

Tudtuk, csak nem értettük: a topocentrikus kvázi-Descartes koordináta rendszer

We knew we just didn't understand: the topocentric quasi-Cartesian Coordinate System

MOLNÁR Gábor, dr. habil., PhD.

Óbudai Egyetem, Alba Regia Kar, Geoinformatikai Intézet
Székesfehérvár, H-8000, Pirosalma utca 1-3.
molnar.gabor@amk.uni-obuda.hu

Abstract

We usually interpret our immediate environment as a Cartesian coordinate system, but our world is not like that. Just a few hundred meters away, even traditional surveying instruments can detect that the horizontal plane is not planar, and the plumb lines are not parallel.

The main message of the paper is that when we apply Earth's curvature correction and reduction to a reference surface on our measurements, we are no longer in a true Cartesian coordinate system, but in a quasi-Cartesian coordinate system.

The significance of this topocentric quasi-Descartes coordinate system lies in its ability to resolve the contradiction that arises when processing terrestrial laser scanner point clouds. If we apply Earth's curvature correction to the point clouds, the points are transformed in this quasi-Cartesian coordinate system, where the point clouds created from each position can be co-registered using 2D Helmert transformation and can also be transformed into the national projection system using 2D Helmert transformation.

Keywords: Topocentric coordinate system, Earth's curvature correction, Reduction to reference surface, quasi-Cartesian coordinate system.

Kivonat

A közvetlen környezetünket általában egy Descartes féle derékszögű koordinátarendszerként értelmezzük, de a világunk nem ilyen. Mindössze néhány száz métert arrébb menve már kimutatható, hogy a vízszintes nem sík, és a függővonalak nem párhuzamosak. A hagyományos mérőműszereink poláris távolság és szög méréseit mindig derékszögű koordinátákba transzformáljuk, azonban ezek a koordináták nem illeszkednek tökéletesen a világunkhoz. A hagyományos geodézia ezt kétféle korrekcióval kezeli: A trigonometrikus módon meghatározott magasságokat földgörbület (és refrakció) korrekcióval látjuk, a különböző magasságokban mért vízszintes távolságokat pedig az alapfelületre redukáljuk.

A cikk fő üzenete, hogy amikor elvégezzük ezeket a korrekciókat, akkor többé már nem egy valódi derékszögű koordinátarendszerben vagyunk, hanem egy kvázi-Descartes koordinátarendszerben, amiben bár a vízszintes és magassági koordinátavonalak páronként merőlegesek egymásra, de a vízszintes koordinátavonalak nem egyenesek, hanem térgörbék (körívek), amik a Föld görbületét követik, a függőleges koordinátavonalak pedig felfelé haladva széttartanak.

Ennek a topocentrikus kvázi-Descartes koordinátarendszer jelentőségét az adja, hogy segítségével feloldható az az ellentmondás, ami földi lézerszkenneres pontfelhők feldolgozásánál jelenik meg. Ha előírjuk az egyes álláspontokból készült pontfelhők tökéletes illeszkedését, és a szkenner tengelyeinek párhuzamosságát, akkor ellentmondásra jutunk, mert a kettő egyszerre nem teljesülhet. Ha azonban a pontfelhőkön a fent bemutatott korrekciót alkalmazunk, akkor a pontok ebben a kvázi-Descartes koordinátarendszerbe kerülnek, ahol az egyes álláspontokból készült pontfelhők 2D Helmert transzformációval összekapcsolhatóak, és ugyancsak 2D Helmert transzformációval nemzeti vetületi rendszerbe transzformálhatóak.

Kulcsszavak: Topocentrikus koordináta rendszer, Földgörbület korrekció, Alapfelületre redukálás, kvázi-Descartes koordináta rendszer.

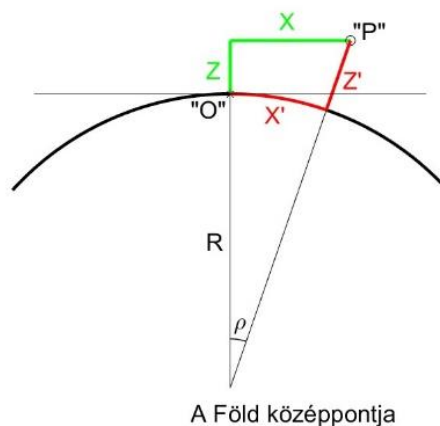
1. BEVEZETÉS

A közvetlen környezetünket általában egy Descartes féle derékszögű koordinátarendszerként értelmezzük, de a világunk nem ilyen. Ha a Föld lapos lenne, akkor a trigonometriai módon meghatározott magasságokat nem kellene a földgömbület (és refrakció) korrekcióval kell ellátnunk, és a különböző magasságokban mért vízszintes távolságokat pedig nem kellene az alapfelületre redukálnunk.

A fenti két korrekcióban a Földet – vagy annak egy darabját – gömbnek tekintjük. Ezt mutatja az 1. ábra, ahol a zölddel jelölt koordináták a valódi topocentrikus Descartes koordináták, az X vízszintes távolság és Z a magasság, amit az „O” pontból mért poláris mérésekből kapunk.

Az ábrán látszik, hogy valójában az X' vízszintes távolságra van szükségünk, mert a „P” pontnak, és minden – ugyanazon a függővonalon – alatta és fölötté levő pontnak, ez a horizontális koordinátája.

A Z' magasság a szintfelülettől mért magasság, amit, ha szintezéssel mérünk, akkor (közelítőleg) közvetlenül megkapunk, azonban a trigonometrikus magasságmérés esetén a földgömbület (és refrakció) hatását korrekcióval vesszük figyelembe.



1. ábra: A topocentrikus valódi Descartes (zöld) és a kvázi-Descartes (piros) koordináták értelmezése

2. A TRANSZFORMÁCIÓ KÉPLETE

A valódi Descartes koordináták és a földgömbületet követő kvázi-Descartes koordináták közötti transzformációt leíró zárt alakú képletek (a Föld gömbbel történő közelítése esetén) az 1. ábráról leolvashatók:

$$X'_{\text{pontos}} = R \cdot \arctan\left(\frac{X}{R + Z}\right)$$

valamint:

$$Z'_{\text{pontos}} = \sqrt{(R + Z)^2 + X^2} - R$$

ahol $R = 6378000 \text{ m}$, a Föld sugara.

Ezek a képletek, a koordinátarendszer középpontjától $X = 5 \text{ km}$ vízszintes távolságig és $Z = 4 \text{ km}$ magasságig az alábbi képletekkel kevesebb mint 1 mm hibával közelíthetők (ezért a továbbiakban ezeket használjuk):

$$X' = X - \frac{X \cdot Z}{R}$$

$$Z' = Z + \frac{X^2}{2 \cdot R}$$

Az első képlet azt adja meg, hogy az álláspontunk vízszintes síkjára vetített mért távolság hogyan transzformálódik a gömbön mért távolsággá. A $Z = 0 \text{ m}$ magasság esetén a képlet pl. $X = 5 \text{ km}$ távolságban 1 mm távolságkülönbséget ad az X és az X' koordináták között [2]. Mivel sok esetben a mért vízszintes távolságaink jóval nagyobbak, mint az előforduló magasságkülönbségek, ezért működik a hagyományos geodézia enélkül a korrekció nélkül. Amennyiben azonban a magasságok összemérhetőek a vízszintes távolságokkal, akkor pl. $X = 80 \text{ m}$ és $Z = 80 \text{ m}$ esetén, ez már 1 mm vízszintes koordinátakülönbséget, $X = 250 \text{ m}$ és $Z = 250 \text{ m}$ esetén pedig 1 cm koordinátakülönbséget jelent majd az X' és X koordináták között [3].

A második képlet a földgömbület hatását szemlélteti, például $X = 112 \text{ m}$ vízszintes távolság 1 mm magasságkülönbséget okoz. A képletben szereplő négyzetfüggvény miatt, ez $X = 1 \text{ km}$ vízszintes távolságon $7,8 \text{ cm}$, de $X = 5 \text{ km}$ -re már közel 2 méter magasságkülönbség jelentkezik a Z' és Z koordináta között! A kapott X' és Z' koordináták az „O” álláspont közvetlen közelében alig különböznek az valódi lokális Descartes féle koordinátáktól, azonban km -es távolságban már észlelhető az eltérés. Először a nagy felbontású fotogrammetria szembesült ezekkel a problémákkal, amikor a néhány száz méteres magasságból készült képeken a pixelméret a cm -es nagyságrendbe csökkent [2].

Bár eddig csak az egyik vízszintes koordináta (X) transzformációját mutattunk be, az eredményeket a másik vízszintes koordinátára is alkalmazhatjuk: az X' képletében az X koordinátát Y -ra cserélve kapjuk az Y' számítását leíró képletet, illetve a Z' képleté kiegészül egy további $Y^2/(2R)$ taggal.

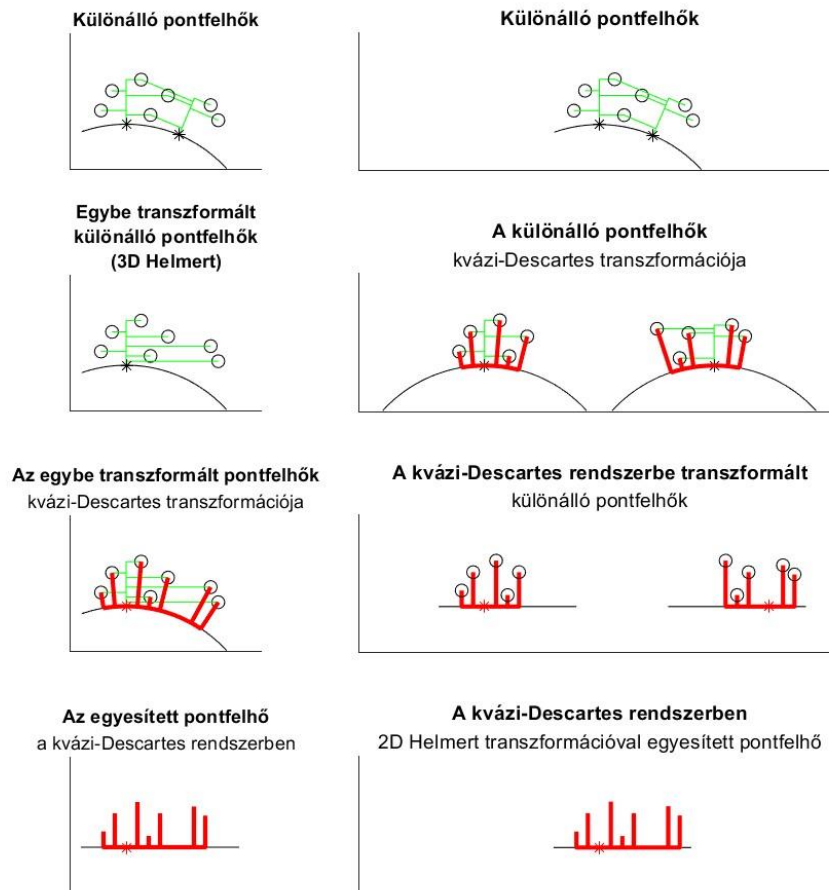
3. EREDMÉNYEK

A bemutatott topocentrikus kvázi-Descartes koordinátarendszer jelentőségét az adja, hogy segítségével feloldható a földi lézerszkenneres pontfelhők feldolgozásánál megjelenő ellentmondás. Ez abban nyilvánul meg, hogy ha előírjuk az egyes álláspontokból készült pontfelhők tökéletes illeszkedését, és a szkennerek tengelyeinek párhuzamosságát, akkor ellentmondásra jutunk, mert a kettő egyszerre nem teljesülhet.

A 2. ábra azt a helyzetet mutatja, amikor két (az ábrán csillaggal jelölt) álláspontból mérünk pontokat, és végül az egész felmért területről mért pontok koordinátáit egyetlen egyesített helyi rendszerben határozzuk meg. Az ábra felső sorában látszik, hogy az álláspontokon a szkennerek függőleges tengelyei nem párhuzamosak [1].

Az említett ellentmondást a 2. ábra második sorban figyelhetjük meg. A bal oldalon azt látjuk, hogy a két pontfelhő egy 3D Helmert transzformációval egymáshoz lett illesztve, úgy, hogy a bal oldali szkennerpozíció rendszeréhez transzformáltuk a jobb oldali pozícióból mért pontokat is, azonban itt a nem írtuk elő a szkennerek tengelyeinek párhuzamosságát. Az ábra jobb oldalán látható, hogy a szkennerek tengelyeinek párhuzamosságát előírva, és csak egymáshoz húzva a két pontfelhőt, a pontok nem illeszkednének tökéletesen egymásra.

Az ellentmondás feloldását szemlélteti a 2. ábra harmadik sora, ahol az ábra bal oldalán az látszik, hogy az egyesített pontfelhőt kell alávetni a kvázi-Descartes transzformációnak, hogy a közvetlen érzékelésünknek megfelelő adathalmazt kapjunk, vagyis az egymás alatt és felett levő pontoknak azonos legyen a vízszintes koordinátája, és a magasságok a referencia szinttől mért magasságot adják meg [5]. A harmadik sorban a jobb oldalon az látszik, hogy a két álláspontból készült, és kvázi-Descartes koordinátarendszerbe transzformált pontok egy egyszerű eltolással (a valóságban egy 2D Helmert transzformációval) fedésbe hozhatóak.



2. ábra: Lézerszkennert pontfelhők egymáshoz regisztrálásának stratégiái. A bal oldali oszlopban a pontfelhőket 3D Helmert transzformációval regisztráljuk össze, majd utána alkalmazzuk a kvázi-Descartes transzformációt, a jobb oldali oszlopban előbb alkalmazzuk az egyes álláspontokból készült pontfelhőkre a kvázi-Descartes transzformációt, majd 2D Helmert transzformációval regisztráljuk össze a pontfelhőket.

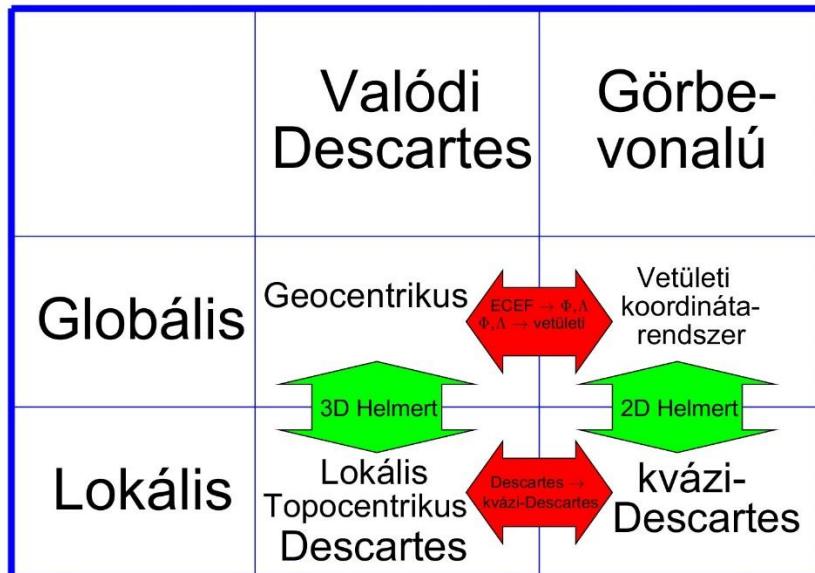
4. DISZKUSSZIÓ ÉS KÖVETKEZTETÉSEK

A 3. ábra mutatja a kvázi-Descartes koordináta-rendszer kapcsolatát a geodéziában előforduló többi koordináta-rendszerrel. A bemutatott koordináta-rendszerek mindegyike derékszögű koordináta-rendszer, abban az értelemben, hogy a koordinátavonalak merőlegesen metszik egymást, azonban a bal oldali oszlopban valódi Descartes féle koordináta-rendszerek vannak, amelyekben a koordinátatengelyek egyenesek. Ilyen globális koordináta-rendszerek például a geocentrikus (vagy ellipszoid-centrikus) koordináta-rendszerek, mint például a WGS84 vagy ETR89 derékszögű rendszerek. Lokális valódi Descartes koordináta-rendszer egy mérési álláspont környezetében a topocentrikus koordináta-rendszer. A kettő között egy 3D Helmert transzformációval lehet áttérni.

Görbevonalú, de derékszögű globális koordináta-rendszer például valamely ország vetületi rendszere, pl. a STEREO70 vagy az EOVS. Bár úgy tűnik, hogy ezek valódi derékszögű koordináta-rendszerek, azonban az a tény, hogy használatuk során hossztorzulás lép fel, (vagyis, hogy bennük nem érvényes Euklideszi távolságot számoló Püthagorasz-tétel), felfedi azt a tényt, hogy nem valódi Descartes-féle koordináta-rendszerek. Ha ezekben a rendszerekben valamely vízszintes és a magassági koordinátát rögzítjük és a másik vízszintes koordinátát változtatjuk, akkor az ellipszoid felszínén, egy térgörbe mentén mozgunk, tehát a koordináta vonalak nem térbeli egyenesek. A vetületi koordinátákat (az adott rendszerhez tartozó ellipszoid) geocentrikus koordinátákból az ellipszoidi koordináták és a vetületi egyenletek közvetítésével kapjuk. Ez a folyamat nem-lineáris lépéseket tartalmaz, ezért nem helyettesíthető egy 3D Helmert transzformációval [4].

Az előző fejezetben láttuk, hogy a topocentrikus Descartes koordinátákból milyen műveletek segítségével kapjuk a kvázi-Descartes koordinátákat. Ezek ugyancsak nem tekinthetők lineáris transzformációknak, mivel bennük a koordináták négyzete (X^2) vagy vegyeszorzata ($X \cdot Z$) szerepel, ezért ezek sem helyettesíthetők 3D Helmert transzformációval.

A 3. ábra fő üzenete, hogy lokális topocentrikus Descartes koordináta-rendszerből nem tudunk ellentmondás mentesen vetületi koordináta-rendszerbe transzformálni. Természetesen, ha a felmérési területünk elég kicsi, akkor a transzformáció hibája kisebb, mint a mérési hiba, akkor nem szükséges a bemutatott transzformációt alkalmazni. Abban az esetben azonban, ha nagy, akár több *km*-es területen akarunk *mm* pontosságú helyi rendszert létrehozni, akkor szükségünk lesz a fentiek figyelembevételére.



3. ábra: A kvázi-Descartes koordináta-rendszer kapcsolata a geodéziában előforduló többi derékszögű koordináta-rendszerrel. Az ábra fő üzenete, hogy lokális topocentrikus Descartes koordináta-rendszerből nem tudunk ellentmondás mentesen vetületi koordináta-rendszerbe transzformálni.

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Cheng, L., Chen, S., Liu, X., Xu, H., Wu, Y., Li, M., Chen, Y.: Registration of laser scanning point clouds: A review. *Sensors* 18(5), 1641 (2018) <https://doi.org/10.3390/s18051641>
- [2] Legat, K.: *Approximate direct georeferencing in national coordinates*. *Photogrammetry and Remotes Sensing* 60, 239–255 (2006)
- [3] Lichti, D., Skaloud, J.: Registration and Calibration. In: Vosselman, G.G., Maas, H.-G. (eds.) *Airborne And Terrestrial Laser Scanning*. Whittles, Dunbeath, Scotland UK (2010)
- [4] Skaloud, J., Legat, K.: Theory and reality of direct georeferencing in national coordinates. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing* 63(2), 272–282 (2008) <https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2007.09.002>
- [5] Ugglá, G., Horemuz, M.: Conceptualizing Georeferencing for Terrestrial Laser Scanning and Improving Point Cloud Metadata. *Journal of Surveying Engineering* 147(2) (2021) [https://doi.org/10.1061/\(asce\)su.1943-5428.0000344](https://doi.org/10.1061/(asce)su.1943-5428.0000344)