

# A vasúti pályageometria felmérése modern földmérési eszközökkel

## Survey of Railway Track Geometry With Modern Land Surveying Tools

### Diagnosticarea geometriei căii folosind instrumente topografice moderne

ERDÉLYI Marcell, Dr. KÖLLŐ Gábor

Kolozsvári Műszaki Egyetem,  
Memorandumului utca 28-as szám, 400114 Kolozsvár  
tel.: +40 264 401 200, fax. +4 0264 592 055, <http://www.utcluj.ro/>

#### ABSTRACT

*The effects of technical IT development provides constant renewal and development opportunities for each specializing areas. For this reason it can be not left out from among this the developmental activities in the transport field of railway tracks. As a result, will presented the modern methods and procedures used in classical land surveying and the tools and instruments needed for their application, which will help to solve easier and more efficiently the problems of curve alignment. The publication ends with the description of a self-developed automated technology and with conclusions.*

#### ÖSSZEFOGLALÓ

*A műszaki informatikai fejlődés minden szakterületre való hatása állandó megújulási-fejlesztési lehetőségeket kínál fel. Ez a fejlődés nem maradhat el a közlekedési szakterület vasúti pályákra vonatkozó tevékenységei sorából sem. Ennek hatására a továbbiakban a klasszikus földmérésben használt modern módszereket és eljárásokat, valamint az ezek alkalmazásához szükséges eszköz- és műszerháttér bemutatása kerül sorra, mely a vasúti pályák ívszabályozása terén előforduló problémák könnyebb és hatékonyabb megoldására szolgál. A publikáció egy saját fejlesztésű automatizált technológia leírásával, majd a következtetésekkel zárul.*

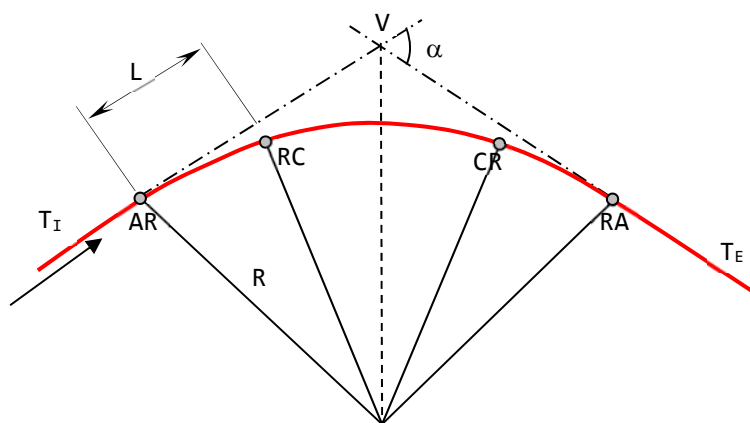
#### 1. BEVEZETÉS

A vasúti pályák állandó használata miatt a pálya egyenesek, és főképp a pálya ívek torzulásokat szenvednek. Ezek nem csak kényelmi szempontból, de közlekedés biztonsági okokból is veszélyesek lehetnek. A pályafenntartás egyik legfontosabb feladata tehát a vágányszakaszok ívszabályozása.

A vasúti íveket csoportosíthatjuk a következőképpen:

- az ív fajtája szerint: állandó sugarú körívek, változó sugarú átmeneti ívek;
- az ív síkban való ábrázolása szerint: egyszerű egysugarú ívek (átmeneti ívvel vagy anélkül), összetett ívek (több egyszerű ív összessége);
- a haladási irány szerint: jobbos ívek (az ív középpontja jobb oldalon van), balos ívek (az ív középpontja bal oldalon van).

A gyakorlatban leggyakrabban használt ívszabályozási módszer a húrméréses szögmérési eljárás grafikus módszere. Célja az eltorzult helyzetű ívből egy kifogástalan fekvésű ívpálya létrehozása.



V – csúcsszög;  $T_I$  – bemeneti tangens;  $T_E$  – kimeneti tangens; AR – egyenes-átmenetiív;  
 RC – átmenetiív-körív; CR – körív-átmenetiív; RA – átmenetiív-egyenes;  
 $\alpha$  – kitérő szög; L – átmenetiív hossza; R – körív sugara

1. ábra. A vasúti pályaív alkotó részei

## 2. A GYAKORLATBAN ALKALMAZOTT PÁLYAGEOMETRIA VIZSGÁLATA

A vágány fekvésének rögzítése húrméréssel történik. Az ívkiigazítás ezen fázisának elvégzéséhez leg-  
 alább négy ember összehangolt munkája szükséges.

A húrmérés előkészítése során az ív külső sínszálán zsíros krétával maradandó osztáspontokat jelölnek meg  $\Delta l$  távolságban. A húrmérést  $2\Delta l$  hosszú húrral végzik zsinóros húrmagasságmérőt, valamint tolómércét használva (2. ábra). A húrmagasság mérést minden osztáspontnál elvégzik, majd a kapott értékeket jegyző-  
 könyvbe analóg módon beírva rögzítik.



2. ábra. A húrmérés folyamatának lépései és felhasznált eszközei

A jelenkori technológia által felkínált informatikai megoldásokat felhasználva történik az adatfeldolgozás. Előfeldolgozásként a hűmérési jegyzőkönyvben beírt mért adatokat, mint kiinduló adatok, analóg-digitális adatkonverzió során, egy táblázat-szerkesztő program segítségével (pl. Excel), egy adattárba viszik be. Ezek után a hűmérési szövegfeldolgozó grafikus módszerének lépéseit követve a megcélzott eredményeket (vágányeltolások) számolják ki a megfelelő matematikai modellt használva.

A módszer alkalmazása biztosítja a megcélzott probléma megoldását, ugyanakkor nem alkalmazza a pozicionálási adatgyűjtés digitális technológiái által felkínált lehetőségeket és csak részben használja az adatfeldolgozás jelenkori informatikai lehetőségeit.

### 3. A FÖLDMÉRÉSI TECHNOLÓGIÁK ALKALMAZÁSA A VASÚTI PÁLYAGEOMETRIA MEGHATÁROZÁSÁBAN

A jelenkori földmérési technológiák célkitűzései:

- a pozicionálási adatgyűjtési technológiák által felkínált lehetőségek kihasználása az ív pillanatnyi helyzetének meghatározásában
- az adatfeldolgozás a jelenleg elérhető színvonalra emelése
- az analóg-digitális adatkonverzió kiküszöbölése a digitális adatrögzítés útján
- különböző számítási lépések közti kézi vezérlésű adatkommunikáció helyettesítése kompatibilis adattárak alkalmazásával
- egységes adatfeldolgozási program kidolgozása, amely biztosítja a gyűjtött adatok feldolgozását és a céleredmények elérését az ismert matematikai modell alapján.

A földmérési szakma alapfeladata a pozicionálás, mely a vasúti ívek pozicionálása esetén is alkalmazható.

A pozicionálás egy pontnak egy választott ortogonális referencia rendszerben való helyzetének meghatározását jelenti. Egy 3D-s térben a pontnak három mozgási szabadságfoka van, amelyeket a pozicionálás érdekében ki kell küszöbölni. Ennek eléréséhez egy pontra vonatkozóan három mért adatra van szükség, melyeket a választott referencia rendszerben az adatgyűjtés során kapunk meg.

A pozicionálás alapelvei a tér méretétől és az alkalmazott módszerektől függetlenek, és a következőképpen fogalmazhatóak meg:

- egy pont pozicionálása két szakaszból áll: adatgyűjtés és az adatok feldolgozása
- egy új pont pozíciója már korábban pozicionált pontok helyzetéből kiindulva kapható meg, melyhez hozzáadódnak a mért koordinátákból számított pozíciókülönbségek:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$$

- a koordináták meghatározásához szükséges adatgyűjtés során kötelező a már pozicionált ismert pont közvetlen átláthatóságának (kapcsolat) biztosítása, a mérendő pont felé (3. ábra).



3. ábra. Az átláthatóság feltétele

- a gyűjtött adatok feldolgozása a megfelelő matematikai és sztohasztikus modellek felhasználásával történik, melyeket az asztronómia, geodézia, topográfia, fotogrammetria, kartográfia és gravimetria fejlődése során lettek fejlesztettek ki.

A felsorolt elvek érvényesek az összes pozicionálási módszerre, amit a továbbiakban ismertetek. Az adatgyűjtési és adatfeldolgozási módszereket a pozicionálási módszerek határozzák meg, melyek közül az alábbiakat mutatom be:

- geodéziai-topográfiai módszerek
- fotogrammetriai módszerek
- műholdas GNSS módszerek
- 3D-s szkennelési módszerek.

### 3.1. A pontok pozicionálása a geodézia és topográfia terén

Egy pont pozicionálása egy megfelelően választott referencia koordináta-rendszerben, általános esete a geodéziai és topográfiai megoldásoknak. A 3D-s teret három szabadságfok jellemzi. A három szabadságfok rögzítése a pont pozicionálását biztosítja, három mennyiség (koordináták) formájában. Annak érdekében, hogy meghatározzuk ezeket a mennyiségeket, legalább három ismert adatra van szükség. A gyakorlati geodéziában és topográfiaiában a gyűjtött adatok a poláris koordináták  $C_p(S H V)$ . Ezen mennyiségek méréséhez használt eszközök pedig a teodolitok és tahiméterek. Ezek közül is a napjainkban leggyakrabban használt mérőműszerek az ún. elektronikus tahiméterek, más néven mérőállomások (4. ábra).



4. ábra. Különböző típusú mérőállomások

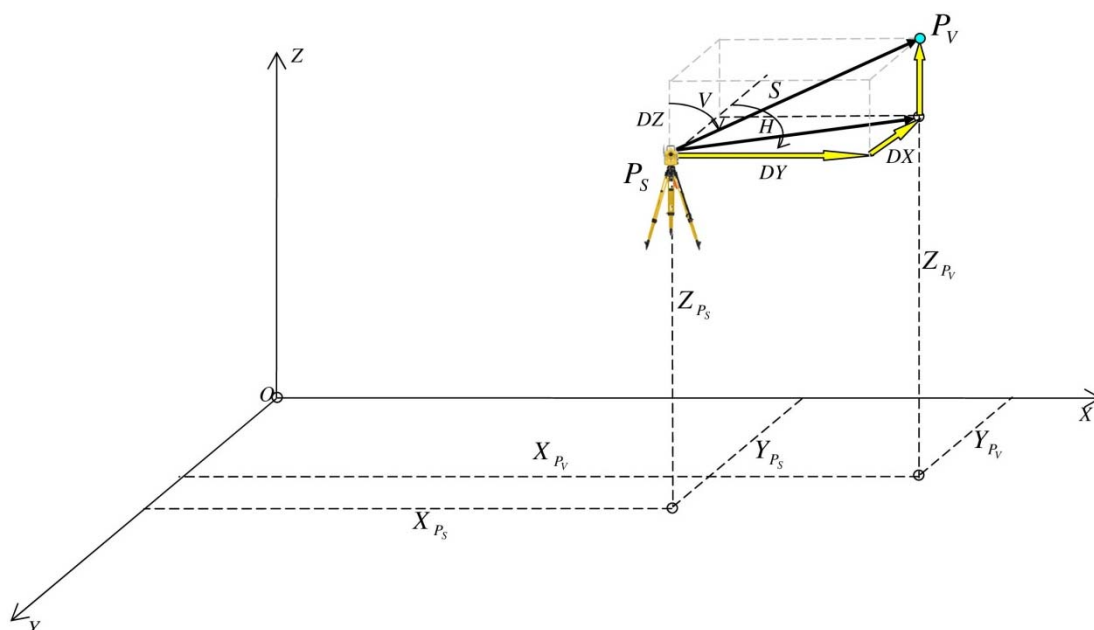
A mérőállomások saját memóriaközponttal és egy külső memóriával rendelkeznek, valamint egy sor specifikus számítási programmal is, melyek a különböző geodéziai és topográfiai munkák elvégzését könnyítik meg. A mérőállomások a gyűjtött adatok digitális adattárakba való tárolását és ezáltal az adatfeldolgozás automatizálását biztosítják.

A mérőállomások nem csak távolságok, vízszintes- és függőleges szögek, szintkülönbségek mérésére alkalmasak, hanem az alábbi funkcióval is rendelkeznek:

- egy sor, közvetlenül a terepen elvégezhető ellenőrzés és számítás is elvégezhető;
- a mért adatok automatikus tárolása;
- a mért adatok automatikus továbbítása adatfeldolgozó perifériára;
- a feldolgozott adatok átalakítása és megjelenítése grafikus formában (CAD)

A műszer koordináta rendszerében kifejezett mért adatok jelentése a következő:

- $S$ : az álláspont  $P_S$  és mért pont  $P_V$  közti ferde távolság;
- $H$ : a referencia irány ( $P_S - X$  tengely) és a célzott irány ( $P_S - P_V$ ) közti vízszintes szög;
- $V$ : az álláspont helyi függőlegese és a célzott irány közti függőleges szög;
- A gyűjtött adatok és pozicionált koordináták közti összefüggést az 5. ábra szemlélteti.



5. ábra. A geodéziai és topográfiai pontmeghatározás módszerének elve

A koordináták számításának általános matematikai modelljét a mért adatok ( $S, V, H$ ) és a ( $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ ) koordináta különbségek közti összefüggés határozza meg:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_{P_S-P_V} = \begin{pmatrix} \sin V \cdot \cos H \\ \sin V \cdot \sin H \\ \cos V \end{pmatrix}_{P_S-P_V} * S$$

### 3.2. A pontok pozicionálása a fotogrammetriában

A fotogrammetria, a modern tudomány egyik összetevője, biztosítja a valós világ geometriai tulajdonságainak elméleti és gyakorlati meghatározását az arról készült fényképek alapján. Az 1-100m-ről készített fényképek felhasználása az ún. közelfotogrammetria terén kerül sorra. A fotogrammetria ezen ágát a világon széles körben használják a valós világ bármely összetevőjének pontos felmérésére. Ugyanakkor a közelfotogrammetria alkalmazható ezek időbeli mozgásvizsgálatára és esetleges deformációinak követésére.

A fotogrammetriai munkák eredményei közül egy választott derékszögű koordináta rendszerben pozicionált pontok pozicionálási értékeire  $C_R(X Y Z)$  fektetjük a hangsúlyt. A digitális közel fotogrammetria pozicionálási módszere a többszörös transzformációkon alapszik, a következőképpen:

- a valós világ összetevői a 3D-s térben találhatóak és pontjainak helyzetét a  $C_R(X Y Z)$  még ismeretlen koordináták határozzák meg
- az adatgyűjtés digitális fényképek készítésével valósul meg. A fénykép egy 2D-s pespektivikus ábrázolás, melyet a valós világ összetevőit alkotó 3D-s térben elhelyezkedő pontok levetítésével kapunk. A pontok helyzetét a fénykép síkjában a fénykép rendszerében  $C_F(x y)$  megadott derékszögű síkkoordináták határozzák meg:

$$(\text{Valós világ összetevője})_{3D} \xrightarrow{\text{Digitális fényképezés}} (\text{Digitális fénykép})_{2D}$$

$$C_R(X Y Z)_{3D} \text{ koordináták} \xrightarrow{\text{Központi perspektív vetítés}} C_F(x_1 y_1)_{2D}, C_F(x_2 y_2)_{2D} \text{ koordináták}$$

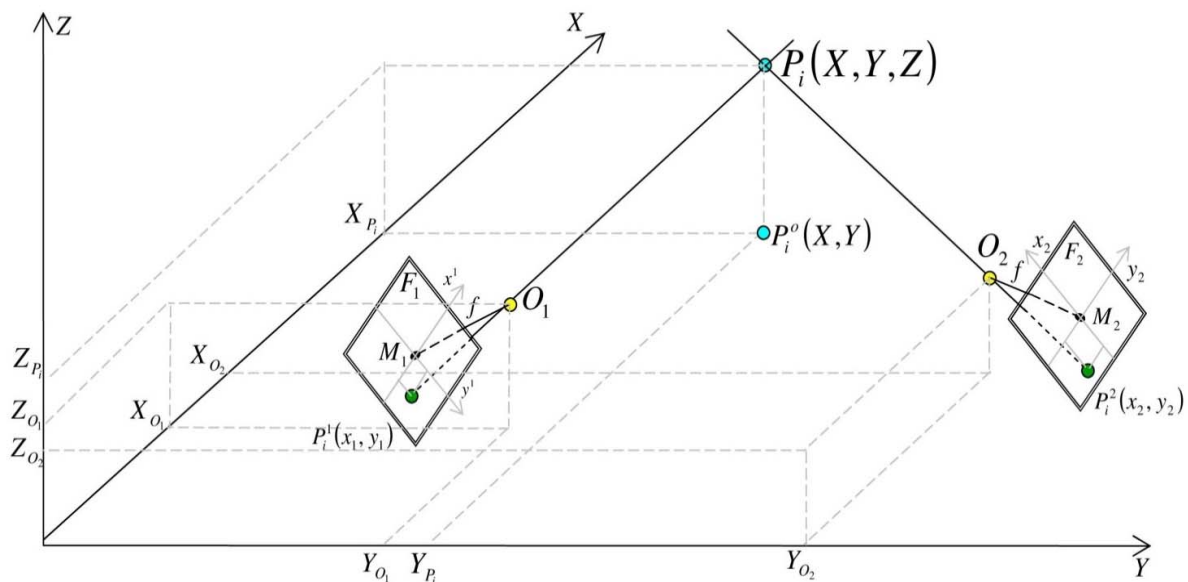
- az adatfeldolgozás biztosítja a pontok ismeretlen  $C_R(X, Y, Z)$  koordinátáinak meghatározását a fényképen mérhető  $C_F(x, y)$  koordináták alapján:

$$C_F(x, y)_{2D} \xrightarrow{\text{Adatfeldolgozás}} C_R(X, Y, Z)_{3D}$$

Az előbbi összefüggésnek nincs egyértelmű megoldása: két ismert adatból nem lehet egyértelműen kiszámolni egy pontot meghatározó három ismeretlent. A probléma kiküszöbölésére szükség van minimum még egy készített fényképre. Ebben az esetben a fenti összefüggést felhasználva az alábbi írható fel:

$$\left. \begin{array}{l} C_{F_1}(x, y)_{2D} \\ C_{F_2}(x, y)_{2D} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Adatfeldolgozás}} C_R(X, Y, Z)_{3D}$$

A fotogrammetriai módszereken alapuló helymeghatározás általános sémáját az 6. ábra szemlélteti.



6. ábra. A fotogrammetriai pozicionálás elve

$(X, Y, Z)_i$  : a  $P_i$  pont koordinátái a választott 3D-s referencia rendszerben

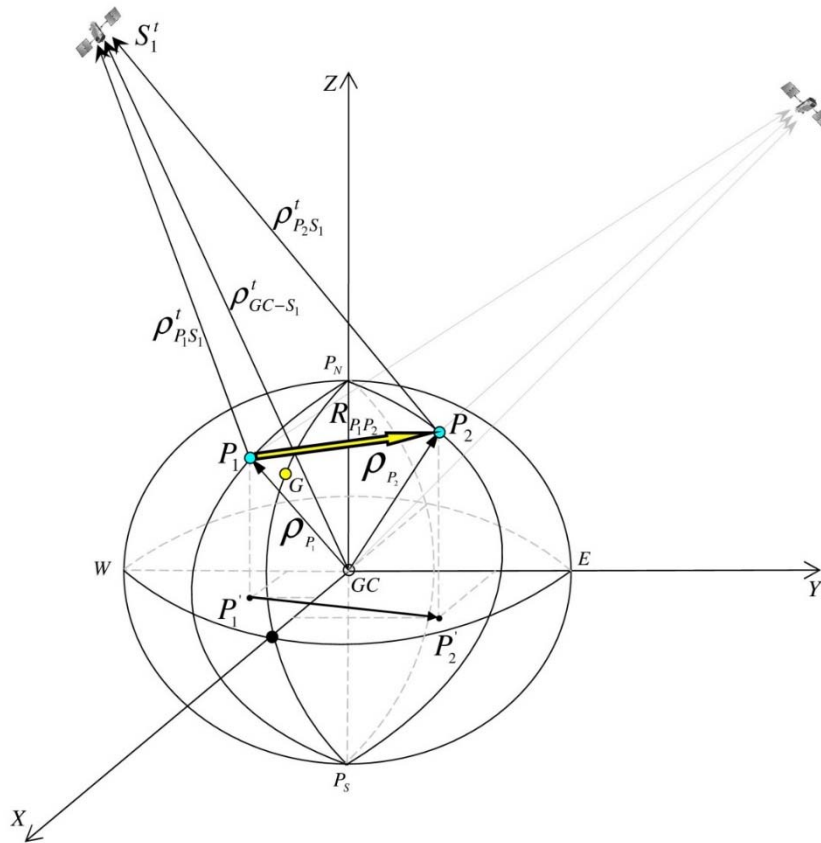
$(X, Y, Z)_{o_1, o_2}$  : a két fénykép vetítési központjának koordinátája a referencia rendszerben

$(x_1, y_1, f, x_2, y_2, f)_i$  : a  $P_i$  pont koordinátái a két  $F_1, F_2$  fénykép referencia rendszerében

$T$ : a három referencia rendszer közti kapcsolatot biztosító függvény

### 3.3. A pontok helymeghatározása műholdas GNSS technológiával

A GNSS műholdas helymeghatározó rendszer egy olyan modern technológiai rendszer, amely a megfelelő összetevőket és módszereket felhasználva pontos pozicionálást biztosít jelentős korlátozások nélkül. A GNSS módszer segítségével egy pont helyzetét egy 3D-s ortogonális geocentrikus referencia rendszerben meghatározható, ha ismertek egy  $t$  időben a műholdak koordinátái és ugyanabban a  $t$  időben a mért pont és a műholdak közti távolság. A módszer elvét a 7. ábra szemlélteti.



7. ábra. A műholdas helymeghatározás elve

$$\bar{\rho}_{P_1} + \bar{\rho}_{P_1 S_1}^t = \bar{\rho}_{GC-S_1}^t \Rightarrow \bar{\rho}_{P_1} = \bar{\rho}_{GC-S_1}^t - \bar{\rho}_{P_1 S_1}^t \Rightarrow \bar{\rho}_{P_1} = \bar{\rho}_{GC-S_1}^t - \bar{\rho}_{P_1 S_1}^t + \varepsilon^t$$

$\bar{\rho}_{P_1}$  → a  $P_1$  pontban felállított vevő pozícióvektora  
 $\bar{\rho}_{P_1 S_1}^t$  → a GPS vevő és  $S_1$  műhold közti távolság  $t$  időben  
 $\bar{\rho}_{GC-S_1}^t$  → az  $S_1$  műhold pozícióvektora  $t$  pillanatban

$$\bar{\rho}_{P_2} + \bar{\rho}_{P_2 S_1}^t = \bar{\rho}_{GC-S_1}^t \Rightarrow \bar{\rho}_{P_2} = \bar{\rho}_{GC-S_1}^t - \bar{\rho}_{P_2 S_1}^t \Rightarrow \bar{\rho}_{P_2} = \bar{\rho}_{GC-S_1}^t - \bar{\rho}_{P_2 S_1}^t + \varepsilon^t$$

$$\bar{\rho}_{P_1} + \bar{R}_{P_1 P_2} = \bar{\rho}_{P_2} \Rightarrow \bar{R}_{P_1 P_2} = \bar{\rho}_{P_2} - \bar{\rho}_{P_1}$$

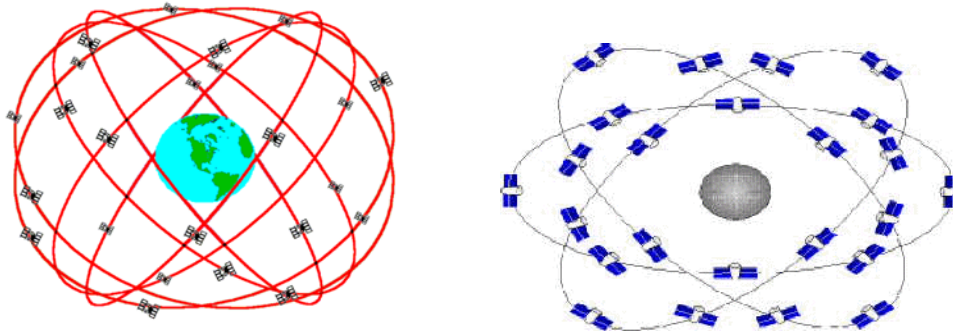
$$\bar{R}_{P_1 P_2} = \bar{\rho}_{GC-S_1}^t - \bar{\rho}_{P_2 S_1}^t + \varepsilon^t - \left( \bar{\rho}_{GC-S_1}^t - \bar{\rho}_{P_1 S_1}^t + \varepsilon^t \right)$$

$$\bar{R}_{P_1 P_2} = \bar{\rho}_{P_1 S_1}^t - \bar{\rho}_{P_2 S_1}^t$$

A módszer tehát a térbeli metszéseken alapul: egy pontból minimum három műhold felé kell távolságmérést végezni. A gyakorlatban viszont, az időmérés minőségi különbségeiből származó hibák kiküszöbölésére, minimum négy műhold felé mért távolságra van szükség.

A műholdas helymeghatározás a következő elveket követve alakult ki:

- a pontok pozicionálása egy derékszögű geocentrikus koordináta-rendszerben (WGS84) történik
- a helymeghatározó rendszert alkotó ismert ponthálózatot műholdak alkotják, melyek az alábbi konfigurációkban működnek bizonyos alrendszerekben (8. ábra):



8. ábra. A műholdak keringési pályáinak ábrája

- $t$  pillanatban a műholdak helyzete rögzítettnek vehető
- a műholdas helymeghatározás, egy  $t$  időben, a műholdak által küldött és a GPS vevő által fogadott jelek áramlását jelenti
- a jelek megfelelő feldolgozása révén megvalósul a vevő és műhold közti térbeli távolság meghatározása
- az álláspont koordinátái kiszámíthatóak, felhasználva minimum négy műhold ismert helyzetét és az ezek felé mért távolságokat.

### 3.4. A pontok helymeghatározása térszkennelési módszerekkel

A térszkennelés egy olyan pozicionálási eljárás, amely során a valós világ egyik összetevőjének folytonos felületén a használt mérőeszköz referencia rendszerében egy ponthalmaz helyzete határozható meg. Ezt a bizonyos struktúrával és sűrűséggel (felbontás) rendelkező ponthalmazt pontfelhőnek, az eszközt pedig, aminek a segítségével létrejön a pontfelhő, szkennereknek nevezzük.

A térszkennelési eljárások az utóbbi időben történt technológiai és informatikai fejlődéssel jöttek létre, melyek az alábbi elvekre támaszkodnak:

- a térszkennelés az elektromágneses fénysugarak használatán alapszik, melyek lehetnek lézer- vagy látható spektrumú sugarak
- a pontok pozicionálása a térszkennelés során hasonló a már bemutatott geodéziai és topográfiai módszerekéhez
- térszkennelő rendszerek lehetnek aktív vagy passzív rendszerek:
  - az aktív rendszerek esetében lézersugarakat bocsájt ki, melyek a mérendő felületet elérve visszaverődnek, és a visszavert sugarakat rögzítik. A leadott és fogadott sugarak megfelelő feldolgozása révén megkapjuk a pontokra vonatkozó pozicionálási adatokat. A műszer, mely képviseli az aktív rendszereket, a lézer szkennerek (9. ábra).



9. ábra. Az aktív térszkennelési rendszerek összetevői

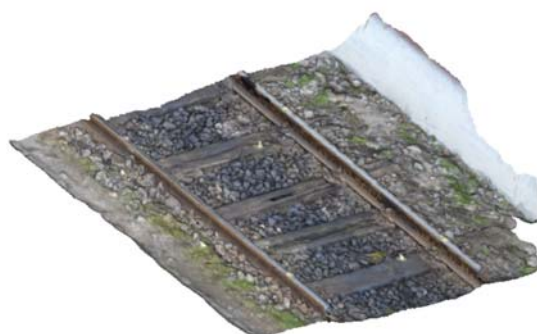


- a passzív rendszerek a látható spektrumú fénysugarakat használják a pontok helyzetének rögzítésére, a digitális fényképek révén. A fényképek megfelelő feldolgozása eredményeként megkapjuk a pontokhoz tartozó koordinátákat. Ezeket a passzív rendszereket a fotogrammetriai szkennerek képviselik (10. ábra).



10. ábra. A passzív térszkennelési rendszerek összetevői

- a térszkennelés eredménye a használt műszer referencia rendszerében pozicionált pontfelhő
- a nagy mennyiségű (millió nagyságrend) mért pont megköveteli az automatizált adatfeldolgozási rendszerek használatát, melyek képesek hatékonyan kezelni ezt az adattömeget, a megfelelő fizikai (hardware) és logikai (software) összetevőik révén.
- a meghatározó termékek, a pontfelhőket felhasználva, a nagy pontosságú térmodellek (11. ábra).



11. ábra. Egy vasúti pályaszakasz nagy pontosságú fotorealisztikus térmodellje

#### 4. A PÁLYAGEOMETRIA DIAGNOSZTIKÁJÁRA KIFEJLESZTETT AUTOMATIZÁLT TECHNOLOGIA

Mint minden technológia, ez a saját fejlesztésű technológia is négy komponensből tevődik össze:

- technikai: robot mérőállomás, prizmahordozó robot
- humán: megfelelő szintű tudással és tapasztalattal rendelkező földmérő mérnök
- informatikai: matematikai modellek és módszerek az ívkiigazítás megoldására, egyéni fejlesztésű adatfeldolgozó software
- szervezési: terepi és irodai tevékenységek együttesének egybehangolása.

A pályageometria meghatározásának első lépése az adatgyűjtés. Ennek során a vizsgált ívszakaszon, megfelelő sűrűségű pontokat mérünk, amelyek a legjobban leírják az ívet. A teljesen automatizált adatgyűjtés a már említett, kétkomponensű technikai összetevők felhasználásával valósul meg (12. ábra). A robot mérőállomásra vonatkozó jellemzők és működési elvének részletes leírása egy korábbi számban található meg (lásd: Műszaki szemle 64/2014 szám, 13-14 oldal).



12. ábra. Az adatgyűjtő rendszer működés közben

Figyelembe véve a megcélzott megoldandó feladatok jellegét és technikai feltételeit, egy olyan prizmahordozó robotot terveztem és építettem meg, amely megfelel ezen követelményeknek, ugyanakkor a mai technológiával lépést tartva, az általa felkínált technikai és műszaki lehetőségek tárházát is igénybe veszi. Ez a robot a **PRICARRO (Prism Carrier Railway Robot)** nevet kapta.

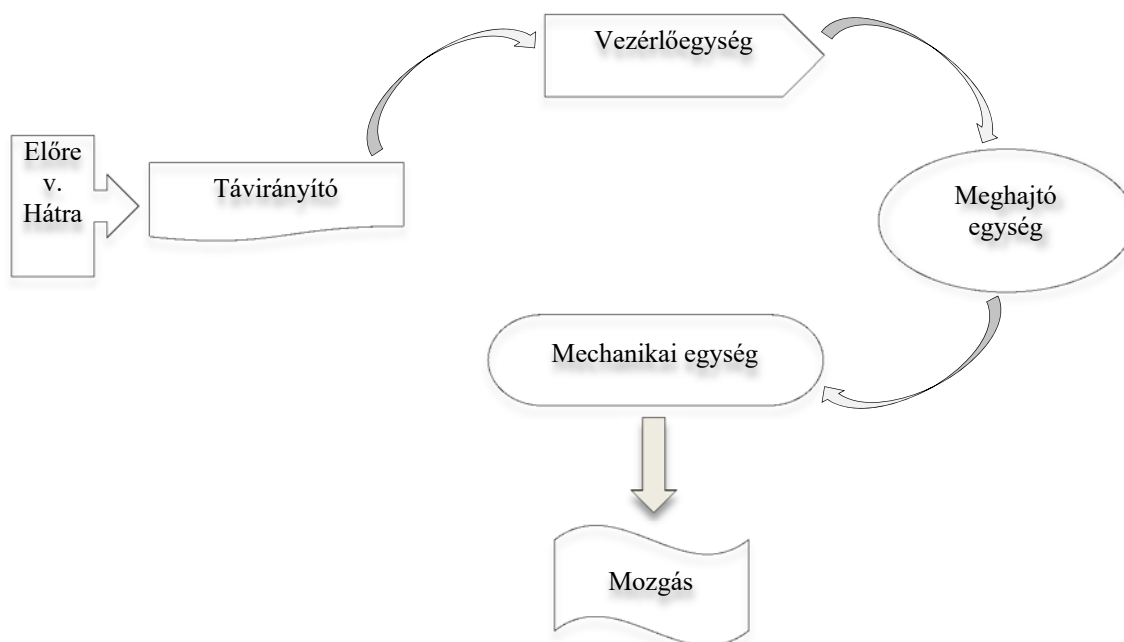
A Pricarro képes egy beépített motor és egy rádiótávvezérlő segítségével önállóan elindulni, megállni, előre/hátra közlekedni. Ugyanakkor, a robot mérőállomáshoz tartozó aktív prizma, illetve annak működését biztosító áramforrás szállítása is a feladatkörébe tartozik. A prizma helye a prizmahordozó roboton, a sínszál belső oldalának síkjával esik egybe, így oldva meg a mérés során a sín pontos helyzetének meghatározását. A robot ugyanakkor egy sor olyan feltételnek is eleget tesz, melyek a működési időtartamra és hatótávolságra vonatkoznak.

A Pricarro célirányos működése a 13. ábra alapján az alábbi fizikai összetevők révén valósul meg: meghajtó egység (I), mechanikai egység (II), vezérlő egység (III), távirányító (IV), akkumulátor (V), akkumulátor töltő (VI), aktív prizma és az azt működtető akkumulátor (VII).



13. ábra. A prizmahordozó robot fizikai összetevői

A szerkezet mozgása két görgőn történik, amelyek a sín felületén fekszenek. A stabilitást biztosító rugók szerepe az, hogy a robotnak három pontos illeszkedést biztosítsanak a sínszálon. A meghajtást egy elektromos motor biztosítja, mely egy görgő meghajtása révén forgó mozgásból lineáris mozgást biztosít. A motor működését a vezérlőegységen keresztül a távirányítóval lehet szabályozni, előre/hátra haladási irány megválasztásával.



14. ábra. A prizmahordozó robot működési folyamatábrája

A már pozicionált pontok koordinátáinak felhasználásával a gyakorlatban alkalmazott ívkiiigazítási módszer elvégezhető egy általam írt program segítségével. A software a **RACUCALC (Railway Curves Calculator)** nevet kapta. A **DELPHI7** programozási nyelvben írt program képes kiszámolni és bemutatni az ívkiiigazítás eredményeit anélkül, hogy a felhasználó előzetes számításokat végezne.

A kiinduló adatok lehetnek:

- klasszikusan mért húrmagasság jegyzék
- pozicionált pontok koordinátái.

A program két megoldási eljárást kínál a felhasználónak:

I. Az első eljárás a hagyományos matematikai modellekre és módszerekre épül, kiinduló adat a húrmagasság, ami lehet mért (hagyományosan) vagy számított (koordinátákból). Mért koordináták esetén a program az ív helyzetét meghatározó pozicionálási pontokon keresztül a hűrok automatikus generálását végzi. (lásd: Műszaki szemle 64/2014 szám, 14-15 oldal).

II. A második eljárás a kiegyenlítő görbék matematikai modelljét alkalmazza kizárólag a mért koordináták felhasználásával. Ez az eljárás a mérnökgeodéziai gyakorlatban már jól ismert kiegyenlítő kör módszerén alapszik. Ha ezt a módszert más görbékre is alkalmazzuk, pl. valamely  $k$ -ad fokú polinom függvényekre, akkor a kiegyenlítő görbék sikeresen felhasználhatóak a vágányeltolások meghatározásában, mivel az átmeneti íveket bizonyos fokú függvényekkel írhatjuk le.

A továbbiakban a kiegyenlítő kör bemutatása kerül sorra. Egy megfelelően választott vonatkoztatási rendszerben értelmezett kiegyenlítő kör optimálisan illeszkedik a mért (ismert) pontokra. Meghatározásához három ismeretlen számítása szükséges:

- a középpont koordinátái:  $x_0, y_0$
- a sugár:  $r$

A feladat megoldásához az egyik módszer a legkisebb négyzetek módszere.

Jelen esetünkben, a vasúti pályáívek felmérésénél földmérési technológiával pozicionált pontok koordinátáiból indulunk ki, melyeket megfelelő sűrűséggel mérjük úgy, hogy azok minél jobban leírják az ívet. Ezen pontokon keresztül szerkesztett kiegyenlítő kör paramétereinek kiszámításához két megoldási lehetőséget tárgyalok:

A. Az első számítási megoldás a paraméteres egyenleteket felhasználva a következő lépésekben történik:

- a kör középpontja koordinátáinak és sugarának előzetes közelítő értékeinek számítása az (1), (2), (3) kifejezésekkel:

$$x_{mp} = \frac{m_{ij}x_{ij} - m_{jk}x_{jk} - y_{ij} + y_{jk}}{m_{ij} - m_{jk}} \quad (1)$$

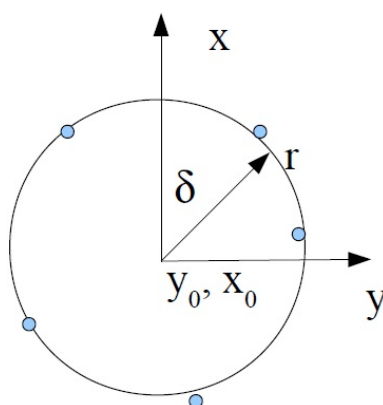
$$y_{mp} = m_{ij}(x_{mp} - x_{ij}) + y_{ij} \quad (2)$$

$$r_{mp} = \frac{\sum_{i=1}^3 \sqrt{(x_{mp} - x_i)^2 + (y_{mp} - y_i)^2}}{3} \quad (3)$$

- az  $n$  mért pontokra vonatkozó középponti szögek számítása:

$$\delta_i = \arctan\left(\frac{y_i - y_{mp}}{x_i - x_{mp}}\right) \quad i = 1..n \quad (4)$$

- kiegyenlítés  $x_0, y_0, r$  ismeretlenekre iterációs megoldással a kör paraméteres egyenlete alapján (15.ábra). A számítást a legkisebb négyzetek elve szerint végezzük.



15. ábra. A kiegyenlítő kör

A kiegyenlítés menete:

Minden  $i$  ponton átmenő kör paraméteres egyenleteiből kiindulva:

$$\begin{cases} x_i = x_0 + r \cdot \cos \delta_i \\ y_i = y_0 + r \cdot \sin \delta_i \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + r \cdot \cos \delta_i - x_i = 0 \\ x_0 + y_0 + r \cdot \sin \delta_i - y_i = 0 \end{cases} \quad (6)$$

A közvetítő egyenletek nem lineárisak. A végleges értékek kiszámításához egy iterációs folyamatot vezetünk be, amit az  $x_0, y_0, r$  előzetes értékei alapján végzünk a következőképpen:

A közvetítő egyenleteket az  $n$  pontokra felírva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos \delta_i \\ 0 & 1 & \sin \delta_i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cos \delta_n \\ 0 & 1 & \sin \delta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1 \\ -y_1 \\ \vdots \\ -x_n \\ -y_n \end{bmatrix} = v \quad (7)$$

$$AX + l = v \quad (8)$$

Ebben a  $2n$  egyenletet tartalmazó egyenletrendszerben az ismeretlenek száma 3. Mivel  $2n > 3$ , az egyenletrendszer megoldásához a legkisebb négyzetek módszerét választottam:

$$[vv] = \min \quad (9)$$

E minimum feladat a normál egyenletrendszer generálásához és megoldásához vezet.

$$\begin{bmatrix} n & 0 & [\cos \delta_i] \\ 0 & n & [\sin \delta_i] \\ [\cos \delta_i] & [\sin \delta_i] & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-x_i] \\ [-y_i] \\ [-x_i \cos \delta_i - y_i \sin \delta_i] \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

$$NX + L = 0 \quad (11)$$

Figyelembe véve a normál egyenletrendszer struktúráját, megoldásához a Cramer módszert alkalmaztam. A megoldásokat az alábbi kifejezések adják:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\Delta x_0}{\Delta} \\ y_0 &= \frac{\Delta y_0}{\Delta} \\ r &= \frac{\Delta r}{\Delta} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Delta = n^2 - n([\cos \delta_i]^2 + [\sin \delta_i]^2)$$

$$\Delta x_0 = (n^2 - [\sin \delta_i]^2)[x_i] + [\sin \delta_i][y_i] - n[\cos \delta_i][x_i \cos \delta_i + y_i \sin \delta_i] \quad (13)$$

$$\Delta y_0 = [\cos \delta_i][\sin \delta_i][x_i] + (n^2 - [\cos \delta_i]^2)[y_i] - n[\sin \delta_i][x_i \cos \delta_i + y_i \sin \delta_i]$$

$$\Delta r = -n[\cos \delta_i][x_i] - n[\sin \delta_i][y_i] + n^2[x_i \cos \delta_i + y_i \sin \delta_i]$$

Az így kapott  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $r$  értékek akkor véglegesek, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\begin{aligned} x_0 - x_{mp} &\leq e \\ y_0 - y_{mp} &\leq e, \quad \text{ahol } e - \text{általunk meghatározott határérték} \\ r - r_{mp} &\leq e \end{aligned} \quad (14)$$

Abban az esetben, ha (14) nem teljesül, meg kell ismételni a (4), (12), (13) számításokat oly módon, hogy az ismételt számításokor az előzetes közelítő  $x_{mp}$ ,  $y_{mp}$ ,  $r_{mp}$  értéket az előző iterációból nyert  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $r$  értékekkel helyettesítjük.

Felhasználva a véglegesnek elfogadott értékeket, számíthatóak a  $v^x$ ,  $v^y$  javítások, azaz a vágányeltolások:

$$\begin{aligned} v_i^x &= x_i^v - x_i \\ v_i^y &= y_i^v - y_i \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}x_i^y &= x_0 + r \cdot \cos \delta_i \\y_i^y &= y_0 + r \cdot \sin \delta_i\end{aligned}\quad (16)$$

B. A második számítási megoldás a kiegyenlítő kör paramétereinek meghatározására hasonlóan történik az előző esetben leírtak alapján, azzal a különbséggel, hogy mivel lineáris közvetítő egyenleteket használunk, a kör paramétereit közvetlenül a kiegyenesítésből megkaphatjuk, anélkül, hogy a középpont koordinátáknak, illetve a sugárnak előzetes közelítő értékeket számítottunk volna.

Első lépésben tehát kiindulunk a kör lineáris egyenletéből:

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 = r^2 \quad (17)$$

Figyelembe véve, hogy az egyes pontoknak a kiegyenlítő körtől mért távolsága sugárirányú, ezért a javítási egyenlet a következő alakban írható:

$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 = (r - v_i)^2 \quad (18)$$

Bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$z_0 = -\frac{1}{2}(x_0^2 + y_0^2 - r^2) \quad (19)$$

$$l = -\frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2) \quad (20)$$

$$v' = rv \quad (21)$$

Rendezve a (18) egyenletet, a javítási egyenlet a következő formában jelenik meg:

$$v' = x_i x_0 + y_i y_0 + z_0 + l \quad (22)$$

A kiegyenlítés során alkalmazott legkisebb négyzetek módszerének elvégzése után a kiegyenlített paramétereket az alábbi kifejezések adják:

$$x_0 = \frac{[y_i]^2 [x_i (x_i^2 + y_i^2)] + [x_i y_i] + [y_i (x_i^2 + y_i^2)]}{2([y_i]^2 [x_i]^2 - [x_i y_i]^2)} \quad (23)$$

$$y_0 = \frac{[x_i]^2 [y_i (x_i^2 + y_i^2)] + [x_i y_i] + [x_i (x_i^2 + y_i^2)]}{2([y_i]^2 [x_i]^2 - [x_i y_i]^2)} \quad (24)$$

$$z_0 = \frac{[x_i^2 + y_i^2]}{2n} \quad (25)$$

A kiegyenlítő kör sugara a következő összefüggéssel számítható:

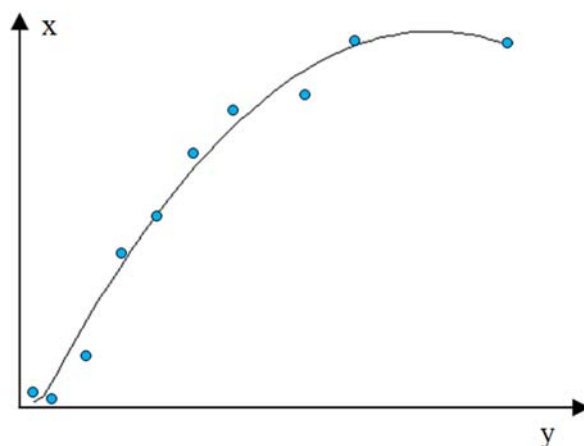
$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 2z_0} \quad (26)$$

A végleges javítások (vágányeltolások) értékeit pedig az alábbi kifejezés segítségével kapjuk meg:

$$v_i = -\frac{x_i \left(x_0 - \frac{1}{2}x_i\right) + y_i \left(y_0 - \frac{1}{2}y_i\right) + z_0}{r} \quad (27)$$

Abban az esetben, ha a mért pontokon keresztül egy olyan kiegyenlítő görbét szeretnénk szerkeszteni (16. ábra), melyet egy  $k$ -ad fokú polinom függvény határoz meg, akkor ennek paramétereit az adott fokú polinom lineáris egyenletéből kiindulva számítjuk ki:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k \quad \text{ahol } k \text{ – a polinom foka} \quad (28)$$



16. ábra. A kiegyenlítő parabola

A kiegyenlítő kör lineáris közvetítő egyenletekkel való kiszámításának lépéseit követve, megkaphatóak a keresett  $k$ -ad fokú polinom paraméterei.

A vasúti pályáivek szabályozására szolgáló kiegyenlítő görbék gyakorlati alkalmazása három lépésben történik:

- az adatgyűjtés során a vasúti pályáivek külső sínszálának belső felén megfelelő sűrűségű pontokat mérünk. Ez történhet klasszikusan, vagy teljesen automatizált módon, robot mérőállomással és prizmahordozó robottal
- az adatfeldolgozás során kiszámítjuk a mért pontok koordinátáit. A kapott koordináták, a továbbiakban a kiegyenlítő görbék meghatározásában bemenő adatokként szerepelnek. A számítási módszerek alkalmazásának egyik legegyszerűbb módja, ha automatizáljuk őket. Ennek érdekében ezen számítási módszereket programoztuk. Az általam írt program segítségével, a mért koordináták alapján a kívánt kiegyenlítő görbe kiválasztása után, megkapjuk az illető görbe paramétereit, valamint a végleges javítások értékeit. Ezek a javítások a szükséges vágányeltolásokat jelentik
- az eredmények kiértékelése során elemeztük a kapott vágányeltolásokat, a görbe paramétereit, valamint az azokból származtatható görbületi elemeket.

## 5. KÖVETKEZTETÉSEK

A kifejlesztett technológia a most létező technikai, informatikai lehetőségek figyelembevételével kidolgozott automatizált rendszer, mely minimális emberi beavatkozást igényel. A méréshez szükséges személyek száma négyről akár egyre is csökkenhet, ami a munka hatékonyságának növekedését jelenti.

A kifejlesztett technológia előnyei:

- kiküszöbölődhetnek a jelenleg alkalmazott módszer és az ajánlott módszer közti különbségek: mért adatok gyűjtése és rögzítése, adatáramlás illetve automatizálás
- különösebb, nagy értékű anyagi befektetést nem igényel
- meggyorsítja és megkönnyíti az adatgyűjtés és adatfeldolgozás elvégzését, de az eredmények szempontjából is megbízhatóan lehet ezáltal dolgozni

Elemelve a gyakorlatban alkalmazott modern technológia révén kapott eredményeket kijelenthetjük, hogy a vasúti pályáivek szabályozására javasolt megoldás, a kiegyenlítő görbék használata, matematikai szempontból elfogadható. A gyakorlatban való alkalmazása viszont, a vasúttechnikai szempontokat figyelembe véve, további utólagos elemzéseket kíván meg.

A feldolgozó soft folyamatos fejlesztés alatt áll, nem csak az ívkiigazítás területén, hanem más jellegű, de a vasúti pályák problematikájához kapcsolódó megoldásokkal bővítve azt.

## IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Erdélyi M.: A kiegyenlítő görbék alkalmazása a vasúti pályaívek szabályozása terén, XVII. Földmérő találkozó, (ISSN 1843-1224), 2016, Déva
- [2] Siki Z: Regresszió számítás mérnökgeodézia feladatokban, Geomatikai közlemények 13:(2) pp. 49-54, 2010
- [3] Csepregi Sz. – Kádár I. – Papp E.: A kiegyenlítő kör meghatározása lineáris közvetítő egyenlettel, Geodézia és kartográfia, 39. Évfolyam, 1.szám, (ISSN 0016-7118), 1987, Budapest
- [4] Köllő G. - Erdélyi M.: Az ívszabályozás egy lehetséges megoldása, XIX. Nemzetközi Építéstudományi Konferencia, (ISSN 1843-2123), 2015, Csíksomlyó
- [5] <http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFittingPolynomial.html>
- [6] Köllő G. - Erdélyi M.: Az ívszabályozás egy lehetséges megoldása, Műszaki szemle 64. szám, (ISSN 1454-0746), 2014, Kolozsvár
- [7] <http://www.agt.bme.hu/tantargyak/mernlet/mernlet5.pdf>
- [8] <http://www.cg.info.hiroshima-cu.ac.jp/~miyazaki/knowledge/teche23.html>
- [9] Ferencz J. - Erdélyi M.: Az egyszemélyes mérési technológia a TRIMBLE 5605DRS ROBOT mérőállomással, IX. Földmérő találkozó, (ISSN 1843-1224), 2008, Székelyudvarhely
- [10] Nemesdy Ervin: Ívkiegyenlítés, 1964, Budapest
- [11] Ferencz J. - Erdélyi M.: MASTER CAD kft. a technológia fejlődés útján, XV. Földmérő találkozó, (ISSN 1843-1224), 2014, Arad
- [12] <https://www.cn.ca/-/media/Files/Customer-Centre/Track-Specifications/industry-track-inspection-en.pdf>