mm}, \sigma_{\max}^{(2)} = 100.71 \text{ MPa},$$

$$g = 0.5, X_c = 232.69 - 257.29 \text{ mm}, \sigma_{\max}^{(2)} = 104.85 \text{ MPa}$$

A felvett 12 végeelemes felosztással az ismeretlenek száma NDOF=4464. Az érintkezési elemhatárokat 10-25 iterációs lépéssel értük el. Az eredményeket összehasonlítva az Abaqus végeelem program által kapottakkal, a lehajlási ábrákat nézve, nagyon jó egyezéseket kaptunk.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutató munka a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal – NKFIH, K115701 projekt támogatásával valósult meg, amelyért a szerzők köszönetüket fejezik ki.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Páczelt I. Szabó B., P verziós végeelemeket felhasználó hierarchikus rúd modellek, pp. 341-344. In: Csibi Vencel-József; Barabás István (szerk.) OGÉT 2018: XXVI. Nemzetközi Gépészeti Konferencia: 6th International Conference on Mechanical Engineering, Cluj-Napoca, Románia, Kolozsvár, Románia Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság (EMT), (2018) 544 p.
- [2] I. Páczelt, B. Szabó, T. Szabó, Solution of contact problem using the hp version of the finite element method, Comput. Math. Appl., 38:49-69, 2000.
- [3] Abaqus, <http://www.abaqus.com>