A lineáris algebra meghonosodása Erdélyben

(Ki tanított először lineáris algebrát Erdélyben?)

The Spreading of Linear Algebra in Transylvania

(Who First Taught Linear Algebra in Transylvania)

Răspândirea algebrei lineare în Transilvania

(Cine a predat pentru prima dată algebră lineară în Transilvania)

LŐRINCZ Annamária, OLÁH-GÁL Róbert

Sapientia, EMTE, Csíkszeredai Kar
lorincz.anika@yahoo.com, olahgalrobert@uni.sapientia.ro

Abstract

Gyula Farkas, a professor of mathematics in Cluj-Napoca, became the most-regarded result of linear optimization (Farkas-lemma), in the Cluj-Napoca mathematics school. The essence of our dissertation is to present Károly Szász (1798-1853) in 1839 in Aiud, discussed the linear equation systems [5]. It is likely that [5] is the earliest mathematical work in Transylvania in terms of linear algebra, given that only in 1844 Hermann Günter Grassmann (1809 - 1877) created the concept of n-dimensional vector spaces.

Rezumat

Pa baza activităţii profesorului Gyula Farkas din Cluj, cercetările lui privind optimizarea lineară (Lema Farkas) a devenit cel mai citat rezultat creat de şcoala de matematică clujeană. Scopul lucrării noastre este prezentarea faptului, că în 1839 la Colegiul Reformat din Aiud, Károly Szász (1798-1853), a discutat şi a rezolvat sisteme de ecuaţii lineare, într-un procedeu modern, ceea ce numim azi formulele lui Cramer. Putem afirma, că lucrarea [5] este primul tratat de algebra lineară în Transilvania.

Összefoglaló

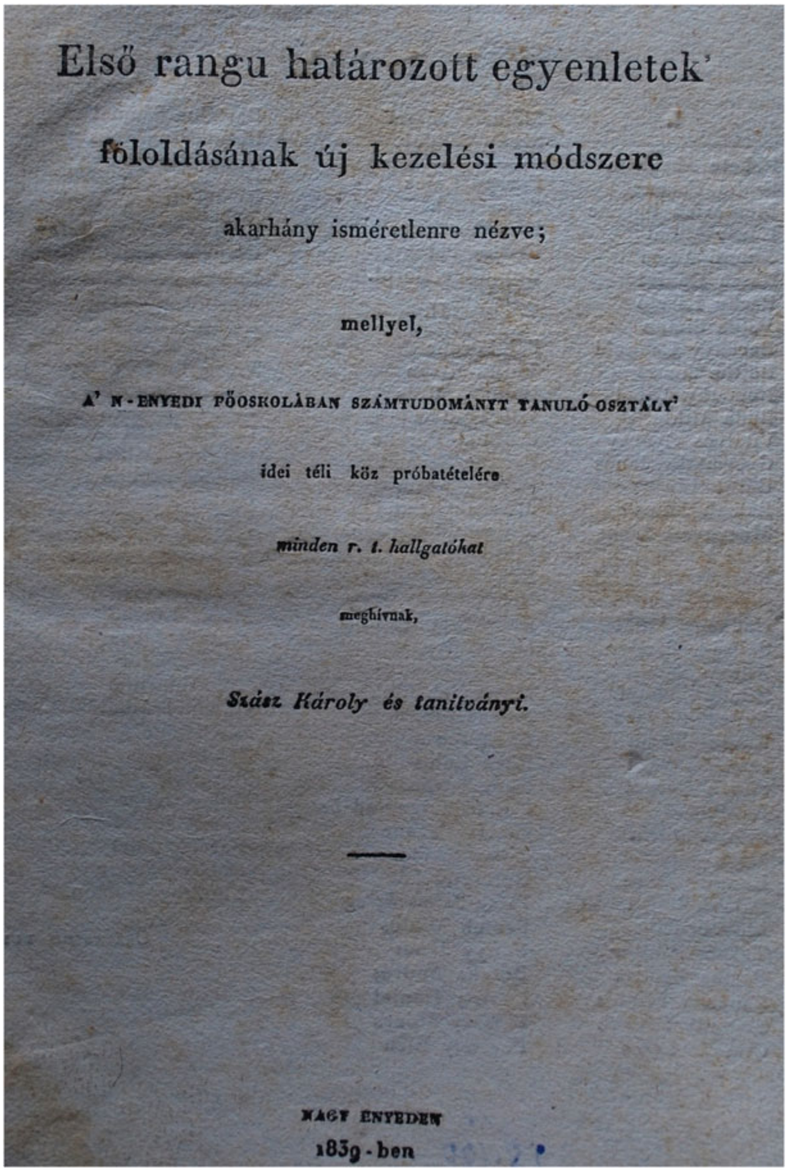
Farkas Gyula kolozsvári matematikaprofesszor munkássága révén, a lineáris optimalizáció (ún. Farkas-lemma), a kolozsvári matematikai iskola legidézettebb eredménye lett. Dolgozatunk lényege, hogy bemutassuk, Nagyenyeden már 1839-ben Szász Károly (1798–1853) tárgyalta a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságát [5]. Valószínű, hogy ez [5] a legkorábbi lineáris algebrát tárgyaló matematikai mű Erdélyben, tekintettel arra, hogy csak 1844-ben alkotta meg Hermann Günter Grassmann(1809. – 1877) az n-dimenziós vektorterek fogalmát

Farkas Gyula kolozsvári matematikaprofesszor munkássága révén, a lineáris optimalizáció (ún. Farkas-lemma), a kolozsvári matematikai iskola legidézettebb eredménye lett. Ezért nagyon fontos kutatási téma Farkas Gyula környezete matematikai ismereteinek feltérképezése. Illés Tibor, a BME Differenciálegyenletek tanszékvezetője, e témakör egyik szaktekintélye[1], fel is vetette azt a fontos kérdést, hogy vajon Farkas Gyula idejében, a kolozsvári egyetemen tanították-e a Kronecker-Capelli-tételt? A

[1] Illés Tibor, Oláh-Gál Róbert: Farkas Gyula nyomában: Szemelvények egy természettudós életéből és tudományos hatásából, Érintő (Elektronikus matematikai lapok), 2017., június. http://www.ematlap.hu/index.php/tudomany-tortenet-2017-06/506-farkas-gyula-4

Rouché-tételt, a Crammer-szabályt stb. Más szóval, az 1870-es, 1880-as években mit tudtak a lineáris algebrából a kolozsvári egyetemen. Az [2]-ben a szerzők azt is hangsúlyozták, hogy helyesebb volna a Cramer-szabályt **Leibniz–Cramer–Maclaurin**-szabálynak nevezni.

E nagyon fontos kérdésre részben választ adtunk a [2] tanulmányunkkal. Abból a tanulmányból kiderül, hogy Brassai Sámuelnek nagyon gyér tudása volt a lineáris algebrából, Brassai nem ismerte a Cramer-szabályt sem, ezzel szemben kartársa, az elméleti fizikát tanító Réthy Mór mint a németországi egyetemek hallgatója és doktora, jól ismerte a lineáris algebra legalapvetőbb tételeit. Farkas Gyula nagyon jó barátságban volt Réthy Mórral, sőt Réthy Mór érdeme, hogy Farkas Gyula lett az utóda Kolozsváron. Réthy Mór és Farkas Gyula levelezését nagyrészt közöltük[2], és abból kitetszik, hogy Farkas Gyula a lineáris egyenlőtlenségekkel kapcsolatos kutatásait részletesen átbeszélte Réthy Mórral. Másfelől [4]-ben az egyik szerző, azt is igazolta, hogy Schmidt Ágoston már értesült az éppen akkor kibontakozó Grassmann-algebráról és Grassmann tevékenységéről.


Első rangu határozott egyenletek'
föloldásának új kezelési módszere
akarhány ismeretlenre nézve;
mellyel,
A' N-ENYEDI FŐOSKOLÁBAN SZÁMTUDOMÁNYT TANULÓ OSZTÁLY'
idei téli köz próbatételére
minden r. t. hallgatókat
meghívnak,
Szász Károly és tanitványi.

NAGY ENYEDEN
1839-ben

Szász Károly művének fedőlapja

[2] Oláh-Gál Róbert: Források az erdélyi magyar matematikai élet 1785–1918 közötti időszakának történetéhez, Ed. MATI Magyar Tudománytörténeti Intézet, Budapest, 2015., 196 pg.

E dolgozatokhoz képest éppen azért nagyon meglepődtünk, mikor felfigyeltünk arra, hogy közel 40 évvel Farkas Gyula kolozsvári tevékenysége előtt, Enyeden, id. Szász Károly, már tudott, és tanította a lineáris egyenletrendszerek megoldását [5]. Igaz nem Cramer-szabály szerint, hanem Bézout-eredménye alapján.

A szerzők kikérték Sándor József kolléga véleményét. Sándor József válasza: „Valóban, E. Bézout (1730–1783) foglalkozott egyenletrendszerekkel is, és felfedezte a kiküszöbölés módszerét (Eulertől függetlenül), és bevezette a determinánsokat is (de nem vizsgálta meg azok tulajdonságait). Bézout 1730-ban született, pont amikor MacLaurin dolgozata született, és ő csak 1764-ben vezette be a determinánsokat (tehát jóval Cramer után). Mindenesetre, logikus, hogy ha egy egyenlettel foglalkozik valaki, akkor több egyenlet is bejöhet. Később Bézout írt egy nevesebb könyvet (Théorie générale des Équations Algébriques, 1779), és ennek alapján szerezhetett információt Szász Károly. Az alábbi két címen [6], [7] többet is meg lehet tudni Bézout-ról, illetve a determinánsokról.” Tehát a fentiek alapján, és id. Szász Károly dolgozatának [5] áttanulmányozása után meggyőződhettünk, hogy Bézout kidolgozta a lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldását, amit ma a Cramer-szabály neve alatt tanítunk a középiskolákban és kötelező érettségi anyag matematikából. Egyelőre azt állíthatjuk, hogy ezt Erdélyben Szász Károly tanította először a nagyenyedi főiskolán (szeretnénk kiemelni, hogy abban az időben az enyedi kollégiumnak főiskolai jellege volt, mert református papokat képzett.)

Tekintve a téma fontosságát, hasznosnak és bizonyító erejűnek szánjuk, ha idézünk a Szász-féle disszertációból [5]. Azonnal a lényegre térünk, és idézzük azt, hogy Szász levezeti a mai szóhasználattal Sarrus- vagy háromszög szabályként ismert képleteket. (Ő ezt Bézout formuláinak nevezte):

„XIII.

Tegyünk már öszszehasonlítást. Bezout' formulája három ismeretlenre alkalmazva, ez:

$$z = \frac{ab^{1}m^{11}\ \ am^{1}b^{11}\ + ma^{1}b^{11}\ ba^{1}m^{11}\ + bm^{1}a^{11}\ - mb^{1}a^{11}}{ab^{1}c^{11}\ - ac^{1}b^{11}\ + ca^{1}b^{11}\ - ba^{1}c^{11}\ + bc^{1}a^{11}\ - cb^{1}a^{11}}$$

”

Természetesen lehet végigkövetni Szász okoskodását és levezetését:

„I.

Akárhány ismeretlent magukban foglaló határozott első rangu egyenletek, a' következő kifejezési alakra vonhatók:

1. $a^{1}x + b^{1}y + c^{1}z + d^{1}v + \cdots = m^{1}$

2. $a^{11}x + b^{11}y + c^{11}z + d^{11}v + \cdots = m^{11}$

3. $a^{111}x + b^{111}y + c^{111}z + d^{111}v + \cdots = m^{111}$

4. $a^{1111}x + b^{1111}y + c^{1111}z + d^{1111}v + \cdots = m^{1111}$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

n. $a^{n}x + b^{n}y + c^{n}z + d^{n}v + \cdots = m^{n}$

Hol

1) *a' vonásozott betűk, meganyi ismeretes számok, jelesen:*
2) *a-b-c- 's több Abc' elejéről vettek, az ísméretleneknek, (x-y-z sat.) szorzójit (coefficiens), az m-ek, az ismeretlen nélküli darabokat jelentik.*
3) *Akarmellyik szorzó lehet ÷ vagy "-" jegyű egész szám, (de=0 most még nem); m-ek akarmik.*
4) *Jegyezzük meg: hogy az n-az utolsó sorban csak a' vonások' számát akarja jelölni,*

Ezekután már:

II.

Osszunk mindenik egyenletet az elől álló ismeretlen' (x) abban találtató szorzójával; lesz:

$$
\begin{array}{ll}
\textit{1.} & x+\frac{b^1}{a^1}\quad y+\frac{c^1}{a^1}\quad z+\frac{d^1}{a^1}\quad v+\cdots=\frac{m^1}{a^1}\\
\textit{2.} & x+\frac{b^{11}}{a^{11}}\quad y+\frac{c^{11}}{a^{11}}\quad z+\frac{d^{11}}{a^{11}}\quad v+\cdots=\frac{m^{11}}{a^{11}}\\
\textit{3.} & x+\frac{b^{111}}{a^{111}}\quad y+\frac{c^{111}}{a^{111}}\quad z+\frac{d^{111}}{a^{111}}\quad v+\cdots=\frac{m^{111}}{a^{111}}\\
\textit{4.} & x+\frac{b^{1111}}{a^{1111}}\quad y+\frac{c^{1111}}{a^{1111}}\quad z+\frac{d^{1111}}{a^{1111}}\quad v+\cdots=\frac{m^{1111}}{a^{1111}}\\
\vdots & \vdots\quad \vdots \qquad \vdots\\
\textit{n.} & x+\frac{b^n}{a^n}\quad y+\frac{c^n}{a^n}\quad z+\frac{d^n}{a^n}\quad v+\cdots=\frac{m^n}{a^n}
\end{array}
$$

‘s tehát

1) *Mindenikben x, 1 szorzót kap.*
2) *a’ többi ismeretlenek’ volt szorzójik, ‘s az ismeretes m-ek, annyi vonásu a-val osztatnak, hányadik az egyenlet, ‘s hány vonásuak valának előbbi szorzójik, ‘s tehát új szorzójik ollyan törtek, mellyekben, a’ felső és alsó, egyen számu vonalat hordoz.*

III.

Most vonjunk-ki, a’ másadikon kezdve, mindenik egyenletet a’ közvetetlen felette állóból, ‘s származnak ím ez új egyenletek:

$$
\begin{array}{ll}
\textit{1.} & \left\{\frac{b^1}{a^1}-\frac{b^{11}}{a^{11}}\right\}y+\left\{\frac{c^1}{a^1}-\frac{c^{11}}{a^{11}}\right\}z+\left\{\frac{d^1}{a^1}-\frac{d^{11}}{a^{11}}\right\}v+\cdots=\frac{m^1}{a^1}-\frac{m^{11}}{a^{11}}\\
\textit{2.} & \left\{\frac{b^{11}}{a^{11}}-\frac{b^{111}}{a^{111}}\right\}y+\left\{\frac{c^{11}}{a^{11}}-\frac{c^{111}}{a^{111}}\right\}z+\left\{\frac{d^{11}}{a^{11}}-\frac{d^{111}}{a^{111}}\right\}v+\cdots=\frac{m^{11}}{a^{11}}-\frac{m^{111}}{a^{111}}\\
\textit{3.} & \left\{\frac{b^{111}}{a^{111}}-\frac{b^{1111}}{a^{1111}}\right\}y+\left\{\frac{c^{111}}{a^{111}}-\frac{c^{1111}}{a^{1111}}\right\}z+\left\{\frac{d^{111}}{a^{111}}-\frac{d^{1111}}{a^{1111}}\right\}v+\cdots=\frac{m^{111}}{a^{111}}-\frac{m^{1111}}{a^{1111}}\\
\vdots & \vdots\quad \vdots\quad \vdots\quad \vdots\quad \vdots\quad \vdots\quad \vdots\\
\textit{n-1.} & \left\{\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{b^n}{a^n}\right\}y+\left\{\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{c^n}{a^n}\right\}z+\left\{\frac{d^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{d^n}{a^n}\right\}v+\cdots=\frac{m^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{m^n}{a^n}
\end{array}
$$

Tehát

1) *egygyel kevesebb egyenlet mint az imént;*
2) *X egyikben sincs;*
3) *Mindenik szorzó’ kifejezésnek is alakja szabályos, és pedig egyszerüen fölfogható szabályu. Áll t. i. mindenik “-“ jeggyel elválasztott két törtből, mellyek közül az elsőnek felsője, az ismeretlen’ eredeti szorzo’ betüje, alsója a, mind kettő annyi vonással, hányadik az egyenlet; a’ hátulsó törtszámdarab (a’ kivonandó) pedig, betüjire nézve, ugyan az mi az első, csakhogy mindenik betü ebben egygyel több vonásu. Szintúgy van a’ dolog a’ hátulsó részben álló ismeretesekkel, m-re nézve.*

IV.

Tovább folytatva a’ munkát, osszuk ismét mindenik egyenletet, a’ benne első ismeretlen’ szorzójával – lesz:

$$1.\quad y+\frac{\left(\frac{c^{1}}{a^{1}}-\frac{c^{11}}{a^{11}}\right)}{\left(\frac{b^{1}}{a^{1}}-\frac{b^{11}}{a^{11}}\right)}z+\frac{\left(\frac{d^{1}}{a^{1}}-\frac{d^{11}}{a^{11}}\right)}{\left(\frac{b^{1}}{a^{1}}-\frac{b^{11}}{a^{11}}\right)}v+\cdot=\frac{\frac{m^{1}}{a^{1}}-\frac{m^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^{1}}{a^{1}}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}$$

$$2.\quad y+\frac{\left(\frac{c^{11}}{a^{11}}-\frac{c^{111}}{a^{111}}\right)}{\left(\frac{b^{11}}{a^{11}}-\frac{b^{111}}{a^{111}}\right)}z+\frac{\left(\frac{d^{11}}{a^{11}}-\frac{d^{111}}{a^{111}}\right)}{\left(\frac{b^{11}}{a^{11}}-\frac{b^{111}}{a^{111}}\right)}v+\cdot=\frac{\frac{m^{11}}{a^{11}}-\frac{m^{111}}{a^{111}}}{\frac{b^{11}}{a^{11}}-\frac{b^{111}}{a^{111}}}$$

$$3.\quad y+\frac{\left(\frac{c^{111}}{a^{111}}-\frac{c^{1111}}{a^{1111}}\right)}{\left(\frac{b^{111}}{a^{111}}-\frac{b^{1111}}{a^{1111}}\right)}z+\frac{\left(\frac{d^{111}}{a^{111}}-\frac{d^{1111}}{a^{1111}}\right)}{\left(\frac{b^{111}}{a^{111}}-\frac{b^{1111}}{a^{1111}}\right)}v+\cdot=\frac{\frac{m^{111}}{a^{111}}-\frac{m^{1111}}{a^{1111}}}{\frac{b^{111}}{a^{111}}-\frac{b^{1111}}{a^{1111}}}$$

$$n\text{-}1.\quad y+\frac{\left(\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{c^{n}}{a^{n}}\right)}{\left(\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{b^{n}}{a^{n}}\right)}z+\frac{\left(\frac{d^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{d^{n}}{a^{n}}\right)}{\left(\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{b^{n}}{a^{n}}\right)}v+\cdot=\frac{\frac{m^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{m^{n}}{a^{n}}}{\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{b^{n}}{a^{n}}}$$

'S ismét jegyezzük meg a' szorzók 's a' tul részi isméretes' kifejezéseink szabályosságát.

1) *y szorzója mindenik egyenletben = 1*
2) *A' többi szorzók törtet képeznek mellyekben a' felső is alsó is öszszetett kifejezések, de tökéletesen hasonló formájuak; 's csak abban különböznek, hogy hol a' felsőben c-d (az illető isméretlen' eredeti szorzó betüje) áll, azon helyen, az alsóban, mindenütt b- (a' másadik ismeretlen szorzó betüje) van, de ez is ugyan annyi számu vonással mint amaz. A' harmadik eléforduló betű pedig itt is a, olly jelelésekkel alul mint fölül.*
3) *Éppen illy alaku az isméretes' kifejezése a' hátulsó részben m-re nézve.*

V.

A' fölvett úton lépjünk még tovább. Vonjuk-ki a' másadik egyenletet az elsőből, a' harmadikat a' másodikból, s' így tovább mindeniket a fölötte állóból; származnak a' következő már y nélküli, 's egygyel a' voltaknál kevesebb számu, egyenletek:

$$1.\quad \left(\frac{\frac{c^{1}}{a^{1}}-\frac{c^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^{1}}{a^{1}}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}-\frac{\frac{c^{11}}{a^{11}}-\frac{c^{111}}{a^{111}}}{\frac{b^{11}}{a^{11}}-\frac{b^{111}}{a^{111}}}\right)z+\left(\frac{\frac{d^{1}}{a^{1}}-\frac{d^{11}}{a^{11}}}{\frac{d^{1}}{a^{1}}-\frac{d^{11}}{a^{11}}}-\frac{\frac{d^{11}}{a^{11}}-\frac{d^{111}}{a^{111}}}{\frac{d^{11}}{a^{11}}-\frac{d^{111}}{a^{111}}}\right)v+=\frac{\frac{m^{1}}{a^{1}}-\frac{m^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^{1}}{a^{1}}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}-\frac{\frac{m^{11}}{a^{11}}-\frac{m^{111}}{a^{111}}}{\frac{b^{11}}{a^{11}}-\frac{b^{111}}{a^{111}}}$$

$$2.\quad \left(\frac{\frac{c^{11}}{a^{11}}-\frac{c^{111}}{a^{111}}}{\frac{b^{11}}{a^{11}}-\frac{b^{111}}{a^{111}}}-\frac{\frac{c^{111}}{a^{111}}-\frac{c^{1111}}{a^{1111}}}{\frac{b^{111}}{a^{111}}-\frac{b^{1111}}{a^{1111}}}\right)z+\left(\frac{\frac{d^{11}}{a^{11}}-\frac{d^{111}}{a^{111}}}{\frac{d^{11}}{a^{11}}-\frac{d^{111}}{a^{111}}}-\frac{\frac{d^{111}}{a^{111}}-\frac{d^{1111}}{a^{1111}}}{\frac{d^{111}}{a^{111}}-\frac{d^{1111}}{a^{1111}}}\right)v+=\frac{\frac{m^{11}}{a^{11}}-\frac{m^{111}}{a^{111}}}{\frac{b^{11}}{a^{11}}-\frac{b^{111}}{a^{111}}}-\frac{\frac{m^{111}}{a^{111}}-\frac{m^{1111}}{a^{1111}}}{\frac{b^{111}}{a^{111}}-\frac{b^{1111}}{a^{1111}}}$$

$$n\text{-}2.\quad \left|\frac{\frac{c^{n-2}}{a^{n-2}}-\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}}{\frac{b^{n-2}}{a^{n-2}}-\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}}-\frac{\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{c^{n}}{a^{n}}}{\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{b^{n}}{a^{n}}}\right|z+\left|\frac{\frac{d^{n-2}}{a^{n-2}}-\frac{d^{n-1}}{a^{n-1}}}{\frac{d^{n-2}}{a^{n-2}}-\frac{d^{n-1}}{a^{n-1}}}-\frac{\frac{d^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{d^{n}}{a^{n}}}{\frac{d^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{d^{n}}{a^{n}}}\right|v+\cdots=\frac{\frac{m^{n-2}}{a^{n-2}}-\frac{m^{n-1}}{a^{n-1}}}{\frac{b^{n-2}}{a^{n-2}}-\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}}-\frac{\frac{m^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{m^{n}}{a^{n}}}{\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}-\frac{b^{n}}{a^{n}}}$$

VI.

Fölösleges volna ezen müveleteket a' fölvett példán tovább is folytatni; mert az eddig mondottakból, 's az egésznek mentéből világos, hogy:

1) *Mindenik egyenletet, a' benne elől álló isméretlen' szorzójával osztva, azon isméretlen, mindenik emeletben 1(egy) szorzóval marad.*
2) *Mindenik egyenletet a' fölötte állóból kivonván, új egyenletek származnak; mellyeknek száma, valamint a' bennök maradt iméretleneké is, egygyel kevesebb, mint az előtt volt; 's így ezt a' két müveletet folytatva, utóljára egy isméretlenü egy egyenletre kell jutnunk.*
3) *Mindenik osztás után, mindenik isméretlen' szorzója, 's az isméretes tulsó rész is, egy tört, mellynek ismét, mind felsője mind alsója, több kevesebb darabokból van*

összeszerkezve, de mindenik között nagy formai, sőt betübeli egyezés is, mutatkozik; jelesen:

a) *Ugyanazon egyenletben, a' különböző ismeretlenek' szorzójit képező törtek, minden darabjaikban, 's ezoknak öszszerakásában, egymással, 's jelesen a' felső (numerator) az alsóval (denominator), tökéletesen egyeznek: kivevén a' a felsőnek (számlálónak) legfelső vízfektü sorába eső betüket, mellyek mindenik ismeretlennél az ő eredeti szorzó betüi. Vonásaikra, 's ezeknek rendjére nézve, 's ezeknek rendjére nézve, csak ugyan még ezen különbőző betük is egyeznek egymással; valamint a' több darabok, mind betüben, mind vonásban, mind helyezetben.*

b) *Ugyan azon ismeretlennek szorzóji a' különböző egyenletekben (a' mí leirásunk szerint az egymás alá csüngőlegesen eső szorzók) pedig, minden betüikben, 's azoknak öszszerakásában merőben egyezők; csak azzal a' változtatással, hogy mindenik szorzóban, minden betünek, egygyel több vonása van, mint ugyan annak, 's ugyan azon helyzetünek, a' fölötte állóban.*

c) *Épen igy áll a' dolog az egyenletek' másadik felét alkotó ismeretesek' kifejezéseivel; mellyek szintúgy törtek, 's felsőjök legfelső sorában csupa m- ket, egyébirány pedig épen afféle betüket, 's úgy elrakottakat, tartanak, mint a' szorzók ugyanazon egyenletben; 's a' bennök levő ezen betük, és az m-ek is, épen ugy vannak vonásozva, mint az egyenlet' többi darab jaiban, tehát lefelé szállólag egygyel egygyel növekedő vonás számmal mindenik.*

4) *Ha a' szorzókat, 's a' túlrészi ismeretest, akkor tekintjük, mikor a' III. 's V. alatt emlitett levonásokat az egyenletekkel megtettük: mindenik szorzónak alakja lesz egy különbség. melly egy törtből kivont más törtet mutat; 's mivel mindig egy egy szorzó, a' fölötte közvetlenül állóból, vonatik-ki, ezek pedig egymással, mint láttuk(VI.3.b.) betűikre, 's azoknak elrakására nézve merőben egyezők, 's cask annyiban különböznek, hogy az alsóban minden betünek egyel több vonása van, mint a' felsőnek: következik' hogy ezen kivonás igen egyszerüen úgy végbevihető, ha azt miből ki kell vonni, még egyszer maga maga után írjuk, 's közbevetvén egy "-"t, a' hátul irtban, minden betü' vonáskáját egygyel szaporitjuk. Szintúgy az ismeretes túlrésznél is.*

VII.

Ha már szemünk elött tartjuk a' közelebbi szám' 3-dik és 4-dik czikkjei alatt mondottakat; nem lesz bajos akarmellyik ismeretlen' szorzóját, a'mint az, az egyenletek' apasztásával rendre több darabu kifejezéssé alakul, leirni, a' nélkül hogy magát az ismeretlenek' egymásutáni kiapasztásának hosszadalmas munkáját, megtennők: vegyük a' végre például v-t.

Ennek szorzója az első egyenletben eredetileg d, első osztás után lesz* $\frac{d}{a}$ *; ebből már tudom hogyaz alatta álló* $\frac{d^1}{a^1}$ *(VI 3. b.), tehát az első kivonás után lesz:* $\frac{d}{a}-\frac{d^1}{a^1}$ *'s ugyan ezen egyenletben a' legelső tagé (mellyben az y az első ismeretlen, x a' levonással kienyészvén)* $\frac{b}{a}-\frac{b^1}{a^1}$ *melly az utolsótól cask abban különbözik, d-k hellyet b-ket tart, egyébiránt hasonszámu vonásokkal; ezzel osztva tehát (VI) lesz:*

$\frac{\frac{d}{a}-\frac{d^1}{a^1}}{\frac{b}{a}-\frac{b^1}{a^1}}$ *Már ismét kivonás következik, 's a' kivonandó nem egyéb mint ugyan az a' miből ki kell vonni, egygyel több vonásu betükkel, lesz tehát:*

$\dfrac{\frac{\frac{d}{a}-\frac{d^1}{a^1}}{\frac{b}{a}-\frac{b^1}{a^1}}-\frac{\frac{d^1}{a^1}-\frac{d^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^1}{a^1}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}}{}$ *Ezt újbó osztani kell az ő sorában levő legelső ismeretlen' szorzójával; ugyde ez is hason alaku (V. 3. a), 's csak a' felső sorba eső betükülönbözik, melly ott (már az x és y levén kienyészve) a' harmadik szorzó betü, az az c. Így tehát a' tenni valót nem véthetem el, ha ugyan ezen kifejezést maga maga alá leirom, cask annyi változtatással, hogy a' d-ék helyébe mindenütt c-ket teszek, egyébiránt ugyan azon vonásokkal, 's a' meglevőt (az osztandót) az újónan irttól (az osztótól), egy törtet jelelő közvonással elválasztom. Így lesz a' v új szorzójával:*

$$+\left|\frac{\dfrac{\frac{d}{a}-\frac{d^1}{a^1}}{\frac{b}{a}-\frac{b^1}{a^1}}-\dfrac{\frac{d^1}{a^1}-\frac{d^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^1}{a^1}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}}{\dfrac{\frac{c}{a}-\frac{c^1}{a^1}}{\frac{b}{a}-\frac{b^1}{a^1}}-\dfrac{\frac{c^1}{a^1}-\frac{c^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^1}{a^1}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}}\right| v = A$$

**Nyomtatási jegyek' hiánya miatt, ezen, 's több következő példákban minden betű egy egy vonással kevesebbet visel jegyül mint eddig.*

Mig a' v' szorzója ezen alakot öltötte magára, az alatt, a' vele szemben álló m-ből ez lett (VI. 3. c. 4)

$$+\left|\frac{\dfrac{\frac{m}{a}-\frac{m^1}{a^1}}{\frac{b}{a}-\frac{b^1}{a^1}}-\dfrac{\frac{m^1}{a^1}-\frac{m^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^1}{a^1}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}}{\dfrac{\frac{c}{a}-\frac{c^1}{a^1}}{\frac{b}{a}-\frac{b^1}{a^1}}-\dfrac{\frac{c^1}{a^1}-\frac{c^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^1}{a^1}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}}\right| = B$$

És ha már csak négy ismeretlenü négy egyenlettel müvelnénk, minthogy a' z, 1-szorzóra szorult, az utolsó levonását megtevén, a' z. kienyésznék, 's maradna egy egyenlet, egy ismeretlennel (v-vel); melly vég egyenletnek egyik felén, a' v' szorzója lenne (a'fönebbiek szerint), A, levonva belőle maga magát egygyel toldott vonásu betüvel, (mit A' val jegyzünk); tehát az első rész (A-A') v ; másfelöl, B-vel hasonló értelemben élve, B-B' ; 's tehát:

$$(A-A')\,v = B-B'az\,az$$

$$v=\frac{B-B'}{A-A'}$$

Vagy, ha tetszik akárhányadik ismeretlenre nézve általánosan formálni a' kifejezést, lesz:

$$w=\frac{\dfrac{\frac{\frac{m}{a}-\frac{m^1}{a^1}}{\frac{b}{a}-\frac{b^1}{a^1}}-\frac{\frac{m^1}{a^1}-\frac{m^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^1}{a^1}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}}{\frac{\frac{c}{a}-\frac{c^1}{a^1}}{\frac{b}{a}-\frac{b^1}{a^1}}-\frac{\frac{c^1}{a^1}-\frac{c^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^1}{a^1}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}}-\dfrac{\frac{\frac{m^1}{a^1}-\frac{m^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^1}{a^1}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}-\frac{\frac{m^{11}}{a^{11}}-\frac{m^{111}}{a^{111}}}{\frac{b^{11}}{a^{11}}-\frac{b^{111}}{a^{111}}}}{\frac{\frac{c^1}{a^1}-\frac{c^{11}}{a^{11}}}{\frac{b^1}{a^1}-\frac{b^{11}}{a^{11}}}-\frac{\frac{c^{11}}{a^{11}}-\frac{c^{111}}{a^{111}}}{\frac{b^{11}}{a^{11}}-\frac{b^{111}}{a^{111}}}}}{\begin{matrix} sat. & & sat. \\ sat. & & sat.\end{matrix}} \quad sat.$$

"

Eddig a hosszú szöveghű idézet, a dolgozat végén Szász Károly megadja a Crammer-szabályt *n=4* esetében is. De most eltekintünk annak idézésétől. Mindenütt megőriztük az eredeti jelölést és nyelvezetet.

Szász munkája (kisebb könyv) [5] 1839-ben jelent meg. Erdélyben, valószínű, hogy ez a legkorábbi lineáris egyenletrendszereket tárgyaló matematikai mű. Természetesen a matematikus világ akkor más ismerte a determináns fogalmát, a Cramer-szabályt is. A lineáris algebra mint fogalom, csak az idézett Szász-disszertáció [5] után 5 évre, 1844-ben jelent meg, és Grasmann[3] nevéhez fűződik.

Erdélybe szerintünk Réthy Mór hozta be elsőnek a determinánsok tanítását, és dolgozatunk lényege, bizonyítjuk vele, hogy talán Szász Károly tanította először a Cramer-szabályt középiskolában is (bár akkor a nagyenyedi kollégium főiskolai ranggal bírt). Persze még meg kellene vizsgálni a kolozsvári Királyi Líceum tanrendjét, de eddigi vizsgálódásaink alapján[4], nem tartjuk valószínűnek, hogy volt olyan matematikatanár, aki tájékozott lett volna a külföldi matematikai irodalomban. Mert, ha lett volna, akkor ő kapott volna kinevezést az 1872-ben létesült egyetemre. Ahogy már említettük, bizonyítható, hogy Brassai teljesen hibásan tanította a lineáris egyenletrendszerek megoldását még a egyetemen is az 1870–1880-as években [2], és nem tudott a most ismertetett Szász Károly-féle disszertációról.

Persze itt sok érdekes kérdés merülhet fel, például az, hogy analitikus mértannal is jól és sokkal szemléletesebben lehet tárgyalni két- illetve három dimenzióban a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságát. Szerintünk ezt az 1872-ben induló egyetemen, Réthy Mór és/vagy Schmidt Ágoston el is végezte. De középiskolában szinte biztosra állítjuk, hogy ez nem tanították! Így Szász Károly valóban megelőzte korát, felismerve vagy helyesebb kifejezéssel, megérezve a lineáris algebra óriási szerepét a matematika oktatásában.

A szerzők köszönetet mondanak Sándor József kollégának útbaigazításaiért és tanácsaiért.

Irodalomjegyzék

[1] Illés Tibor, Oláh-Gál Róbert: Farkas Gyula nyomában: Szemelvények egy természettudós életéből és tudományos hatásából, *Érintő* (Elektronikus matematikai lapok), 2017., június. http://www.ematlap.hu/index.php/tudomany-tortenet-2017-06/506-farkas-gyula-4

[2] Oláh-Gál Róbert—Sándor József: Brassai Sámuel, a kolozsvári egyetem első matematikaprofesszora, *Historia Scientiarium* 8, p. 9-17. (*Műszaki Szemle* 2011., nr. 54),

[3] Oláh-Gál Róbert: *Források az erdélyi magyar matematikai élet 1785–1918 közötti időszakának történetéhez*, Ed. MATI Magyar Tudománytörténeti Intézet, Budapest, 2015., 196 pg.

[4] Oláh-Gál Róbert: Schmidt Ágoston (1845–1902), *Matematikai Lapok,* 18. évf, 2. szám (2012) 26–34.

[5] Szász Károly és tanítványai: *Első rangu határozott egyenletek fölodásának új kezelési módszere, akárhány ismeretlene nézve*, Nagyenyed, 1839.

[6] Étienne Bézout, MacTutor History of Mathematics archive, http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Bezout.html

[7] Matrices and determinants, MacTutor History of Mathematics archive, http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Matrices_and_determinants.html

[3] Hermann Günter Grassmann (Poroszország, Stettin, 1809. április 15., – Stettin, 1877. szeptember 26.) német matematikus, algebrista, filológus, nyelvész. Főképp a vektorfogalom általánosítása fűződik a nevéhez, ő vezette be az absztrakt n-dimenziós vektor fogalmát (és értelmezte a velük való műveleteket). az 1844-ben megjelent Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik (Egyenes kiterjedéstan, a matematika egy új területe). Ez a lineáris algebra születési dátuma. A dolog érdekessége, hogy Grasmann elküldte a megjelent művét Gaussnak és Möbiusnak, de egyik sem értékelte a művét, nem látták meg benne az n-dimenziós lineáris tér óriási szerepét és hatását a matematika fejlődésére.

[4] Lásd Varga Júlia: A Kolozsvári Királyi Líceum hallgatósága 1784–1848., Budapest, 2000. ELTE Levéltára.