Nem-euklideszi geometria a geodéziában

Non-euclidean Geometry in Geodesy

IVÁN Gyula

Lechner Nonprofit Kft., H-1111 Budapest, Budafoki út 59.
Tel: +36-1-460-4081, http://lechnerkozpont.hu

Abstract

Non-euclidean Geometry in Geodesy
In geodesy and surveying a paradigm change took place during the last decades. Field measurements were replaced by direct positioning, therefore the traditional observations, like angles and distances, were pushed back, by new techniques e.g. GNSS positioning on the field. Projective geometry is the geometry of a ruler, counter to Euclidean geometry, in which constructions can be made with a ruler and a compass. In projective geometry there are no angles, no parallels, no distances, only intersections, coincidence etc. Traditionally projective relations are used in photogrammetry. It resembles nature, since the mathematic model of photogrammetry, and the constructions of photogrammetric instruments are based on projective geometry. But projective geometry is an axiomatic based, independent geometry, one of the nonEuclidean geometries. It has a lot of opportunities in the usage in another part of our science. Since nowadays geodetic and surveying activities focus on direct positioning, potential use of projective geometry becomes more important.

Keywords: geodesy, transformation, projections, coordinate-reference systems, GIS

Kivonat

Nem-euklideszi geometria a geodéziában
Az elmúlt évtizedekben paradigmaváltás történt szakmánkban. A hagyományos terepi mérések helyét átvették a közvetlen helymeghatározási módszerek. Ezért a hagyományos észlelések, mint a szög és távolságmérések háttérbe szorultak. A projektív geometria az ún. „vonalzó geometria”, ellentétben az euklideszivel, mely összefüggéseit egy vonalzóval és körzővel vagyunk képesek megszerkeszteni. A projektív geometriában nincsenek szögek, párhuzamosok, távolságok, csak metszések és egybeesések. Hagyományosan projektív geometriai összefüggéseket a fotogrammetriában használunk. Ez természetes, hiszen a fotogrammetria matematikai modellje, illetve a fotogrammetriai műszerek szerkezete projektív geometriai összefüggéseket is használ. De a projektív geometria önmaga egy axiomatikus, független geometria, egyike a nem-euklideszi geometriáknak. Sok lehetősége van alkalmazásának a földmérés tudományának más területein is. Mivel a földmérési tevékenység napjainkban a közvetlen helymeghatározásra összpontosít, a projektív geometria alkalmazása fontosabb lesz a jövőben.

Kulcsszavak: felsőgeodézia, transzformáció, vetületek, vonatkoztatási rendszerek, GIS

1. BEVEZETÉS

A térképi vetületek közötti átszámítás napjainkra egyszerű feladattá vált, hiszen egy térinformatikai rendszerben egy gombnyomással meg tudjuk oldani, köszönhetően az informatika fejlődésének. Az átszámítási algoritmusok és transzformációs paraméterek e rendszerekbe be vannak „égetve”, illetve bizonyos ismeretleneket kézzel magunk is be tudunk állítani.

A geodétákat mindig is a „mérés” érdekelte, melyhez a legtöbb esetben távolságokat és szögeket mértek, melyekből kiszámították egy adott objektum geometriai tulajdonságait. Napjainkban, a legtöbb esetben, e mérések helyét a közvetlen helymeghatározás vette át (pl. GNSS, fotogrammetria), azonban ne feledjük, hogy pl. a GNSS helymeghatározás is igazából távolságmérésen alapul.

Jelen dolgozat bizonyos értelemben azért furcsa egy geodéziai konferencián, mert nem foglalkozik se távolságokkal, se szögekkel, se egyéb hagyományos fogalmakkal, melyet egy geodéta a mindennapi tevékenységében használ. (Csak a térképi vetületekhez szükséges távolság és a szög értékeket használjuk fel, melyek igazából a helyzeti információk megadásához szükségesek). Helyette a helyzeti, illeszkedési, metszési tulajdonságok illetve különböző transzformációk tulajdonságait elemzi, és abból von le következtetéseket. A geodéta szakmában természetesen használunk ilyen összefüggéseket, elsősorban a fotogrammetria területén, azonban máshol ritkán, vagy egyáltalán nem. Rámutatunk, hogy a helyzeti, illeszkedési és metszési relációkból felépített geometria (a projektív geometria) egy olyan általános megoldást ad a geometriai problémák megoldására, melynek speciális eseteit (pl. a transzformációk esetén) igazából minden geodéta használ, csak esetleg eddig nem tudott róla.

Bemutatjuk, hogy egy távolság, szög, párhuzamosság és merőlegesség fogalom nélküli geometria mégis megoldást tud adni olyan geodéziai probléma megoldására, mint az alapfelületek közötti transzformáció, mégpedig meglepően, egy tisztán síkbeli transzformáció segítségével.

2. A PROJEKTÍV GEOMETRIA

Jelen dolgozatnak nem célja, az összes, felhasznált összefüggést levezetni, megindokolni. sok ilyen összefüggést definícióként adunk meg. viszont ahhoz, hogy magát a cikket meg lehessen értetni a projektív geometriát nem ismerő olvasóval, szükség van egy rövid összefoglalóra a felhasznált relációkról. A projektív geometria, mint neve is jelzi, a vetítéssel nem változó tulajdonságok vizsgálatával foglalkozik. az euklideszi geometria olyan mennyiségei, mint a távolság és a szög a projektív geometria szempontjából érdektelen mennyiségek, hiszen a vetítés folyamán megváltoznak. a projektív geometria a nem-euklideszi geometriák egyike. [1]

A projektív geometria teljes elszakadását a "hagyományos geometriától" Felix Klein vitte véghez, aki a Feuerbachtól és a tőle függetlenül Möbiustól felfedezett "homogén koordináták" révén, algebrai alapot adott a projektív geometriának. Atrhur Cayley-vel együtt Klein a projektív geometria invariánsának, a kettősviszonynak, egy rendkívül szellemes alkalmazását fedezte fel, és ezzel szoros kapcsolat jött létre a projektív geometria és metrikus, valamint a Bólyai-Lobacsevszkij féle nem-euklideszi metrikus geometria között. [2]

Axiomatikusan 1899-ben Mario Pieri alapozta meg a projektív geometriát. [1]

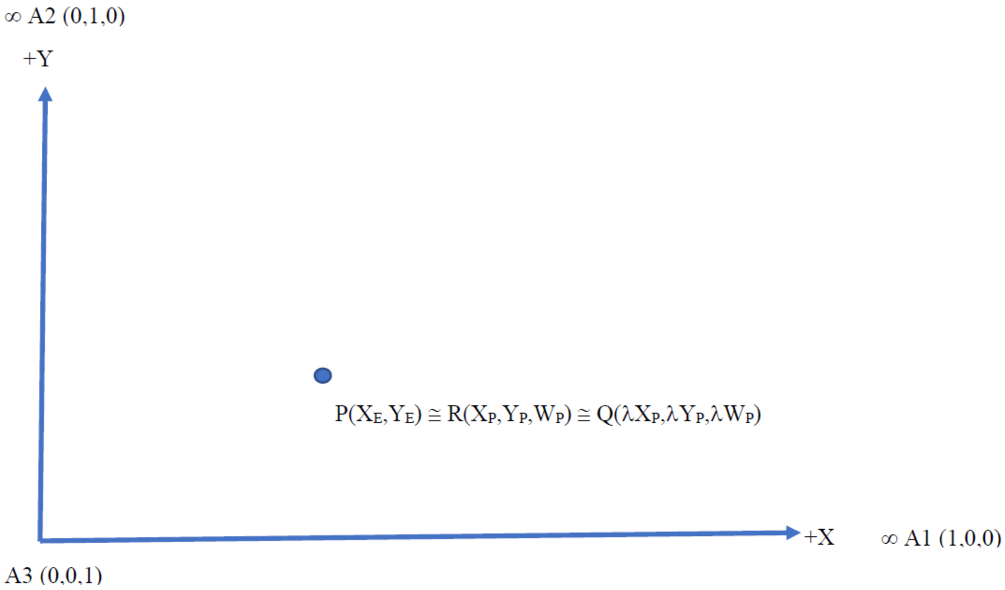
Felix Klein neve mellett kell megemlíteni híres székfoglaló előadását az erlangeni egyetemen (1872), az ún. Erlangeni programot, mely szerint a geometriák megkülönböztetésének az a kritériuma, hogy tételeik mely transzformáció csoportok mellett maradnak igazak. Ilyen értelemben az euklideszi geometria "főcsoportja" a mozgások folytonos csoportja, valamint a hasonlósági transzformációk; a hiperbolikus az egy kúpszeletet (a végtelen távoli pontok mértani helyét) változatlanul hagyó kollineációk részcsoportjával jellemezhetjük; a topológia főcsoportja a folytonos transzformációk csoportja, míg a projektív geometriát a kollineációk és korrelációk csoportjával jellemezhetjük. Mint a felsoroltakból kitűnik, **a projektív geometria tartalmazza az affin, az euklideszi és a nem-euklideszi geometriákat**, azonban az általános Riemann-geometria és a topológia a projektív geometriának nem része. [1]

3. ALAPFOGALMAK

3.1. Homogén koordináták

A projektív geometriában a helyzetet általában homogén koordináták formájában adjuk meg, melynek igazából egyszerű oka van, ugyanis a végtelen távolnak a projektív geometriában nincs kitüntetett szerepe. Azonban a hagyományos descartes-i koordináta rendszerekben a végtelen távolt nem lehet kezelni.

A homogén koordináták szemléltetésére tekintsük az 1. ábrát:



1. ábra. *A homogén koordináták*

A „hagyományos” derékszögű koordináta-rendszerben egy P pont helyzetét két koordinátájával (X_E,Y_E) adhatjuk meg. Vegyünk fel három pontot a síkban úgy, hogy az A1 jelű pont az X tengely végtelen távoli pontja, az A2 pont az Y tengely végtelen távoli pontja, míg az A3 pont a koordináta-rendszer kezdőpontja legyen. Helyezzünk el rendre, X_P, Y_P, W_P tömeget, az A1, A2 és A3 pontba. Ekkor a három tömeg súlypontja ugyanúgy meghatározza a P pont helyzetét a síkban, mint a descartes-i koordináták. Mivel súlypontról van szó, ha egy $\lambda \neq 0$ számmal megszorozzuk ezeket a koordinátákat, ugyanazt a pontot fogjuk kapni. Az (X_P, Y_P, W_P) számhármas a P pont homogén koordinátái ebben a homogén koordináta-rendszerben.

A az A3 pontba zérus tömeget helyezünk el, akkor az A1, A2, A3 pontokban elhelyezett tömegek súlypontja az A1-A2-t összekötő egyenesen lesz. Ezek pedig a két descartes-i koordináta tengely végtelen távoli pontjai, azaz a W_P=0 egyenes, a sík **végtelen távoli egyenese**.

A szabatos matematikai megközelítése a homogén projektív koordinátáknak lényegesen részletesebb, azonban a lényegüket ez a megoldás is reprezentálja.

A projektív síkban az egyeneseknek is koordinátáik vannak, akárcsak a pontoknak. Egy pont akkor van rajta egy egyenesen, ha teljesül a

$E^T P = 0$ reláció, ahol

- E^T – az egyenes homogén koordinátái vektora
- P – a pont homogén koordinátái vektora.

Ez a numerikus konstrukció lehetővé teszi a projektív geometria egy csodálatos tulajdonságának, a **dualitás elvének** megvalósítását.

A dualitás elve azt mondja ki, hogy a projektív síkban minden tétel, összefüggés igaz marad, ha az „egyenes” és a „pont” szavakat felcseréljük. Például:

- **Két egyenesnek egy metszéspontja van. (a duális pedig)**
- **Két pont egy egyenest határoz meg.**

A dualitás elve a projektív térben a pontok és a síkok között érvényes. Azaz:

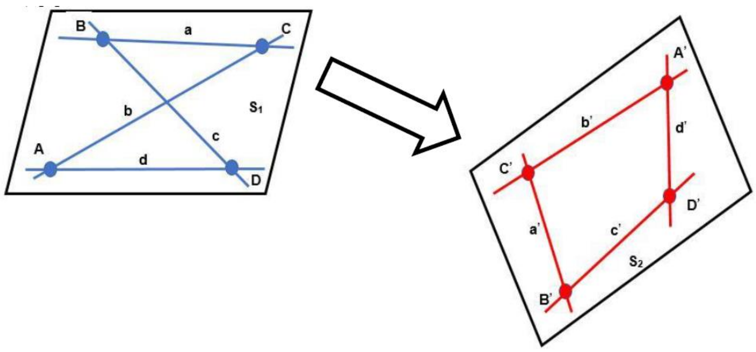
- **Három, nem kollineáris pont egy síkot határoz meg.**
- **Három, nem konkurens sík, egy pontot határoz meg.**

(Konkurens síkon olyan síkokat értünk, melyeknek azonos metszésvonala van).

3.2. Kétdimenziós projektív transzformációk

Feladatunk megoldásában kulcsfontosságúak a kétdimenziós projektív transzformációk, melyek a következők:

Legyen A_1, A_2, A_3, A_4 egy α síknak, A_1', A_2', A_3', A_4' pedig egy α' síknak négy, általános helyzetű pontja. Egy és csakis egy olyan kollineáció létezik, amely az α síkot az α' síkra úgy képezi le, hogy az A_i (i = 1,2,3,4) pontnak az A_i' pontot felelteti meg. (4. ábra) [3]



2. ábra. *Síkbeli kollineáció*

Amennyiben homogén, projektív koordináta-rendszerben akarjuk leírni a kollineációt, akkor a következő összefüggést használjuk:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ W \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ W' \end{bmatrix} \quad \lambda \neq 0, Det(C) \neq 0$$

ahol:

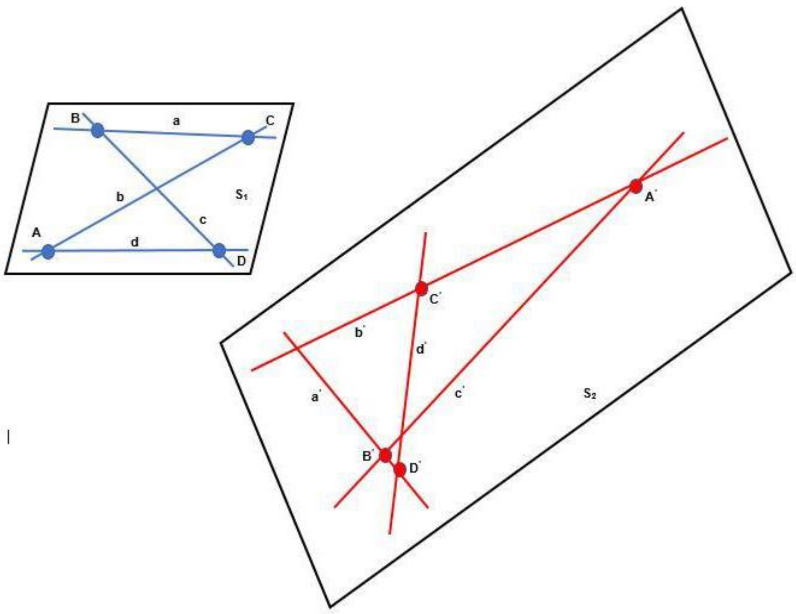
C a kollineáció mátrixa

(X,Y,W) az α sík egy pontja

(X',Y',W') az α' sík megfelelő pontja.

(3.2.1.)

Legyen A_1, A_2, A_3, A_4 egy α sík négy, általános helyzetű pontja, a_1', a_2', a_3', a_4' pedig egy α' síknak négy, általános helyzetű egyenese. Egy és csakis egy olyan korreláció létezik, amely az α síkot az α' síkra úgy képezi le, hogy az A_i (i = 1,2,3,4) pontnak az a_i' egyenest felelteti meg. (5. ábra) [3]



3. ábra. *Síkbeli korreláció*

Amennyiben homogén, projektív koordináta-rendszerben akarjuk leírni a korrelációt, akkor a következő összefüggést használjuk:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ W \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} \quad \lambda \neq 0, Det(C) \neq 0 \tag{3.2.2.}$$

ahol:

C a korreláció mátrixa

(X,Y,W) az α sík egy pontja

(x',y',w') az α' sík megfelelő egyenese.

A két transzformáció definícióját elemezve láthatjuk, hogy míg a kollineáció ponthoz pontot, egyeneshez egyenest rendel, addig a korreláció ponthoz egyenest és egyeneshez pontot. A homogén koordináták alkalmazása miatt egy egyszerűen, egy (3x3) mátrix segítségével leírhatjuk a fenti transzformációkat. A kollineációk és korrelációk a projektív térben is léteznek, annyi különbséggel, hogy mind a pontoknak, mind a nekik megfelelő síkoknak 4 koordinátájuk van. A térbeli kollineáció ponthoz pontot, síkhoz síkot, míg a térbeli korreláció ponthoz síkot, síkhoz pontot rendel.

A korrelációknak van egy speciális csoportja, a kétperiódusú korrelációk. A polaritás a sík önmagára való olyan korrelációja, amely megegyezik az inverzével. Tehát egy polaritás négyzete az identikus leképezés. A polaritásnak különös jelentősége van, hiszen a síkbeli polaritások önmagához konjugált pontjai és egyenesei kúpszeletet, míg a térbeli polaritások önmagához konjugált pontjai másodrendű felületet határoznak meg.

Megjegyezzük, hogy a projektív geometriában egyféle kúpszelet, a térben másodrendű felület, létezik. A kúpszeletek, másodrendű felületek csoportosítása pl. ellipszis, parabola, hiperbolaként az affin geometria feladata, a projektív geometriában (a végtelen távol nem kitüntetett szerepe miatt) erre nincs lehetőség.

4. ALAPFELÜLETEK KÖZÖTTI TRANSZFORMÁCIÓ PROJEKTÍV ÖSSZEFÜGGÉSEKKEL

Ha térképi vetületekről beszélünk, akkor definiálni szükséges egy alapfelületet, melyről a vetítés történik és egy képfelületet, melyre vetítjük az alapfelületi pontokat.

Az alapfelület általában a geoidot helyettesítő forgási ellipszoid, míg a képfelület egy sík, vagy síkba fejthető felület (általában kúp vagy henger). Hazánkban nagy hagyománya van a kettős vetítésnek, ahol a forgási ellipszoidot először egy Gauss-gömbre vetítjük, majd a Gauss-gömbi pontokat vetítjük síkba vagy síkba fejthető felületre. Ilyen kettős vetítéssel használtuk a sztereografikus vetületeinket (a gömbről síkra), a hengervetületeket (HÉR, HKR és HDR) (gömbről érintő hengerre) és ilyen az Egységes Országos vetületi Rendszer (EOV) is, csak az EOV esetén a henger belemetsz a gömbbe (redukált hengervetület).

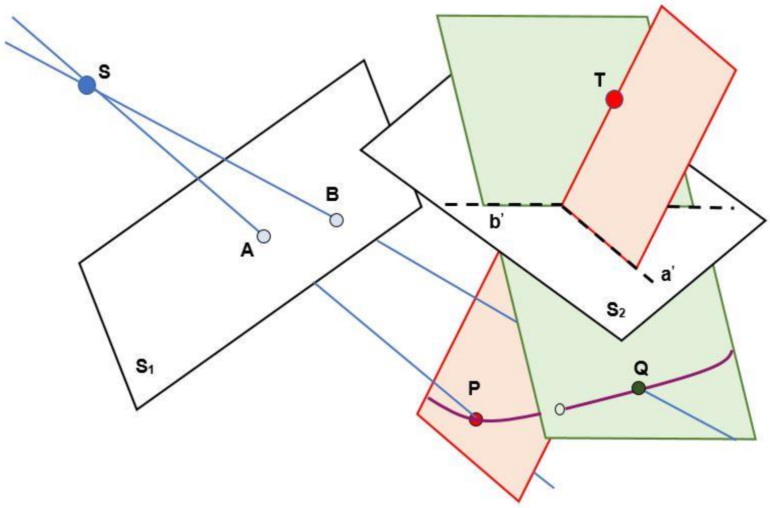
A vetületek közötti átszámítás igen egyszerű abban az esetben, ha a két vetület ugyanazon a forgási ellipszoidon van értelmezve, azonos geodéziai dátummal. Ebben az esetben az első vetület egyenleteiből kiszámítjuk egy adott pont ellipszoidi felületi koordinátáit (földrajzi szélesség és hosszúság), majd ebből, a másik vetület egyenleteiből, számítjuk ugyanazon pont vetületi koordinátáit a másik vetületi rendszerben. Ezt a módszert hívjuk koordináta módszernek a vetületi átszámításoknál.

Sokkal nagyobb a probléma abban az esetben, ha a két vetület alapfelülete nem egyezik meg, vagy más a geodéziai dátum. Ugyanis nincs információnk a két alapfelület egymáshoz képesti helyzetéről (eltolás, elforgatás, méretarány stb.). Ha a koordináta módszert használjuk, akkor (általában térbeli hasonlósági transzformációval), azonos pontok alapján, kapcsolatot keresünk a két alapfelület között és úgy számítjuk át a koordinátákat. Ez tipikusan az az eset, amikor egy „másodfokú egyenlet”-nek tekintjük a forgási ellipszoidot.

A most ismertetésre kerülő megoldás két geodéziai alapfelület között teremt kapcsolatot projektív geometriai összefüggéseket használva. Szeretnénk felhívni a figyelmet, hogy nem geodéziai dátumtranszformációról van szó, csak a különböző alapfelületek egymásnak való megfeleltetéséről.

Két alapfelület egymásnak való megfeleltetéséhez tekintsük a térbeli projektív geometria egyik tételét:

Két különböző tartójú nyaláb metszési alakzata másodrendű felület. (4. ábra)



4. ábra. *Két különböző tartójú nyaláb metszési alakzata*

A 4. ábra magyarázatához vegyünk egy S tartójú sugárnyalábot (egy S ponton áthaladó összes egyenes halmazát), valamint egy T tartójú síknyalábot (a T ponton átmenő összes sík halmazát.

Messük el az S tartójú nyalábot egy S_1 síkkal. Ekkor a sugárnyaláb egy pontmezőt (A, B, …) metsz ki az S_1 síkból.

Messük el a T tartójú síknyalábot egy S_2 síkkal. Ekkor a síknyaláb az S_2 síkból egy sugármezőt (a', b', …) metsz ki.

Létesítsünk az S_1 pontmezője és az S_2 sugármezője között egy projektív korrelációt. (Ezt a síkbeli korrelációk alaptétele alapján megtehetjük anélkül, hogy a két sík térbeli viszonyáról bármilyen ismeretünk lenne).

Ekkor az S_1-beli pontmező bármely P pontján átmenő sugár (SP egyenes) és
a P pontnak megfelelő S_2-beli egyenes, valamint ez és a T pont által meghatározott sík
döféspontja másodrendű felületen helyezkedik el, mely tartalmazza az S és T pontot.

Azaz projektív eszközökkel, egy síkbeli korreláció segítségével rekonstruálhatunk egy másodrendű felületet, 3D-s alakzatot.

Az alapfelületek egymásnak való megfeleltetésénél ennek a tételnek kulcsszerepe van.

Analitikus eszközökkel:

Vegyünk fel egy térbeli, homogén projektív koordináta-rendszert, melyben az

- S pont koordinátái (0,0,0,1),
- a T pont koordinátái (1,0,0,0),
- az S_1 sík koordinátái [0,0,0,1]
- az S_2 sík koordinátái [1,0,0,0].

Amennyiben az S_1 és S_2 sík közötti síkbeli korreláció mátrixa a következő:

$$C = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{bmatrix} \tag{4.1.}$$

akkor

A síkbeli korreláció által meghatározott másodrendű felület mátrixa (mely önmaga is egy térbeli korreláció) a következő:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c_{21} & c_{31} & c_{41} \\ c_{21} & 2c_{22} & (c_{23}+c_{32}) & c_{42} \\ c_{31} & (c_{23}+c_{32}) & 2c_{33} & c_{43} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 \end{bmatrix} [3]. \tag{4.2.}$$

4.1. Az alapfelület projektív rekonstrukciója

Vegyünk fel egy térbeli, homogén, projektív koordináta-rendszert, melynek A4 (0,0,0,1) pontja egybeesik az alapfelület középpontjával, míg az A1(1,0,0,0), A2(0,1,0,0), A3(0,0,1,0) pontjai rendre - az alapfelület által hagyományosan definiált - X,Y,Z koordináta tengelyei végtelen távoli pontjával.

Ekkor az alapfelület által definiált polaritás mátrixa a következő:

$$P = \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2b^2 \end{bmatrix} \quad (4.1.1.)$$

ahol

- a – az alapfelület fél nagytengelyének hossza,
- b – az alapfelület fél kistengelyének a hossza.

Vegyünk fel az alapfelületen két pontot, célszerűen A (a,0,0,1) és B (0,0,b,1).

Definiáljunk egy térbeli projektív kollineációt, mely az A-t az S(0,0,0,1), míg a B-t a T(1,0,0,0) pontba transzformálja. Legyen ez pl. az:

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & a & -ab \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.2.)$$

kollineáció.

Ekkor a P mátrixú másodrendű felület az új bázisban:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2b & -a^2b^2 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ a^2b & 0 & a^2 & 0 \\ -a^2b^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.1.3.)$$

lesz, míg a másodrendű felületet definiáló síkbeli korreláció a következő:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b^2}{2} & 0 \\ a^2b & 0 & \frac{a^2}{2} \\ -a^2b^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.4.)$$

A fenti műveletekkel egy síkbeli projektív korrelációval definiáltuk az eredeti P másodrendű felületet egy új bázisban.

4.2. Az alapfelületek egymásnak való megfeleltetése

Amennyiben két alapfelületet akarunk megfeleltetni egymásnak, a rekonstrukció után már könnyű dolgunk van.

Legyen adva két alapfelület E és F. Feleltessük meg az E alapfelület pontjainak az F alapfelület pontjait, azonos pontok alapján.

Ekkor a 4.1. pontban felsorolt műveletek alapján:

- határozzuk meg az F alapfelület C_F korrelációs mátrixát (4.1.4.).
- Transzformáljuk az E pontjait, az L_E kollineáció segítségével az új bázisba (4.1.2.).
- Transzformáljuk az F pontjait, az L_F kollineáció segítségével az új bázisba (4.1.2.).
- Messük el az S_E tartójú nyalábot a [0,0,0,1] koordinátájú síkkal az új bázisban.
- Messük el az S_F tartójú nyalábot a [0,0,0,1] koordinátájú síkkal az új bázisban.
- Határozzuk meg azt a projektív kollineációt (K), mely összeköti a két pontmezőt (3.2.1.).
- Ezután bármely E-n lévő P_E pont F-en lévő P_F megfelelőjét a következő lépésekkel kaphatjuk meg,
  a. Transzformáljuk a P_E pontot az új bázisba: $L_E P_E = Q_E$

b. Határozzuk meg az $S_E Q_E$ egyenes és a [0,0,0,1] koordinátájú sík metszéspontját, M_E-t.
c. Transzformáljuk M_E-t a K kollineáció segítségével az F-nek megfelelő helyzetbe, M_{EF}-be.
d. A C_F korrelációs mátrix-szal határozzuk meg az M_{EF} pontnak megfelelő egyenes koordinátáit az F alapfelület bázisában, E_{EF}.
e. Határozzuk meg az $S_F M_{EF}$ egyenes és a TE_{EF} sík döféspontját, D_{EF}-t.
f. Ezután az L_F kollineáció inverzével számolható a P_E pont, F alapfelületen lévő megfelelője, P_F, a következőképpen: $P_F = L_F^{-1} D_{EF}$.

A megoldás nem olyan bonyolult, amilyennek látszik, hiszen lineáris algebrai megoldásokkal dolgozik az összes lépésben.

A kulcslépés az algoritmusban, a K kollineáció paramétereinek a meghatározása azonos pontok alapján. A megoldáshoz legalább 4 azonos pontnak kell lennie, ekkor (a kollineációk alaptétele értelmében) egyértelmű a megoldás. Amennyiben négynél több azonos pont van, akkor kiegyenlítéssel lehet a kollineáció paramétereit meghatározni.

A kollineáció paramétereinek becslését a legkisebb négyzetek módszerével végeztük.

A legkisebb négyzetek módszerével történő becslés homogén koordináták alkalmazása esetén bizonyos nehézségekbe ütközik, melyeket legegyszerűbben a homogén koordináták „normálásával” küszöbölhetünk ki.

A jövőben meg kell vizsgálni a robusztus becslések, valamint durva hiba szűrő algoritmusok alkalmazását is.

5. EREDMÉNYEK

A transzformációs eljárás tesztelésére az elsőrendű háromszögelési hálózat pontjait használtuk fel, különböző geodéziai dátumokra vonatkozva. A pontok ellipszoid feletti magasságával nem számoltunk, hiszen az ellipszoidok közötti transzformációt számoltuk ki, így az ellipszoidi földrajzi koordináták (szélesség és hosszúság) voltak a kiinduló adatok.

A különböző geodéziai dátumok, melyekben a pontok adottak:
- Felületi Asztrogeodéziai Hálózat (rövidítve: FAGH, dátum: SV42/58),
- Egységes Asztrogeodéziai Hálózat 1983 (rövidítve: EAGH83, dátum: SV42/83),
- Az 1972. évi Magyar Geodéziai Dátum (rövidítve: HD72, dátum: HD72),
- A nyugat-európai országok egységes háromszögelési hálózata (rövidítve: ED87, dátum: ED87), végül
- Az Európai Földi Vonatkoztatási Keretrendszer 2000 (rövidítve: ETRF2000, dátum: GRS80).

A geodéziai dátumok a következő forgási ellipszoidokat alkalmazzák:

SV42/58, SV42/83 – Kraszovszkij ellipszoid. Paraméterei:
- fél nagytengely (a) hossza: 6 378 245.0 m
- lapultság: 1/298.3

HD72 – IUGG 1967 ellipszoid. Paraméterei:
- fél nagytengely (a) hossza: 6 378 160.0 m
- lapultság: 1/ 298.24716427

ED87 – Hayford 1924 ellipszoid. Paraméterei:
- fél nagytengely (a) hossza: 6 378 388.0m
- lapultság: 1/ 297.0

GRS80 – GRS80 ellipszoid. Paraméterei:
- fél nagytengely (a) hossza: 6 378 137.0.0m
- lapultság: 1/ 298.257222101.

Az összes pont száma dátumonként:
- HD72: 167 db pont
- FAGH: 167 db pont
- ETRF2000: 66 db pont
- ED87: 148 db pont
- EAGH83: 167 db pont

A kollineációs paraméterek becslését a különböző dátumok és ellipszoidok összes variációjára elvégeztük. A transzformáció ellenőrzését természetesen a kiegyenlítésbe be nem vont pontokra végeztük el.

A kiegyenlítést és a számításokat saját fejlesztésű, C programozási nyelven írt, alkalmazással végeztük. Példaként az ED87-ről az ETRS89 dátumra történő kollineáció mátrixa a következőnek adódott:

```
Kiegyenlitett Kollineacios matrix:

1.00000000e+00 -1.87981494e-12 -2.69411406e-12
-5.85055933e+01 9.99980086e-01 -2.55255249e-05
-6.95921423e-01 -3.86467956e-06 9.99982640e-01
```

A kollineációs mátrix elemeinek elemzésénél szeretnénk felhívni a figyelmet, hogy az eredmények nem metrikus, homogén koordinátákra vonatkoznak. Valószínűsíthető, hogy valamilyen metrikus információ is kinyerhető belőlük, azonban ez további kutatást igényel.

Az eredményeket az 1. táblázatban összegeztük.

Az ellentmondásokat az alábbiak szerint számítottuk:

$$d = \sqrt{d_X^2 + d_Y^2 + d_Z^2}$$

ahol:

$$d_X = X_F - X_{EF}$$
$$d_Y = Y_F - Y_{EF}$$
$$d_Z = Z_F - Z_{EF}$$

(X_F, Y_F, Z_F) – az eredeti F alapfelületi pont térbeli derékszögű koordinátái

(X_{EF}, Y_{EF}, Z_{EF}) – az E alapfelületi pont transzformált koordinátái az F alapfelületen.

Tehát a táblázatban szereplő ellentmondások térbeli távolságok.

A transzformáció eredményei a következők:

1. táblázat

Honnan/Hova	Pontok száma a kiegyben	Legnagyobb ellentmondás [cm]	Átlagos ellentmondás [cm]	Legnagyobb ellentmondás [cm] kiegyenlített	Átlagos ellentmondás [cm] kiegyenlített
ETRF2000/HD72	13	30.3	11.5	27.9	11.2
ETRF2000/HD72	56	31.2	10.6	31.2	10.2
FAGH/ETRF2000	13	36.2	14.6	36.2	13.3
FAGH/ETRF2000	56	40.4	13.5	40.4	12.9
FAGH/HD72	13	21.8	5.0	8.6	3.8
FAGH/HD72	56	22.6	4.9	10.2	3.6
FAGH/HD72	134	18.3	4.2	12.6	3.5
FAGH/ED87	13	32.7	7.6	20.0	7.1
FAGH/ED87	56	31.6	7.5	19.0	6.3
FAGH/ED87	134	30.6	7.3	30.6	7.1
FAGH/EAGH83	13	51.7	12.9	19.7	9.5
FAGH/EAGH83	56	48.3	11.6	22.0	8.1
FAGH/EAGH83	134	48.8	11.2	33.6	9.4
EAGH83/HD72	13	36.1	13.4	14.7	10.1
EAGH83/HD72	56	35.9	12.1	22.4	9.2
EAGH83/HD72	134	32.8	11.3	31.2	9.6
EAGH83/ED87	13	33.4	10.1	18.7	9.8
EAGH83/ED87	56	36.2	9.2	26.5	8.7
EAGH83/ED87	134	35.5	9.1	35.5	8.8
EAGH83/ETRF2000	13	34.1	16.5	20.4	13.3
EAGH83/ETRF2000	56	32.8	14.6	32.3	13.8
ED87/HD72	13	30.1	8.7	19.6	7.7
ED87/HD72	56	31.9	8.6	18.7	7.3
ED87/HD72	134	28.6	8.1	28.6	8.0
ED87/ETRF2000	13	31.8	12.3	24.7	9.5
ED87/ETRF2000	56	38.0	11.4	38.0	11.0

Az 1. táblázatot elemezve látható, hogy a kiegyenlítésbe először 13, aztán 56, legvégül 134 azonos pontot vontunk be.

A táblázat 3. és 4. oszlopa tartalmazza a kiegyenlítés előtt, az előzetes értékek alapján számolt ellentmondásokat, míg az 5. és 6. oszlop a kiegyenlített paraméterek alapján számolt ellentmondásokat.

Nagyon érdekes, hogy az előzetes értékek alapján, és a kiegyenlítés után számított legnagyobb ellentmondások között kicsi az eltérés. Azonban a kiegyenlítés hatására az átlagos eltérések jelentősen javultak (ez a legkisebb négyzetek módszerének tulajdonságaiból adódik).

Érdekesség, hogy az előzetes értékek (négy azonos pont alapján) számolt eltérések is közel geodéziai pontosságúak, hiszen egy adott kollineáció (9 paraméter), hazánk egész területére vonatkozik.

Kiegyenlítés nélkül itt a legnagyobb eltérés 51,7cm volt. Érdekes, hogy az FAGH és az EAGH83 dátum között melyeknek a Kraszovszkij ellipszoid az alapfelülete. A legnagyobb átlagos eltérés pedig, ebben az esetben 16,5cm-re adódott, melyet már valóban geodéziai pontosságnak lehet nevezni, kiegyenlítés nélkül, egy paraméterkészlettel, az egész országra!

Érdekes, hogy a legnagyobb ellenmondás a kiegyenlítés után sem csökkent szignifikánsan, mely 40,4cm-re adódott az FAGH és az ETRF2000 dátum között. Az átlagos eltérések azonban csökkentek, melyek közül a legnagyobb 13,8cm-re adódott az EAGH83 és az ETRF2000 között. Ez már valódi, geodéziai pontosság.

6. ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen dolgozatban bemutattuk, hogy a másodrendű felületek projektív geometriai értelmezése segítségével, valódi sík transzformációval hogyan lehet két térképi alapfelületet megfeleltetni egymásnak. Magukkal a vetületekkel nem ugyanis azok matematikai összefüggéseit az alapfelület és a képfelület között adottnak vettük.

A probléma és a megoldás megértéséhez egy rövid, definíciószerű, projektív geometriai összefoglalót is adtunk, hiszen annak összefüggései, törvényei, axiómái nem közismertek az olvasók előtt.

A projektív geometriai összefüggések alapján kidolgoztunk egy algoritmust, mellyel a kitűzött feladatot végre lehet hajtani és mindezt számítógépes szoftverkörnyezetben is megvalósítottuk.

Az algoritmus teszteléséhez az elsőrendű háromszögelési hálózat öt, különböző geodéziai dátumban megadott koordinátáit használtuk fel. A kidolgozott szoftverrendszer mind az öt dátumot, oda-vissza kezeli.

A számítások alátámasztották a kidolgozott algoritmus megfelelőségét, országos szinten legfeljebb deciméteres eltéréseket tapasztaltunk a transzformáció során, melyek így sem érték el a fél métert.

A dolgozatban arra is fel akartuk hívni a figyelmet, hogy egy geometriai probléma, valóban klasszikus geometriai megközelítése, sok esetben meglepő és megfelelő eredményeket tud produkálni. A projektív geometria elemeinek analitikus tárgyalásánál bevezetett homogén koordináták segítségével, egyszerű és mégis hatékony megoldást tudunk találni, akár bonyolult geometriai összefüggések megoldására is.

A homogén koordináták nagyszerűségét talán H.S.M. Coxeter szavaival lehet a legjobban visszaadni:

"A homogén koordináták bevezetése, ami Möbius érdeme, a matematika történetének egyik legnagyobb horderejű gondolata; Leibniz azon ötletéhez hasonlítható, amellyel a differenciálokat alkotta meg, amelyek segítségével a $\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$ egyenletet a $df(x) = f'(x)\,dx$ homogén alakban írhatjuk fel (például $d(\sin x) = \cos x\, dx$)." [1]

7. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A szerző szeretne köszönetet mondani a Lechner Tudásközpont Nonprofit Kft. Kozmikus Geodéziai Obszervatóriuma vezetőjének, Dr. Kenyeres Ambrusnak és Virág Gábornak, az Obszervatórium laborvezetőjének a tesztadatok rendelkezésre bocsátásáért.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

[1] Coxeter Harold Scott Macdonald: A geometriák alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
[2] Lánczos Kornél: A geometriai térfogalom fejlődése. Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1976.
[3] Szász Gábor: Projektív geometria, Egységes jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.