

Bolyai-kutatásaim összefoglalása. A hiperbolikus sík beágyazhatósága euklideszi terekbe¹

Summary of my Bolyai research. Embeddability of the hyperbolic plane in Euclidean spaces

OLÁH-GÁL Róbert

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Csíkszeredai Kar
olahgalrobert@uni.sapientia.ro

Abstract

I endeavour to briefly summarize my research on Bolyai and the embeddability of the hyperbolic plane into Euclidean spaces; however, interested readers can find a more detailed discussion in my latest books: Bolyai Summary and A Youth Book on the Bolyais. (Róbert Oláh-Gál: Bolyai-sommázat [Bolyai Summary], Pro-Print Publishing, Miercurea Ciuc, 2021, p. 350, ISBN 978-606-556-146-5. and Róbert Oláh-Gál: Gyerekeknek a Bolyaiakról [About the Bolyais for Children], Pro-Print Publishing, Miercurea Ciuc, 2022, p. 80, ISBN 978-606-556-162-5.) For those who are more interested in the mathematical work of the Bolyais, I recommend the book I co-authored with my colleague József Sándor: Selections from the Mathematical Manuscripts of the Bolyais. (Róbert Oláh-Gál – József Sándor: Szemelvények a Bolyaiak matematikai kézírataiból [Selections from the Mathematical Manuscripts of the Bolyais], Pro-Print Publishing, Miercurea Ciuc, 2022, p. 129, ISBN 978-606-556-149-6.)

Keywords: Bolyai research, hyperbolic plane, Euclidean space, embeddedness

Kivonat

Bolyai-kutatásaimat és a hiperbolikus sík beágyazhatóságát az euklideszi terekbe témát igyekszem röviden összefoglalni, de bővebb kifejtését az érdeklődő olvasók megtalálhatják legújabb könyveimben: Bolyai-sommázat, Ifjúsági könyv a Bolyaiakról². Akiket a Bolyaiak matematikai munkássága érdekli inkább, azoknak ajánlom Sándor József kollégámmal írott könyvünket: Szemelvények a Bolyaiak matematikai kézírataiból³.

Kulcsszavak: Bolyai-kutatás, hiperbolikus sík, euklideszi tér, beágyazhatóság

1. TÉVHITEK BOLYAI FARKASRÓL

Néhány dolog Bolyai Farkasról, melyet pontosítani kell. Az apja id. Bolyai Gáspár szerette volna, ha fia a Selmecbányai Erdészeti Főiskolára iratkozik be, mert akkoriban a Dél-Erdélyben működő aranybányák jó megélhetést biztosítottak volna a fia számára. Bolyai Farkas rokona, báró Radák Ferenc, talán hajlandó lett volna fizetni Bolyai Farkas taníttatását a Bécsi Hadmérnöki Akadémián.

A Bolyaiakról keringő téves információkhoz tartozik az a tény is, hogy Bolyai Farkas azért nem nyerte el az 1820. január 30-án az Erdélyi Gubernium által kiírt az erdélyi kamarai erdők főfelügyelője tisztséget, mert református vallású volt! Egyszerűen azért nem nyerhette el Bolyai Farkas Erdély főerdészi hivatalát, mert az akkori osztrák birodalomban (akárcsak a mai Európai Unióban) volt egy olyan rendelet, hogy erdőkerülő,

¹ A szegedi Bolyai-emlékülésen, a Bolyai Intézetben elhangzott előadás (A hivatkozott esemény pontos időpontja: 2023. november 3. kezdési időpont: 11:00 óra, helyszín: SZTE Bolyai Intézet, Bolyai-terem, Szeged.) írott változata. <https://tab.mta.hu/szegedi-teruleti-bizottsag/esemenyek/2023/bolyai-emlekules-semmibol-egy-ujj-mas-vilagot-teremttem-bolyai-janos-1823-november-3>

² Oláh-Gál Róbert: *Gyerekeknek a Bolyaiakról*, Pro-Print Könyvkiadó, Csíkszereda, 2022. p.80., ISBN 978-606-556-162-5.

Oláh-Gál Róbert: *Bolyai-sommázat*, Pro-Print Könyvkiadó, Csíkszereda, 2021. p.350., ISBN 978-606-556-146-5.

³ Oláh-Gál Róbert – Sándor József: *Szemelvények a Bolyaiak matematikai kézírataiból*, Pro-Print Könyvkiadó, Csíkszereda, 2022. p.129., ISBN 978-606-556-149-6.

és bármilyen erdészi hivatalt csak szakképesített (okirattal rendelkező) szakember láthatja el. Ilyen okirattal Bolyai Farkas nem rendelkezett. Ez a tény azért fontos a Bolyai-kutatás szempontjából, mert 1816-ra Bolyai Farkas felfogásában, János fia jövőjét illetően egy pálfordulás történt. Ugyanis, akkoriban tértek át a rénes forintról a magyar forintra, és ez nagy pénzromlást eredményezett. Bolyai Farkas így már nem akarta fiát Göttingenbe küldeni, mert úgy gondolkodott, ha fiából Göttingenben egy kiváló matematikus is lesz, Erdélyben legfeljebb egy protestáns kollégiumban lehet professzor, tehát a saját rosszul fizetett professzori állása a legtöbb, amit elérhet. De ha elvégzi a Bécsi Katonai Akadémiát, és mérnöktiszt (netán ezredes, vagy tanár lesz a Bécsi Katonai Akadémián), akkor az ő professzori fizetésének akár a húszszorosát is megkaphatja. Lásd bővebben: <https://e-nepujas.ro/articles/a-bolyai-kutatas-mellektermeke-az-erdelyi-erdeszettoertenet-gyoengyszeme>

Tehát át kell értékeljünk azt a rögeszmét, hogy Bolyai Farkas azért nem küldte a fiát Gausshoz, mert nem válaszolt naiv hangvételű levelére. Ez is igaz, de 10 évre Bolyai Farkas ezen kérésére a nehéz anyagiak miatt döntött úgy, hogy fiából inkább katonát csinál, mert azokat fizeti meg a legjobban az osztrák birodalom. (Máskülönben id. Böröczky Károly géométerprofesszortól hallottam azt a nagyszerű véleményt, hogy ezer szerencse, hogy Bolyai János nem került Gauss keze alá, mert Gauss Bolyai Jánosból nevelhetett volna egy nagyszerű „számelméletst”, de biztos, hogy Gauss mellett Bolyai János nem alkotta volna meg a nemeuklideszi geometriát!)

A bolyai Bolyai család ősi magyar család (levéltárilag visszavezethető 1296-ig), sajnos a történelem vihara elbánt velük, nem lettek arisztokraták, de mindenképpen a történelmi családok között kell számon tartani. Sikertől megrajzolnom a Bolyai-családfát, sőt a Bolyai utódokat is sikerült tisztáznom.

A Bolyaiak már a XVIII. században panaszkodnak, hogy nagyon nehéz a soruk az ősi szülőföldön. Akkor Dél-Erdélyben már többségében románok éltek, a földbirtokosok mind magyarok, a földet megmunkálók pedig románok. És ez a feudális világban, a kapitalizmus hajnalán óriási konfliktusokhoz vezetett. Bolyai Farkas nagyapját, Bolyai Gábort a felbőszült jobbágyságnak megölték. Bolyai Farkas is menekült Bolyából, és egész életében azon kesergett, hogy nem szeretne az „utálatos Bolyába” költözni.

Bolyai Farkasnak és Kőrösi Csoma Sándornak nagyon sok közös tanára volt a híres nagyenyedi Református Kollégiumban. Tőlük, Herepei Ádámtól, Herepei Jánostól, Nemegyei Jánostól kézirati hagyaték a Bolyai Farkas hagyatékában is fennmaradt⁴.

Bolyai Farkas és a magyargyerőmonostori Kemény Simon báró családja közötti kapcsolat is sok érdekes dologra fényt derít: Bolyai Farkasnak azért kellett még egy évet Göttingenben maradnia, miután a mentora és szponzora báró ifj. Kemény Simon elhagyta Göttingent, mert id. báró Kemény Simon ágyhoz kötött beteg lett, és így senki másnak nem volt joga készpénz felett rendelkezni. Miután elhunyt idős báró Kemény Simon alsó-fehér vármegye és Kolozsvár főispánja, fia ifj. báró Kemény Simon szinte már másnap megküldte Bolyai Farkasnak a hitelre felvett tartozását, így Bolyai Farkas az apostolok lován hazaindulhatott Göttingenből⁵.

2. TISZTÁZOTT KÉRDÉSEK BOLYAI JÁNOS ÉLETÉT ILLETŐEN

Bolyai Farkas nemcsak azért nem küldte fiát Göttingenbe, mert Gauss nem válaszolt ez irányú felkérésre, hanem azért is, mert az ő felfogásában is egy pálfordulás történt, és úgy látta a Bolyai-család anyagi felemelkedésének biztosítását, ha János fiából hadmérnök, vagy legalábbis katonatiszt lesz. A bécsi katonai akadémia abban az időben az Osztrák Monarchia elitképzője volt, talán ott tanítottak a legmagasabb szinten az egész monarchiában. Nagyon sokba került Bolyai János taníttatása (közel 8000 rénes forintba, amely egy erdélyi városban egy jó kőház ára volt).

Bolyai János megalkotta a Tér Tudományát, és szeretjük Gauss nyakába varrni, hogy nem hívta fel a tudományos világ figyelmét Bolyai János matematikai teljesítményére. Am a kép itt is sokkal árnyaltabb. Át kell értékeljünk Gauss szerepét, mert az apja, Bolyai Farkas is nagyon csúnya szavakat írt a fiáról Gaussnak, még 1834-ban is. Jánost hálátlannak és örültnek nevezi. Sajnos az apa és fia között a megromlott kapcsolatnak anyagi oldala volt, Bolyai János anyagi örökségén veszttek össze, és Bolyai Farkas a fiát is be akarta perelni azzal a váddal, hogy a Domáldon való gazdálkodás által megkárosította! Bolyai János nem élt 12 évet Domáldon, hanem csak maximum 6 évet, a többit Marosvásárhelyen töltötte. Bolyai János jó gazda volt Domáldon, csak éppen, nem az apja kívánsága szerint gazdálkodott, hanem a saját belátása szerint.

⁴Oláh-Gál Róbert: *A Bolyaiak a mindennapok sodrásában*, Pro-Print Könyvkiadó, Csíkszereda, 2016. , ISBN 978-606-556-088-8

⁵Oláh-Gál Róbert: *X-ek a Bolyaiak életében*, Világhírnév Kiadó, Kolozsvár, 2013, ISBN 978-606-93239-6-0.

Bolyai János matematikai kutatásait mindvégig az eredetiség és lényegre törés jellemezte. Téves az a róla kialakított kép, hogy a Tér Tudománya megalkotása után abbahagyta volna a matematikai kutatásait. Ma már gyermekeiről is pontosan tudjuk, mikor születtek, kik voltak. Három gyermeke viselte a Bolyai nevet, de a feleségének a házasságuk alatt született egy negyedik gyermeke is Klára Eliza.

Bolyai János nagyon szerette Marosvásárhelyt és egy helyen még szülővárosának is nevezte, noha tudjuk, hogy Kolozsváron született. Marosvásárhely és Bolyai János kapcsolata is árnyaltabb, mint ahogy eddig ismertük. Tudjuk, hogy hol lakott, és kikkel barátkozott Marosvásárhelyen nyugdíjas éveit alatt.

Végül Bolyai János szolgálóiról és orvosairól sok részletet tudhatunk.⁶ Mert ők voltak a legközelebbi kapcsolatban legnagyobb matematikusunkkal. Kár, hogy tőlük nem gyűjtötték be vallomásokat, visszaemlékezéseket. Az időben még nem volt ismert az „oral history”, és a feudális világban az sem volt elfogadott, hogy a szolga vagy szolgáló vallomást tegyen az uráról.

Érdekes Bolyai János Petőfi Sándort megidéző gondolata, és az a tény, hogy Petőfi Sándor utolsó ismert estélyén, Bolyai János sógornője, Bolyai Gergelyné is énekelt.⁷

„1849. július 30-án érkezett Bem tábornok kis táborával Székelykeresztúrra, s édesapámhoz a tisztek közül többen szálltak be, közöttük Zeyk Domokos is [...] Estefelé híre szaladt, hogy Petőfi is megérkezett, s fenn van a piacon. Ezen hírre édesapám rögtön felsietett a piacra, s ott a Novák Antal kereskedése előtt másokkal együtt beszélgetve megtalálta Petőfit, kit meghívott vacsorára: bivalytejes és túrós puliszkára. Ő a meghívást szívesen és örömmel fogadta el.

Nyolc órákor már javában folyt a vacsora, melyen többen vettek részt, így a polgári elemből a kivégzett Gálffy Mihály is, a Makk-féle összeesküvés egyik fővádoltja. Vacsora után, mely igen jó hangulatban folyt le, kimentek a kertbe, s ott letelepedve a padokra igen vidám társalgás közt csakhamar énekre gyűjtöttek (Bolyai Gergelyné⁸ rokonom és testvérem, Róza igen kellemes, szép hanggal rendelkeztek), A virágnak megtiltani nem lehet... című dallal nyitva meg. Ilyen hangulatban maradt a társaság 12 óráig. 12 órákor mindenki távozott szállására.” (Varga Zsigmond levele Gyárfás Endre földbirtokosnak)

3. A HIPERBOLIKUS SÍK BEÁGYAZHATÓSÁGA

Ezt a témát az a kérdés teszi érdekessé, hogy hol valósul meg a Bolyai–Lobacsevszkij-féle síkgeometria? És nagyon lehangoló a pontos matematikai válaszunk, mert a 3-dimenziós térben sehol! Ugyanis David Hilbertnek van egy nagy tétele, mely kimondja, hogy a hiperbolikus síkot (vagy a Bolyai–Lobacsevszkij-féle síkot), a maga teljességében nem lehet beágyazni a 3-dimenziós térbe.

Konstruktív módon csak a 6-dimenziós euklideszi térben lehet beágyazni. És ez a beágyazás is C végtelen osztályú, de nem analitikus. Konstruktív analitikus beágyazása a hiperbolikus síknak valamilyen véges dimenziójú euklideszi térbe a mai napig nem ismert! Ennek ismeretelméleti, filozófiai háttérét elég sok tanulmányomban, könyvemben kifejtettem, talán az érdeklődő olvasóknak a legkönnyebben elérhető:

<http://www.kaleidoscopehistory.hu/index.php?subpage=cikk&cikkid=805>

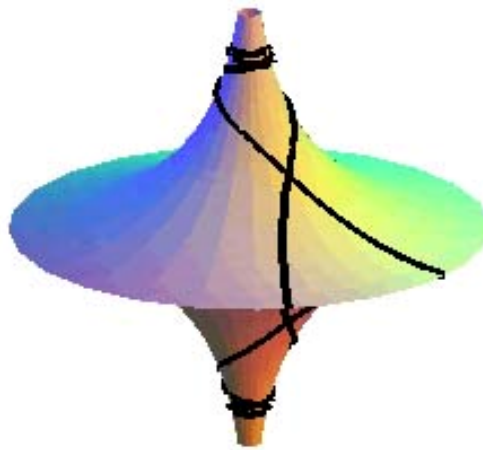
Bolyai-sommázat c. könyvemben is bőven kifejtem ezt a témakört.

Röviden összefoglalva az a lényeg, hogy a pszeudoszférán csak lokálisan (nagyon kis környezetben) valósul meg a Bolyai-geometria, de a Bolyai-egyeneseket sem lehet szemléltetni, mert a pszeudoszférán a Bolyai-egyenesek feltekerednek a kónuszos részre és önmagukat metszik. Márpedig a Bolyai–Lobacsevszkij-féle síkgeometriában is két egyenes csak egy pontban metszi egymást. A Bolyai-geometria a maga teljességében, természetes módon nem valósul meg, csak 3-nál magasabb dimenziós terekben.[1] Természetesen ez egy fizikai, filozófiai kategória, hogy mit jelent az, hogy nem valósul meg. Erre adok egy szemléletes magyarázatot, a 3-dimenziós térben nem lehet egy olyan szerkentyűt, „kütyűt”, modellt megadni, amelyen teljes egészében megvalósulna a Bolyai-geometria. Az alábbi ábrákon (lásd 1–3. ábrákat) bemutatjuk a pszeudoszférát, vagy a Dini-felületet, melyen lokálisan megvalósul a Bolyai–Lobacsevszkij-féle síkgeometria, de látható, hogy a pszeudoszférán a geodetikusok, vagyis a Bolyai-egyenesek felcsavarodnak a pszeudoszférára, holott a Bolyai-geometriában is két egyenes csak egy pontban kell, hogy metssze egymást.

⁶Oláh-Gál Róbert: *A Bolyaiak a mindennapok sodrásában*. (Érdekességek a két Bolyairól), Pro-Print Könyvkiadó, Csíkszereda, 2016. p.163., ISBN 978-606-556-088-8, Oláh-Gál Róbert: *X-ek a Bolyaiak életében*, Világhírnév Kiadó, Kolozsvár, 2013, ISBN 978-606-93239-6-0.

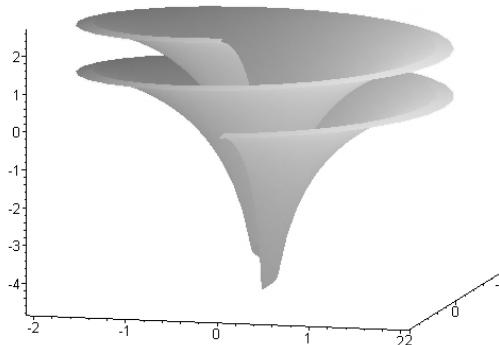
⁷Oláh-Gál Róbert: Petőfi utolsó vacsorája, *Népújtság*, 2017-08-11., vagy: <https://www.e-nepujtság.ro/articles/petofi-utolso-vacsoraja>.

⁸Bolyai Gergelyné született Beretzky Karolina.

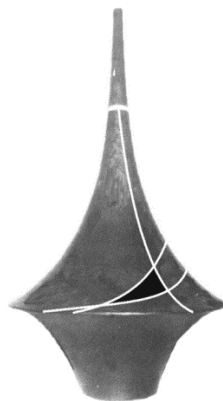


1. ábra: *Geodetikus (vagyis Bolyai-egyenes) a pszeudoszférán [2]*

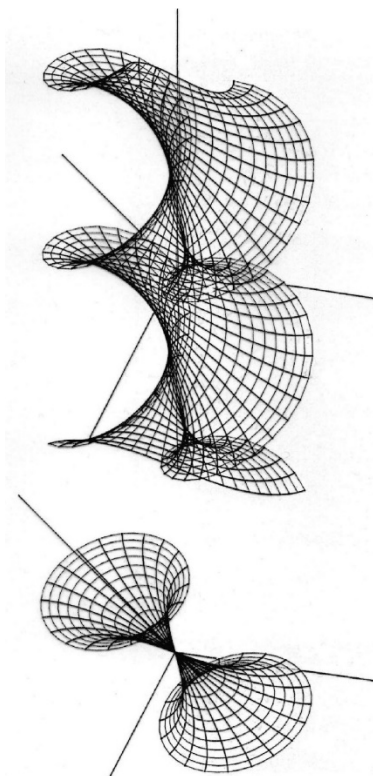
De ennél súlyosabb gondok is vannak a pszeudoszférával. (Például a teljes felszíne véges, pedig a Bolyai-sík is végtelen.) És ugyanez a helyzet az összes 3-dimenzióban létező konstans negatív görbületű felülettel. És David Hilbert bebizonyította [5], hogy a 3-dimenziós térben nincs olyan konstans negatív görbületű teljes felület, amelyen a teljes Bolyai-geometria megvalósulna. Mi a helyzet akkor a Poincaré-, vagy a Cayley–Klein-modellel és a többi logikai modellel? Ezek logikai modellek, nagyon jók szemléltetésre, a dolgok megértésére, de nem jók technikai alkalmazásokra. Ezek a logikai modellek főleg arra szolgálnak, hogy a Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria ellentmondás-mentességét igazolják.



2. ábra: *Dini-felülete, konstans negatív görbületű felület (lokálisan érvényesül rajta a Bolyai-geometria)*



3. ábra: *Geodetikus háromszög a pszeudoszférán. A háromszög szögeinek összege kisebb mint 180 fok*



4. ábra: *A Bolyai-sík egy tartományának beágyazása a 4-dimenziós euklideszi térbe, és annak paralel projekciója a 3-dimenziós térbe. A szerző megvalósítása [4]*

Szóval nincs olyan felület a 3-dimenziós térben, amelyen a Bolyai–Lobacsevszkij-féle síkgeometria a maga teljességében és a maga szépségében megvalósulna! Ezt a tényt sajnos a legtöbb Bolyai-geometriáról szóló előadás, tanulmány kihagyja. Pedig ez az oka annak, hogy a 3-dimenziós térben nincs olyan szerkentyű, amely a Bolyai-geometria alapján működik. Természetesen a matematikában, a speciális relativitáselméletben vannak a Bolyai-geometriának alkalmazásai (lásd Abraham A. Ungar kutatásait, aki a North Dakota State University professzora, és úttörő munkát végzett abban, hogy hidat képezzen a Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometria és Einstein speciális relativitáselmélete között). A kutatás lényege a „Gyro-algebra”. Einstein 1905-ös speciális relativitáselméletében a sebességek összeadása nem a megszokott klasszikus euklideszi összeadás szerint működik (pl. két fényközel sebesség nem adódik össze simán $(v_1 + v_2)$ -ként, mert a fénysebességet nem lehet túllépni). Az einsteini sebesség-összeadás matematikailag sem nem kommutatív, sem nem asszociatív.

Sokáig úgy tekintettek erre a műveletre, mint ami nem rendelkezik tiszta algebrai struktúrával. Abraham Ungar az 1980-as évek végén fedezte fel, hogy ez a művelet valójában egy teljesen új, algebrai struktúrát alkot, amelyet ő gyrocsoportnak és gyrovektortérnek nevezett el. A kutatásainak főbb pillérei ezen a területen:

1. A Bolyai-geometria algebrai nyelve: a klasszikus euklideszi geometriának a megszokott vektorterek jelentik az algebrai hátterét. Ungar megmutatta, hogy a Bolyai–Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometriának pontosan a gyro-vektorterek képezik a természetes algebrai alaptökéjét.

2. A Thomas-precesszió algebrai megfogalmazása: a relativitáselméletben ismert fizikai jelenséget, a „Thomas-precessziót” (amely a relativisztikus sebességek egymásutániságából fakadó forgást jelenti) Ungar lefordította egy tiszta algebrai operátorra, a gyrációra. Ezzel a fizikai hatással magyarázható meg a hiperbolikus geometria nem-asszociatív jellege.

3. Relativisztikus trigonometria és geometriai modellek: Ungar kidolgozta a gyro-trigonometriát, amellyel a hiperbolikus háromszögek oldalait és szögeit lehet számolni relativisztikus keretek között, és összekötötte a Poincaré-féle korongmodell, valamint a Beltrami–Klein-féle gömbmodell a relativisztikus sebesség-térrel.

4. Kozmológiai és fizikai alkalmazások: munkáiban megmutatta, hogy a relativisztikus tömegközéppont hiperbolikus geometriai modellezése új megvilágításba helyezheti a galaxisok tágulását, a csillagászati aberrációt, sőt még a sötét anyag és sötét energia jelenségének matematikai értelmezését is. Ungar legfontosabb szakkönyvei a témában:

1. Beyond the Einstein Addition Law and Its Gyroscopic Thomas Precession, szerző: Abraham A. Ungar, Alcím: The Theory of Gyrogroups and Gyrovector Spaces, kiadó: Springer (korábban Kluwer Academic Publishers), megjelenés éve: 2001, sorozat: Fundamental Theories of Physics (117. kötet), terjedelem: 419 oldal.
2. Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity, szerző: Abraham A. Ungar, kiadó: World Scientific Publishing Co. Megjelenés éve: 2008, terjedelem: 612 oldal.
3. Analytic Hyperbolic Geometry: Mathematical Foundations and Applications, szerző: Abraham A. Ungar, kiadó: World Scientific Publishing Co., megjelenés éve: 2005., terjedelem: 444 oldal.

De hagyjuk el ezt a filozófiai okoskodást, és beszéljünk arról, hogy Bolyai János axiomatikus tárgyalása meggyőzte a tudós világot arról, hogy a matematika logikai és nem empirikus tudomány. Bolyai János felfedezése után jelentek meg a többdimenziós sokaságok, az algebrai struktúrák, az absztrakt algebra, a variációszámítás, sok matematikai fogalmat sikerült tisztázni, miután rájöttek, hogy a matematikában nem lényeges a szemléletesség és fizikai alkalmazhatóság. [2] Tehát ez egy nagyon bátor állítás részemről, hogy Bolyai János lezárta a középkort, vagy lezárta a feudalizmust a matematikában. Éppen ezért kikértem Victor Pambucciannak, az arizonai egyetem professzorának véleményét⁹. Ő ugyanis a geometria alapjainak egyik legismertebb, világhírű kutatója, és Pambuccian professzor is egyetértett velem abban, hogy az Appendix, helyesebben szólva a Tér Tudományának a megjelentetésével lezárult a középkor a matematikában.

Tehát így tekintünk Bolyai János alkotására, mint ahogy az 1789-es francia forradalom lezárta a középkort a történelemben, úgy zárta le Bolyai János is 1823-ban a matematikában is a feudalizmust.

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] Blanuša, Danilo: Über die Einbettung hyperbolischer Räum in euklidische Räume, *Monatsh. Math.* 1955, 59, pp. 217–229. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF0130>
- [2] Oláh-Gál, Róbert: *Interesting facts about Transylvanian mathematicians*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. (ISBN 978-3-330-32569-2). <https://www.amazon.co.jp/-/en/R%C3%B3bert-Ol%C3%A1h-G%C3%A1l/dp/3330325690>
- [3] Oláh-Gál, Róbert: Surfaces with constant curvature in E^4 , *Acta Physica Hungaria New Series-Heavy Ion Physics* 1999, 10 (4), Budapest, pp. 369–378.
- [4] Oláh-Gál, Róbert: The n -dimensional hyperbolic spaces in E^{4n-3} , *Publ. Math. Debrecen*, 1995. 46, 3–4, pp. 205–213. https://publi.math.unideb.hu/paper/224/download/10_5486_PMD_1995_1406.pdf
- [5] Hilbert, David: Über flachen von konstanter Gausscher krümmung, *Amer. Math. Soc. Trans.*, 1901. nr. 2. pp. 87–99. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1901-1500557-5>

⁹<https://asu.zoom.us/j/7896148283>