Rend a rendezetlenségben – gráfelméleti példákkal

Order in the chaos with examples from graph theory

KÁSA Zoltán

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem
Marosvásárhelyi Kar
e-mail: kasa@ms.sapientia.ro

Abstract

This is a kind of graph-theoretic essay, with new perspectives rather than new results, though there are too (e.q. theorems 2 and 4). In randomly created structures (be they natural or artificial) very often there exist ordered substructures. We will present here some of such structures in graph theory.

Keywords: random structure, complete graph, Hamiltonian path, Hamiltonian cycle, De Bruijn graph

Kivonat

Ez az írás egyféle gráfelméleti esszészerűség, inkább új szemlélettel, mint új eredményekkel, bár vannak ilyenek is (pl. 2. és 4. tétel). Azt vizsgáljuk, hogy egy struktúra, legyen az bármennyire is véletlenszerűen, rendezetlenül létrehozva, tartalmazhat-e valamilyen rendezett részstruktúrát.

Kulcsszavak: véletlenszerű struktúrák, teljes gráf, Hamilton-út, Hamilton-kör, De Bruijn-gráf

1. BEVEZETÉS

Ha alaposan megfigyelünk bármilyen rendezetlen struktúrát, észrevehetjük, hogy valahol, valamilyen módon van benne rend. Ezt a rendet keressük a gráfelméletben!

Szemerédi Endre[*] nyilatkozta egy interjúban: „A véges objektumokban mintázatokat, különböző alakzatokat keresünk, illetve azt, hogy milyen feltételek mellett jönnek létre bizonyos alakzatok – ez az egyik alapkérdés. Egy kicsit nagyképű vagy filozofikus megfogalmazás szerint azt szeretnénk bizonyítani, hogy minden káoszban van rend. Tehát ha ön direkt rosszindulatúan ad nekem egy struktúrát, abban is meg lehet találni a rendnek tekinthető részleteket. Legyen mondjuk hat pont, és én azt mondom, hogy ezeket ön kösse össze kék és piros ceruzával összevissza, létrehozva egy élekből és csomópontokból álló, úgynevezett teljes gráfot. Mi lenne ebben egy szép alakzat? Mondjuk három pont, amelyeket összekötő élek azonos színűek. Igazolni lehet, hogy az ördög – vagy a rosszindulatú újságíró – bárhogyan is színezi ki a gráfot, könnyen lehet találni benne három ilyen pontot.”[†]

2. RÉDEI TÉTELE ÉS KÖVETKEZMÉNYEI

Egy utat *Hamilton-útnak* nevezünk, ha tartalmazza a gráf összes csúcsát. Egy kör, amelyik tartalmazza a gráf minden csúcsát, *Hamilton-kör*.

Irányított gráfokban irányított Hamilton-útról beszélünk. Rédei László[‡] következő érdekes eredménye szerint egy véletlenszerűen felépített teljes gráfban létezik bizonyos rendezett alstruktúra. [2]

---

[*] Szemerédi Endre (1940–) Abel- és Széchenyi-díjas magyar matematikus, egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja. Nemzetközi tudományos ismertségre kombinatorikai, számelméleti és algoritmuselméleti kutatásaival tett szert.

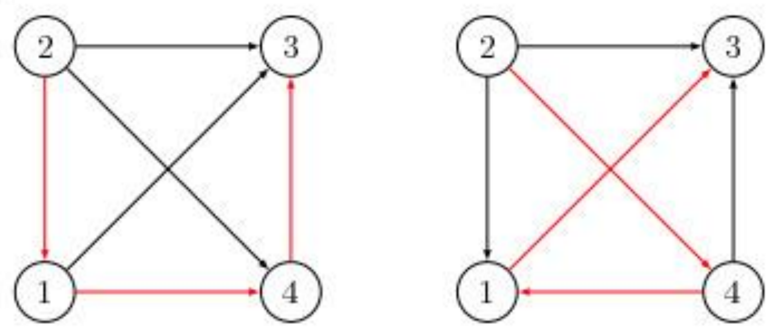
[†] https://tinyurl.com/32f99fwt

[‡] Rédei László (1900–1980) Kossuth-díjas matematikus, szegedi egyetemi tanár, a magyar absztrakt algebrai iskola megalapozója. A Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja.

1. tétel. [Rédei] *Egy legalább két csúcsú teljes gráf éleinek tetszőleges irányításával kapott gráfban mindig van irányított Hamilton-út.*

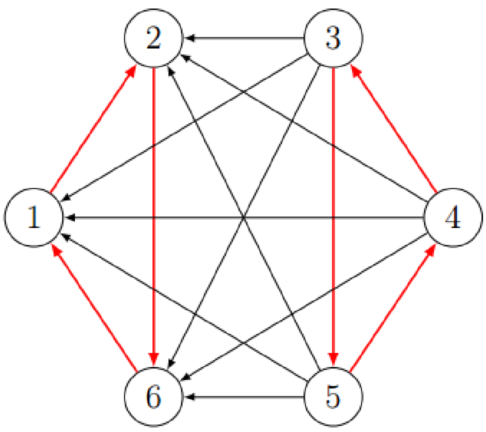
Ebben a tételben az a szép, hogy a teljes gráfot tetszőleges módon irányítva, egy látszólag teljesen rendezetlen gráfot kapunk, de az így kapott gráfban mégis mindig van irányított Hamilton-út.

Az alábbi két példában (1. ábra) az élek egy-egy irányítását láthatjuk egy négycsúcsú teljes gráfban, és pirossal a Hamilton-utakat. Itt látható, hogy az élek tetszőleges irányításával irányított Hamilton-kör nem mindig létezik. Mindkét esetben a 3-as csúcsba csak befutó élek vannak, tehát Hamilton-kör léte kizárható.



1. ábra. *Hamilton-utak egy négycsúcsú teljes gráfban*

Vajon milyen feltételek mellett lenne biztosítva a Hamilton-kör léte egy teljesen véletlenszerűen irányított teljes gráfban? Arra gondolhatnánk, hogy elegendő lenne, ha kikötnénk, hogy minden csúcs esetében legyenek befutó és kifutó élek. A 2. ábra példa arra, hogy ez nem elég. Itt a pirossal rajzolt két kör biztosítja a fenti feltételt, a gráf mégsem tartalmazhat Hamilton-kört, mert a két piros kör között csak egy irányban vannak élek. Ha a jobb oldali piros körből átmegyünk a bal oldaliba, onnan már nem tudunk visszajutni, tehát nem létezhet Hamilton-kör.



2. ábra. *Példa egy hatcsúcsú teljes gráfra, amelyben nincs Hamilton-kör*

Az a feltétel, hogy minden csúcs esetében legyenek befutó és kifutó élek viszont elegendő ahhoz, hogy biztosítsa, hogy a gráfban legyen irányított kör. Kijelenthetjük a következő tételt.

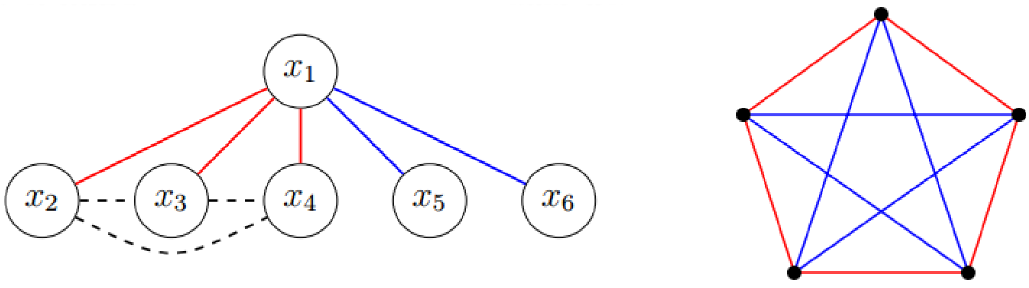
2. tétel. *Egy legalább három csúcsú teljes gráf éleinek olyan tetszőleges irányításával, hogy minden csúcsba legyen befutó él, és minden csúcsból legyen kifutó él, biztosítható, hogy a kapott gráfban mindig legyen irányított kör.*

Ezt könnyű belátni, hisz ha elindulunk egy csúcsból, egy irányított élen átmegyünk egy szomszédos csúcsba, ahonnan ugyanúgy folytatjuk tovább, és ha már nem tudunk tovább haladni, akkor visszaértünk egy már érintett csúcsba (amely akár a kiinduló csúcs is lehet), és ezzel bezárul egy kör.

3. RAMSEY-TÍPUSÚ SZÉLSŐÉRTÉK-FELADATOK

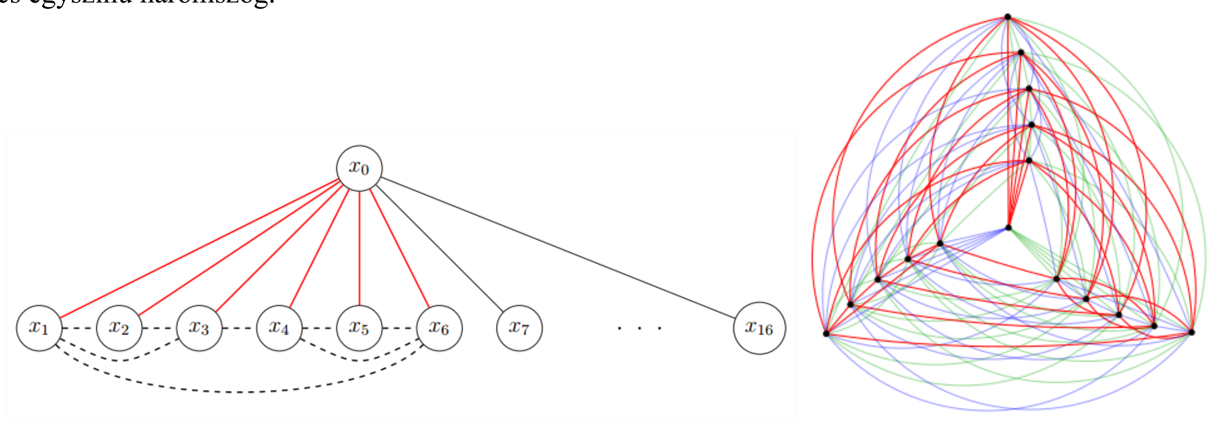
Bizonyítsuk be, hogy egy legalább hattagú társaságban mindig vannak hárman, akik kölcsönösen ismerik egymást vagy kölcsönösen nem ismerik egymást (az ismeretséget kölcsönösnek tekintjük). Legyenek a gráf csúcsai a társaság emberei. Jelöljük piros éllel, ha két ember ismeri egymást, és kék éllel ha nem (3. ábra bal oldali gráfja). Válasszuk ki az x_1 csúcsot és az x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, csúcsokat. Mivel x_1 öt éllel van összekötve a többi csúccsal, és ezek két színnel vannak kiszínezve, az öt él közül, legalább három azonos színű, például piros. Az ábrán feketével szaggatottan rajzolt él mindegyike lehet akár piros, akár kék. Ha az $\{x_2, x_3\}$ él piros, akkor a gráfban van piros háromszög $\{x_1, x_2, x_3\}$. Ugyanez igaz az $\{x_3, x_4\}$ és $\{x_2, x_4\}$ élekre is. Ha viszont ezek egyike sem piros, akkor mindhárom kék (az ábrán szaggatottan), és akkor van a gráfban kék háromszög.

A feladat úgy is megfogalmazható, hogy bármely legalább hat csúcsú gráfban vagy a komplementerében van háromszög. (A piros élek a gráfban vannak, a kékek a komplementerében.) Van olyan színezése egy ötcsúcsú teljes gráfnak, amelyben nincs egyszínű háromszög (3. ábra jobb oldali gráfja). Tehát 6 az a legkisebb szám, amelyre a fenti tulajdonság igaz.



3. ábra. $R(3,3) = 6$

A feladatot meg lehet fogalmazni három színnel is. Ha három színnel színezzük ki egy legalább 17 csúcsú teljes gráf éleit, akkor mindig van benne egyszínű háromszög. A bizonyítás hasonló az előbbi esethez. Az x_0 csúcs össze van kötve minden további csúccsal a három szín valamelyikével színezett éllel (4. ábra bal oldali gráfja). Ezen 16 él közül legalább 6 azonos színű, például piros, és legyenek ezek $x_1, x_2, ..., x_6$. Ha ezen utóbbiak közül bármely kettő piros éllel van összekötve (az ábrán szaggatott vonallal, de nincs minden ilyen él berajzolva), akkor piros háromszög keletkezik. Ha ezen utóbbi élek közül egyik sem piros, akkor kék vagy zöld. Az $x_1, x_2, ..., x_6$ csúcsok, a köztük futó megfelelő élekkel, egy két színnel színezett 6 csúcsú teljes gráfot képeznek, és ebben az előző eredmény alapján mindig van egyszínű háromszög (kék vagy zöld). És ezzel a bizonyítást befejeztük. Hogy 17 a legkisebb olyan szám, hogy a három színnel való színezésben a 17 csúcsú teljes gráfban mindig van egyszínű háromszög, a 4. ábra jobb oldali 16 csúcsú teljes gráfja bizonyítja, amelyben nincs egyszínű háromszög.



4. ábra. $R(3,3,3) = 17$

A fiatalon elhunyt Frank Ramsey[§] matematikus írta, hogy: „egy elég nagy rendszerben, még ha rendezetlen is, kell lenni valamilyen rendnek”. Az előbbi feladat (egy legalább hattagú társaságban mindig vannak hárman, akik kölcsönösen ismerik egymást vagy kölcsönösen nem ismerik egymást) általánosítása

§ Frank P. Ramsey (1903–1930) brit matematikus, filozófus, közgazdász

Ramsey nevéhez fűződik. Jelöljük K_n-nel az n-csúcsú teljes gráfot. Legyen $R(m,k)$ az a legkisebb természetes szám, amelyre egy $n \geq R(m,k)$ csúccsal rendelkező gráfban van K_m részgráf vagy a komplementerében van K_k részgráf. Más megfogalmazásban: ha egy $n \geq R(m,k)$ csúccsal rendelkező teljes gráf éleit két színnel színezzük ki, akkor mindig van benne egyszínű K_m részgráf vagy egyszínű K_k részgráf. Extrém gráfoknak nevezzük azokat az $R(m,k)$–1 csúcsú gráfokat, amelyekre ez a tulajdonság nem igaz.

Például: $R(3,3) = 6$. Extrém gráf az 5-csúcsú kör. (A 3. ábra jobb oldali gráfjában a piros élek a gráfhoz, a kékek a komplementer gráfhoz tartoznak.)

Az $R(m,k)$ pontos értéke csak néhány esetben ismert. Az alábbi táblázatban több helyen pontos érték helyett intervallum van megadva.

$m\backslash k$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	[40,43]
4		18	25	[35,41]	[49,61]	[56,84]	[73,115]	[92,149]
5			[43,49]	[58,87]	[80,143]	[101,216]	[125,316]	[143,442]
6				[102,165]	[113,298]	[127,495]	[169,780]	[179,1171]
7					[205,540]	[216,1031]	[233,1713]	[232,2826]
8						[282,1870]	[317,3583]	[377,6090]
9							[565,6588]	[580,12677]
10								[798,23556]

5. ábra. *Néhány érték R(m,k)-ra*[**]

Könnyű bizonyítani, hogy: $R(1,k) = R(k,1) = 1$, $R(2,k) = R(k,2) = k$. Általánosan: $R(m,k) = R(k,m)$.

Be lehet bizonyítani, hogy $R(m,k)$ létezik, minden nullától különböző m és k természetes számra. Erdős Pál[††] és Szekeres György[‡‡] bebizonyította a következő tételbeli felső határt [1]. Az alsó határ kevésbé fontos, de erre is van képlet [5].

3. tétel. *[1,5] R(m,k) létezik tetszőleges* $m,k \in \mathbf{N}^*$ *értékekre, és* $mk - \min(m,k) \leq R(m,k) \leq \binom{m+k-2}{m-1}$.

Az alábbi H_{3k-1} gráfokat, amelyek kapcsolódnak az alsó határ egy speciális esetéhez, Andrásfai-gráfoknak nevezzük, mivel Andrásfai Béla[§§] írta le először. [1]

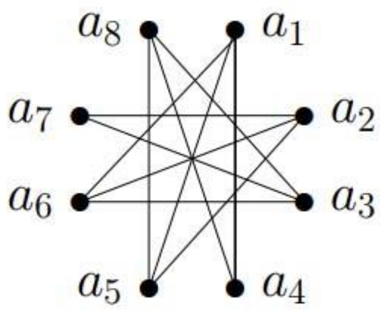
Legyen adott a H_{3k-1} gráf, amelynek csúcsai a_1, a_2, ... , a_{3k-1} egy körön szabályosan elhelyezve, és amelyben élekkel kötjük össze azokat, amelyeknek távolsága nagyobb, mint a körbe írható szabályos háromszög oldala. Így például a_1 össze van kötve az a_{k+1}, ... , a_{2k} csúcsokkal.

[**] https://mathworld.wolfram.com/RamseyNumber.html

[††] Erdős Pál (1913–1996) világhírű magyar matematikus, a Magyar Tudományos Akadémia tagja, aki főleg számelmélettel, kombinatorikával és gráfelmélettel foglalkozott

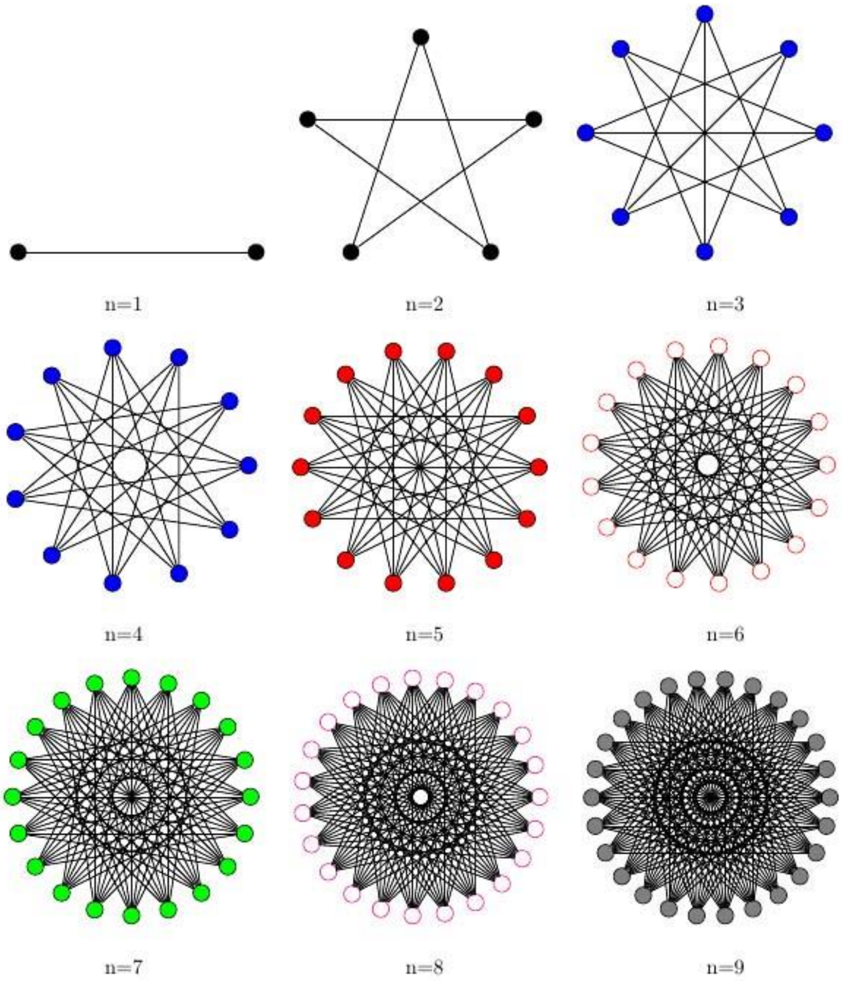
[‡‡] Szekeres György (1911–2005) magyar-ausztrál matematikus, a Magyar Tudományos Akadémia tagja, aki gráfelmélettel, kombinatorikával és számelmélettel foglalkozott

[§§] Andrásfai Béla (1931. február 8. –) matematikus, a budapesti Műszaki Egyetem nyugdíjas docense, az Andrásfai-gráf névadója



6. ábra. *H_8 gráf*

H_{3k-1} nem tartalmaz háromszöget, és legfeljebb k független csúcsa van (pl. a_1, a_2, ..., a_k), ezért $R(3,k+1) \geq 3k$, vagy $R(3,k) \geq 3(k-1)$.



7. ábra. *Andrásfai-gráfok n = 1, 2, ... ,9 értékekre*

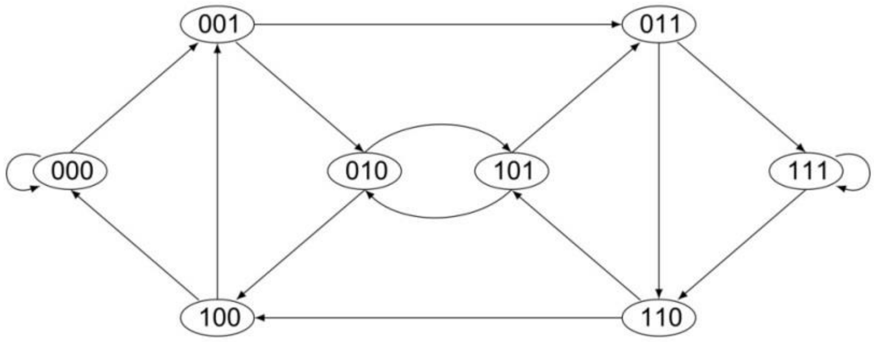
A Szemerédi-féle regularitási lemma olyan gráfelméleti tétel[***], amely szintén a rendet keresi a rendezetlenségben, azaz igen nagy véletlenszerű gráfokban talál valamilyen rendezett struktúrát. A lemma szerint minden, kellően nagy gráf csúcsainak a halmaza felosztható olyan hasonló méretű részhalmazokra, amelyek esetében a részhalmazok közötti élek csaknem véletlenszerűek. [9]

[***] A tétel nevében megmaradt a lemma szó, mivel Szemerédi Endre annak idején lemmaként használta.

4. DE BRUIJN-GRÁFOK

Azt, hogy a rendezetlen nagyméretű struktúrában van rendezett alstruktúra, azt láttuk. Az a kérdés, hogy egy rendezett struktúrában lehet-e rendezetlen alstruktúra. Egészen kisméretű biztos lehet, de nagyméretű lehet-e? A következőkben a De Bruijn-gráfokról lesz szó, amelyek nem a rendezetlenség, hanem éppen ellenkezőleg a rendezettség, a rend, a harmónia képviselői. [6]

Szógráf alatt olyan gráfot értünk, amelyben a csúcsok k hosszúságú szavak[†††], irányított él van az $a_1a_2...a_k$ csúcsból a $b_1b_2...b_k$ csúcsba, ha $a_2a_3...a_k = b_1b_2...b_{k-1}$.
Ha $V = A^k$ (azaz, a csúcsok halmaza az összes k hosszúságú szó), ahol $A = \{a_1, a_2, ..., a_q\}$, akkor a gráf neve *De Bruijn-gráf*, jelölése pedig *B(q,k)*. Például, ha $A = \{0, 1\}$, akkor $q = 2$, és ha $k = 3$, akkor a következő De Bruijn-gráfot kapjuk:



8. ábra. *B(2,3) De Bruijn-gráf*

Ebben a gráfban két irányított Hamilton-kört is találunk. Ezek:

000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100, 000 és 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100, 000.

Ha elhagyjuk a vesszőket, az egymás melletti szavakat összecsúsztatjuk (a közös részeket csak egyszer írjuk le), és az utolsó betűt is elhagyjuk, akkor ezeket kapjuk: 0001110100 és 0001011100, és az így kapott szavakat *De Bruijn-szavaknak* nevezzük, és ezek tulajdonképpen De Bruijn-utaknak felelnek meg, de, ha megegyezünk abban, hogy az utolsó betű után mindig 0 következik, akkor tekinthetjük úgy, hogy De Bruijn-körökről van szó.

A *B(q,k)* De Bruijn-gráfban összesen $\dfrac{(q!)^{q^{k-1}}}{q^k}$ irányított Hamilton-kör van. Ez a szám q és k növelt értékeivel gyorsan nő.

gráf	Hamilton-körök száma
$B(2,3)$	2
$B(3,2)$	24
$B(3,3)$	373248
$B(3,4)$	$13824 \cdot 10077696^3$

9. ábra. *Irányított Hamilton-körök száma*

A $B(3,2)$-ben a következő 24 irányított Hamilton-kör van:

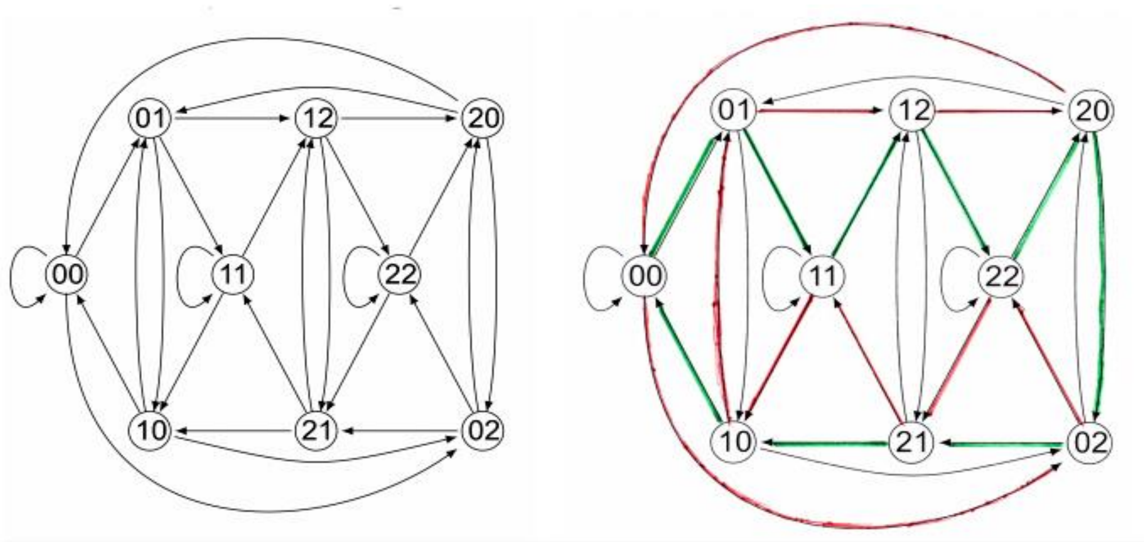
0010211220	0020122110	0010221120	0020112210	0011021220	0022012110
0011022120	0022011210	0011202210	0022101120	0011210220	0022120110
0011220210	0022110120	0011221020	0022112010	0012022110	0021011220

[†††] Itt *szó* alatt egy adott ábécé (jelek véges, nem üres halmaza) egymás mellé helyezett betűiből képzett füzért értjük. Például, ha az ábécé $A = \{a, b, 1, 2, 3\}$, akkor szavak lehetnek: *ab*, *aa*, 1*ba*2, 221 stb.

0012110220   0021220110   0012202110   0021101220   0012211020   0021122010

A $B(3,2)$ gráfban (10. ábra, jobb oldalt) két irányított Hamilton kört rajzoltunk be, az egyik élei zöldek, a másiké pirosak. Láthatjuk, hogy a két irányított Hamilton-körnek nincsen közös éle, az ilyen esetben azt mondjuk, hogy ez két Hamilton-kör élfüggetlen.

Mivel rengeteg Hamilton-kör van, feltevődik a kérdés, hogy ezek közül hány páronként élfüggetlen Hamilton-kör létezik. Látható, hogy a $B(3,2)$-ben két élfüggetlen Hamilton-kör van. Több nem lehet, mert a 00, 11 és 22 csúcsokból két él fut ki más csúcsokba, egy pedig önmagába, tehát ezeken csak két Hamilton-kör mehet át. Hasonló megfontolás alapján, a $B(q,k)$ gráfban is legfeljebb q–1 páronként élfüggetlen Hamilton-kör létezhet. Az a kérdés, hogy van-e ennyi? A rendezettnek tekinthető De Bruijn-gráfban az összes irányított Hamilton-kör halmaza rendezetlen struktúrának tűnik, és kérdés, hogy ebben létezik-e q–1 élfüggetlen Hamilton-kör (azaz egy rendezett alstruktúra.) Johny Bond‡‡‡ és Iványi Antal§§§ sejtése alapján pontosan ennyi van.



10. ábra. *B(3,2) De Bruijn-gráf*

1. sejtés. [3] Ha $q \geq 2$ és $k \geq 2$, akkor a $B(q,k)$ gráfban létezik q–1 páronként élfüggetlen irányított Hamilton-kör.

Egyelőre a sejtést nem sikerült bizonyítani, csak annyit, hogy legalább $q/2$ élfüggetlen Hamilton-kör létezik minden $B(q,k)$ gráfban. [7]

A $B(5,2)$ gráfban a következő irányított Hamilton-körök élfüggetlenek:

0010211204142243033231344О
0020322301213314044342411О
0030433402324421011413122О
0040144103431132022124233О

Meg lehet figyelni, hogy a második Hamilton-kört úgy kaptuk meg az elsőből, hogy 1 helyett 2-t, 2 helyett 3-t, 3 helyett 4-et, 4 helyett pedig 1-et írtunk. A nullák változatlanok maradnak. Hasonlóan képezzük a következőket is mindig az előzőből. Az a kérdés, hogy az így kapott Hamilton-körök mindig élfüggetlen Hamilton kört adnak-e. Könnyű belátni, hogy ez nem igaz mindig, például a $B(3,2)$ gráfban 0010211220 és 0020122110 mindegyike Hamilton-körnek felel meg, de van közös élük, például az 122-nek és a 211-nek megfelelő élek, azaz az 12 és 22, valamint a 21 és 11 csúcsok közöttiek. A 11. ábrán pirossal rajzoltuk az egyik, kékkel pedig a másik Hamilton-kör éleit. A szaggatott vonallal rajzoltak pirosak is, meg kékek is.

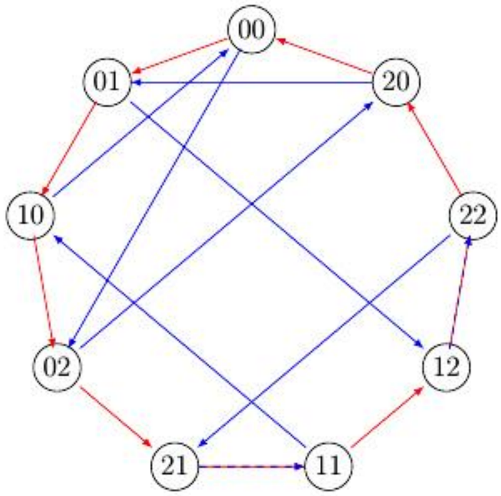
‡‡‡ Johny Bond romániai származású francia matematikus

§§§ Iványi Antal (1942–2017) magyar informatikus, egyetemi tanár az ELTE-n

Az viszont elképzelhető, hogy minden esetben vannak ilyen módon képzett élfüggetlen Hamilton-körök. Ha a $B(q,k)$ gráfban adott egy H_1 Hamilton-kör, képezzük a következő Hamilton-köröket: a H_i-t úgy kapjuk meg a H_{i-1}-ből (i=2,3,...,q–1), hogy elvégezzük a következő cseréket:

$1 \rightarrow 2$
$2 \rightarrow 3$
...
$q-2 \rightarrow q-1$
$q-1 \rightarrow 1$
és a 0 nem változik.

Legyen μ az a morfizmus („függvény”), amely a fenti cseréket elvégzi.



11. ábra. *Két nem élfüggetlen Hamilton-kör (a szaggatottan rajzolt élek közösek).*

A $B(5,2)$ gráfban a következő H_1 = 00102112041422430332313440 irányított Hamilton-körből kiindulva, a fenti módszerre élfüggetlen Hamilton-körök keletkeznek:

H_1 = 00102112041422430332313440, $\mu(H_1) = H_2$,
H_2 = 00203223012133140443424110, $\mu(H_2) = H_3$,
H_3 = 00304334023244210114131220, $\mu(H_3) = H_4$,
H_4 = 00401441034311320221242330, $\mu(H_4) = H_1$.

Ezen De Bruijn-szavakat reprezentatív De Bruijn-szavaknak nevezzük. A 12. ábra táblázatában néhány ilyen szó van. Ezeket előállítani nem könnyű, mert ahogy nő a q és k értéke, exponenciálisan nő a program futási ideje.

q	k	H_1
3	2	0011220210
3	2	0021011220
3	3	00010021011022202012111221200
4	2	00102113230331220
4	2	00102313033211220
4	3	000100210110201202310301311121130221232031323003332133122330322200
4	3	000100210110201202310301311121130223323003132123203330322213312200
5	2	00102112041422430332313440
6	2	0010211204131403325235505154534422430
7	2	00102112041306140315055162252353436442463326545660

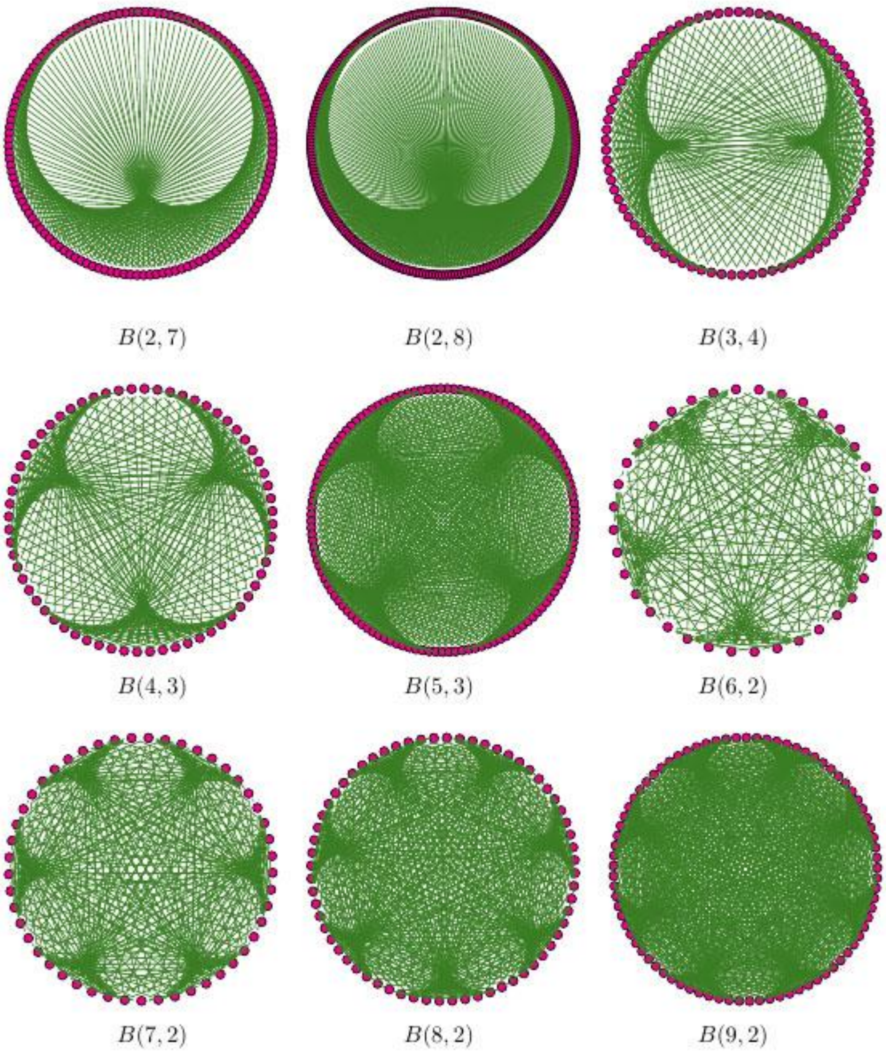
12. ábra. *Néhány reprezentatív De Bruijn-szó*

Adódik a következő sejtés.

2. sejtés. [4] Bármilyen $q > 2$, $k > 1$ értékekre a $B(q,k)$ gráfban létezik egy olyan H_1 irányított Hamilton-kör, hogy a fenti eljárással kapott H_2, H_3, ... , H_{q-1} irányított Hamilton-körök a H_1-gyel együtt páronként élfüggetlenek.

A sejtést, hogy a $B(q,k)$ gráfban q–1 élfüggetlen Hamiltonion-kör van, a 13. ábra gráfjai is sugalmazhatják. Mindegyik gráf úgy néz ki, mint egy virág, amelynek q–1 szirma van.

Hamilton-kört a $B(q,k)$ gráfban könnyen elő lehet állítani az ún. Martin-algoritmussal [8], amely tulajdonképpen De Bruijn-szót generál. Elindulunk k nullával. Legyen $s_1s_2...s_n$ az eddig generált betűsorozat (a legelején $n = k$), ekkor az (n+1)-edik pozícióban folytatásként próbálkozunk (q–1)-nel (a betűk 0-tól q–1-ig vannak jelölve). Utána megvizsgáljuk, hogy ha az előző részben (azaz az $s_1s_2...s_n$-ben) nem szerepel már $s_{n-k+2}s_{n-k+3}...s_ns_{n+1}$, akkor jó a ($q$–1), de ha igen, akkor folytatjuk eggyel kisebb értékkel, és így tovább. Ha már nem tudjuk folytatni, akkor az algoritmus befejeződik, és az eredmény a megfelelő De Bruijn-szó. Például: q = 3, k = 2-re ezt kapjuk: 0022112010. (Például a 8. pozícióban nem lehet 2, mert előtte már van 22, de 1 sem lehet, mivel 21 is van, ezért kell 0. Az 11. pozícióba már egyik sem jó, mert a 02, 01 és 00 is szerepel már az előző részben. Ezért az algoritmus véget ér.) Sajnos ez az algoritmus soha nem generál olyan H_1 Hamilton-kört, amelyre az előbbi módszerrel előállított H_2, H_3, ... H_{q-1} Hamilton-körök élfüggetlenek legyenek. De elképzelhető, hogy a Martin-algoritmushoz hasonló, de más algoritmus képes erre. Ez egyben bizonyítaná is a második sejtést, amelyet más módszerrel igen nehéz lenne bizonyítani.



13. ábra. *De Bruijn-gráfok – hurkok és irányítások elhagyásával*

4. tétel. A Martin-algoritmus soha nem állít elő reprezentatív De Bruijn-szót.

Legyen adott a következő ábécé: A = {0,1, ..., q–1}, ahol q > 2. A Martin-algoritmus kezdetben k nullával kezdi a B(q,k) szó felépítését, majd mindig a lehető legnagyobb értékű „betűt" teszi a következő helyre, amennyiben ezen betű az előtte lévő k–1 betűvel nem szerepel részszóként az addig felépített szóban, különben eggyel kisebb értékű betűt választunk. Az így előállított De Bruijn-szó tartalmazza a következő szót:

$$0\underbrace{(q-1)(q-1)\cdots(q-1)}_{k\text{-szor}}.$$

Azt állítjuk, hogy $0\underbrace{1\cdots1}_{k\text{-szor}}$ is része a De Bruijn-szónak. Ha ez nem így lenne, akkor $a\underbrace{1\cdots1}_{k\text{-szor}}$ lenne része, ahol a ≠ 0, 1. Mivel $\underbrace{1\cdots1}_{(k-1)\text{-szer}}(q-1),\ \underbrace{1\cdots1}_{(k-1)\text{-szer}}(q-2),\ \ldots,\ \underbrace{1\ldots1}_{(k-1)\text{-szer}}2$ az részszavak benne vannak a De Bruijn-szóban, $a\underbrace{1\cdots1}_{k\text{-szor}}$ benne lesz is. Ebben az esetben a következő részszavak is benne lesznek:

$$b_1\underbrace{1\ldots1}_{(k-1)\text{-szer}}(q-1),\ b_2\underbrace{1\ldots1}_{(k-1)\text{-szer}}(q-2),\ \ldots,\ b_{q-2}\underbrace{1\ldots1}_{(k-1)\text{-szer}}2$$

De ekkor $b_1, b_2, \ldots, b_{q-2}$ páronként különbözők, és különböznek az 1, 0 és a értékektől is. De ez lehetetlen, mert ekkor q–1 változó (a b-ék és a) csak q–2 értéket vehet fel. Ezért az állításunk, hogy a nem lehet nulla, hamis. És mivel

$$\mu(0\underbrace{(q-1)(q-1)\ldots(q-1)}_{k\text{-szor}}) = 0\underbrace{1\cdots1}_{k\text{-szor}}$$

ezért az így keletkezett De Bruijn-szó nem lehet reprezentatív, $0\underbrace{1\cdots1}_{k\text{-szor}}$ mert megjelenik egy másik De Bruijn-szóban is, tehát a két megfelelő Hamilton-körnek van egy közös éle.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

Az első gráfelméleti feladatot (a königsbergi hidak problémáját) Euler oldotta meg 1736-ban. Az első könyv 1936-ban jelent meg Kőnig Dénes tollából. A gráfelmélet gyors fejlődése a második világháború után kezdődött, és ma már a matematika külön ága rengeteg gyakorlati alkalmazással. A különböző hálózatok megjelenése szükségessé tette a nagy gráfok vizsgálatát. Jelen cikkben azt vizsgáltuk, hogy milyen módon jelennek meg rendezett struktúrák (teljes gráfok, különféle utak és körök) a véletlenszerűen szervezett (azaz teljesen rendezetlen) gráfokban.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

[1] Andrásfai Béla: *Ismerkedés a gráfelmélettel*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[2] Claude Berge: *Théorie des graphes et ses applicatuions*, Dunod, Paris, 1967. (románul: *Teoria grafurilor și aplicațiile ei*, Editura Tehnică, București, 1969)

[3] Johny Bond, Antal Iványi: Modelling of interconnection networks using De Bruijn graphs, in: *Third Conference of Program Designer*, Ed. A. Iványi, Budapest, 1987, pp. 75–87. https://tinyurl.com/2p8rzfmf

[4] Zoltán Kása: On arc-disjoint Hamiltonian cycles in De Bruijn graphs, https://arxiv.org/abs/1003.1520

[5] Zoltán Kása: On k-thin sets and their relation to generalized Ramsey number, *Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica*, 20 (1975) 54–59.

[6] Kása Zoltán, Anisiu Mira-Cristiana: Szavak bonyolultsága, in: Iványi Antal (szerk.): *Informatikai algoritmusok III.*, Budapest, mondAt Kiadó, 2013, pp. 1697–1739., ISBN 9789638759689 (angolul: https://www.researchgate.net/publication/274735246_Complexity_of_words)

[7] Yaw-Ling Lin, Charles Ward, Bharat Jain, Steven Skiena: Constructing orthogonal de Bruijn sequences, in *Algorithms and Data Structures*, Lecture Notes in Computer Science, 2011, Volume 6844/2011, pp. 595–606.

[8] M. H. Martin, A problem in arrangements, *Bull. A.M.S.* **40** (1934) 859–864.

[9] Szemerédi-féle regularitási lemma, Wikipédia, https://hu.wikipedia.org/wiki/Szemerédi-féle_regularitási_lemma