

Lokálisegység-illesztett véges rendezett monoidok kanonikus, rigid direkt-rendszer reprezentációja

A canonical rigid direct-system representation of finite local-unit-aligned totally ordered monoids

JENEI Sándor^{1,2}

¹ Eszterházy Károly Katolikus Egyetem, Matematikai és Informatikai Intézet, Magyarország

² Pécsi Tudományegyetem, Matematikai és Informatikai Intézet, Magyarország
jenei.sandor@uni-eszterhazy.hu, jenei@ttk.pte.hu

Abstract

The paper studies finite local-unit-aligned totally ordered monoids. It shows that the local-unit map induces a canonical stratification of the positive idempotent skeleton and yields a rigid finite chain-indexed direct-system representation. In the finite case all proper transition maps are forced to be unit-constant, so the representation becomes an ordinal-sum-like reconstruction by cohesive components.

Keywords: finite totally ordered monoid, local unit, direct system, canonical decomposition, rigidity

Kivonat

A dolgozat véges, lokálisegység-illesztett rendezett monoidok kanonikus felbontását tárgyalja. A fő eredmény szerint a lokálisegység-függvény a pozitív idempotens vázon olyan belső rétegzést határoz meg, amelyből komponens-monoidokból és összekötő homomorfizmusokból álló direkt rendszer definiálható. Véges láncokon e homomorfizmusrendszer rigid: minden nemtriviális összekötő homomorfizmus konstans, a célkomponens egyiségelemét veszi fel. A direkt rendszerből az eredeti algebrai struktúra visszaállítható.

Kulcsszavak: véges rendezett monoid, lokálisegység, direkt rendszer, kanonikus felbontás, rigiditás

1. BEVEZETÉS ÉS CÉLKITŰZÉS

A rendezett monoidok algebrai struktúrák, amelyekben a monoid szorzása és a teljes rendezés egyszerre van jelen, és a művelet mindkét változóban monoton. Megmutatjuk, hogy ez a kettős kötöttség a véges esetben erős szerkezeti korlátokat von maga után, valamint hogy a lokálisegységek fogamára egy teljes reprezentáció-elmélet építhető fel.

A kiinduló osztály a véges lokálisegység-illesztett rendezett monoidok osztálya. Egy ilyen monoidban minden elemhez tekintjük a legnagyobb jobboldali és a legnagyobb baloldali lokális egységet; a feltétel azt mondja ki, hogy ezek egybeesnek: a közös értéket $\tau(x)$ -szel jelöljük. A cikk központi gondolata, hogy a τ -függvény által kirajzolt pozitív idempotens váz elegendő információt hordoz a monoid kanonikus komponenseinek és ezek kapcsolódásának meghatározásához.

A fő eredmény egy Clifford-típusú reprezentációs tétel. Clifford klasszikus munkáiban erős félhálószerű komponensfelbontásra, sőt ordinális összegre épülő konstrukciók jelentek meg egyes rendezett félcsoporthoz. A jelen munka hasonló rekonstrukciós elvet bizonyít véges, rendezett monoidokra, de nem teszi fel a sem a kommutativitást, sem a rendezés természetességét, sem azt, hogy az egységelem a lánc alsó vagy felső végpontja lenne.

A konferencia tematikájához e munka elsősorban az algoritmuselmélet, az adatszerkezetek, a kompjúteralgebra és az oktatás oldaláról kapcsolódik. A vizsgált struktúrák végesek, ezért természetes módon reprezentálhatók szorzótáblákkal, gráfokkal, partíciókkal és láncindexelt adatszerkezetekkel. A kanonikus felbontás algoritmikus normalizálási feladatként is értelmezhető: egy véges szorzótáblából kiindulva meghatározza a τ -leképezést, a pozitív idempotens vázat, a koherens blokkok rendszerét és a rekonstrukcióhoz szükséges komponensadatokat.

2. ALAPFOGALMAK

Egy $\mathbf{M} = \langle M, \leq, \cdot, e \rangle$ algebrai rendszert véges rendezett monoidnak nevezünk, ha $\langle M, \leq \rangle$ véges rendezett halmaz, $\langle M, \cdot, e \rangle$ monoid, és a szorzás mindkét változóban rendezéstartó. Az x elem jobboldali lokálisegységei azok a z elemek, amelyekre $xz \leq x$; bal oldali lokálisegységei pedig azok, amelyekre $zx \leq x$. A véges lánc miatt a ezeknek halmazoknak (ha nemüresek) van legnagyobb elemük. Ha a két maximum minden x -re egybeesik, akkor a monoid *lokálisegység-illesztett*, és a közös maximumot $\tau(x)$ -szel jelöljük.

A $\tau(x)$ elem pozitív idempotens: $e \leq \tau(x)$, továbbá $\tau(x)^2 = \tau(x)$. Ezért $\text{PosId}(M)$, a pozitív idempotensek halmaza, kitüntetett szerepet játszik. Neve a monoid pozitív idempotens váza. A rendezettség miatt a pozitív idempotensek szorzása egyszerű: két ilyen elem szorzata mindig a kettő maximuma. Ez lehetővé teszi, hogy a τ -leképezés értékeit, a pozitív idempotenseket blokkokba rendezzük.

Ha u pozitív idempotens, akkor az u -réteg azokból az x elemekből áll, amelyekre $\tau(x) = u$. Ha A a pozitív idempotensek egy részhalmaza, akkor az A -hoz tartozó réteg a $\tau^{-1}(A)$ halmaz. A cikk bevezeti az A és B blokkok τ -szaturált szorzatát is: ez a $\tau(xy)$ értékek halmaza, amikor x az A -rétegen, y pedig a B -rétegen fut végig.

τ általában nem multiplikatív: csak nagyon speciális posztulátumok mellett teljesül a $\tau(xy) = \max\{\tau(x), \tau(y)\}$ azonosság. A cikk éppen azt mutatja meg, hogyan lehet a globális azonosság hiányát blokk szintű koherenciával helyettesíteni. A reprezentáció tehát nem a ritkán teljesülő multiplikativitási azonosságból, hanem a τ -szorzatok által kialakított legfinomabb partícióból származik.

3. T-STABIL ÉS A T- MULTIPLIKÁCIÓ-KOHERENS FELBONTÁS

Az első kanonikus partíció a τ -stabil partíció. Egy A blokk τ -stabil, ha saját τ -szaturált négyzetének eredménye ismét A . Ez intuitívan azt jelenti, hogy az A -hoz tartozó rétegek szorzatainak lokálisegységei a blokk lokálisegységeiből kerülnek ki. Ezután az A és B blokkokat - mint egy gráf csúcsait - összekötjük éllel, ha van két olyan blokk, melyeknek τ -szorzatai A -ba és B -be is esnek, majd az így keletkezett gráf összefüggő komponenseit egyesítjük. A „minden blokk egyelemű” partícióból kiindulva ennek véges sok iterációja után a $\text{PosId}(M)$ stabil partícióját kapunk. Belátható, hogy az így kapott kanonikus $C_\tau(M)$ partíció a pozitív idempotens váz legfinomabb τ -stabil partíciója. $L_\tau(M)$ a vonatkozó réteg-dekompozíció. Ez a monoid első szintű kanonikus szerkezete.

A második, a reprezentáció szempontjából döntő jelentőségű partíció a τ -multiplikáció-koherens partíció. Egy partíció akkor koherens, ha bármely két blokkjának τ -szaturált szorzatai egyetlen blokkban találhatók. Más szóval a $\tau(xy)$ csak attól függ, hogy x és y mely blokkokban vannak, nem pedig az x és y konkrét értékétől. Ez pontosan a fent említett azonosság kikényszerítése, blokk szinten.

A τ -stabil esethez hasonló egyesítési operátort iterálva a folyamat eredménye a $C_m(M)$ partíció, a pozitív idempotens váz legfinomabb τ -multiplikáció-koherens partíciója. A hozzá tartozó $L_m(M)$ rétegfelbontás lesz a kanonikus direkt-rendszer felbontásának alapja. Belátható, hogy a τ -kohézív felbontás mindig finomítja a τ -multiplikáció-koherens felbontást.

4. KOMPONENS-MONOIDOK ÉS KANONIKUS DIREKT RENDSZER

Ha A a τ -multiplikáció-koherens partíció egy blokkja, akkor a hozzá tartozó M_A réteg nem csupán egy részhalmaz, egy komponens-monoidot hordoz. A komponens egysége mindig a blokk legkisebb eleme, az adott komponenshez tartozó rendezés és szorzás az eredeti monoidból öröklődik; így minden egyes komponens rendezett, lokálisegység-illesztett monoid lesz.

A komponensek között összekötő homomorfizmusok definiálhatóak. Ha A és B blokkok a pozitív idempotens vázban, és A legkisebb eleme kisebb B legkisebb eleménél, akkor az M_A -ból M_B -be menő leképezés az eredeti monoid egy szorzása segítségével adható meg: az M_A -komponens elemeit az M_B -komponens egységével szorozzuk meg, és így kapjuk az M_B -beli képet. Ezek a leképezések monoid-homomorfizmusok, rendezéstartók és teljesítik a direkt rendszer axiómáit.

A kanonikus direkt rendszerből az eredeti monoid visszaállítható. Rendezés definíciója a komponensek diszjunkt unióján a direkt-lexikografikus rendezést alkalmazza: két különböző komponensbeli elem összehasonlításához az alsóbb komponens elemét a felsőbb komponensbe visszük át a megfelelő összekötő homomorfizmussal, ott összehasonlítjuk őket, egyenlőség esetén pedig a lánc rendezése definiálja a két elem viszonyát. Két elem szorzatát a magasabb komponensben számítjuk ki, miután az alsóbb szinten lévő elemet az összekötő homomorfizmussal odavittük.

A rekonstrukciós tétel szerint a kanonikus komponensek és összekötő homomorfizmusok direkt rendszere meghatározza az eredeti monoid rendezését és szorzását. A fenti dekompozíció nem pusztán szemléltető eszköz: a monoid visszaállítható a komponensadatokból. A konstrukció izomorfizmus-invariáns.

5. RIGIDITÁS VÉGES LÁNCOKON

A direkt-rendszeres leírás önmagában még megengedné, hogy a különböző komponensek között nemtriviális átmeneti homomorfizmusok hassanak. A cikk egyik legfontosabb eredménye, hogy véges rendezett halmazon ez nem fordulhat elő. A rigiditási eredmény szerint minden nemtriviális átmeneti leképezés egységkonstans. Vagyis, ha A alacsonyabb komponens, B magasabb komponens, akkor az A -ból B -be menő kanonikus leképezés minden elemet B egységelemébe küld. Ez erős degeneráció: a felső komponens az alsó komponenset csak a saját egységén keresztül látja. A jelenség a véges láncokra jellemző.

A rigiditás következménye, hogy a különböző szinteken fekvő elemek vegyes szorzata elnyelő módon viselkedik. Ha x az alsóbb komponensben, y a felsőbbben van, akkor $xy = y = yx$. Így a direkt-rendszeres reprezentáció a véges esetben ordinális összeghez hasonló konstrukciót válik: a komponenseken belül megmarad a saját szorzás, a komponensek között pedig a magasabb szint dominál.

A végső reprezentációs tétel négy részből áll. Először minden véges lokálisegység-illesztett rendezett monoidhoz kanonikus, egységkonstans direkt rendszer tartozik, amelynek komponensei τ -multiplikációkohézívek. Másodszor minden ilyen egységkonstans direkt rendszerből véges lokálisegység-illesztett rendezett monoid építhető. Harmadszor az eredeti monoid kanonikusan visszanyerhető saját direkt rendszeréből. Negyedszer, ha egy külsőleg adott direkt rendszer komponensei már τ -multiplikációkohézívek (többet nem dekompozálhatóak), akkor a rekonstruált monoid kanonikus felbontása pontosan visszaadja az eredeti komponensfelosztást.

6. EGY PÉLDA ÉS A SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYI JELENTŐSÉG

A lenti példa egy 29 elemű véges monoid Cayley-tábláján mutatja be annak τ -multiplikációkohézív felbontását. A színezett blokkok a komponensekhez kapcsolódó tartományokat jelzik, a táblázat alatti τ -sor megadja az egyes elemek lokálisegységét, alattuk a komponensmonoidok izomorf példányai (sztemerd alaphalmazon, a könnyebb áttekinthetőség kedvéért). A példa szemlélteti a komponensek nemtriviális belső szorzását és a komponensek közötti rigid, elnyelő viselkedést is.

A τ -multiplikációkoherens felbontás algoritmikus szempontból is releváns. Egy véges monoid teljes inputja a Cayley-táblája és a rendezés. Ebből először kiszámítható minden elem τ -értéke, majd a pozitív idempotens váz. Ezután gráf- és partíciófinomítási eljárással meghatározható a τ -stabil és a τ -multiplikációkoherens felbontás. A komponensek és az összekötő homomorfizmusok explicit módon kiolvashatók. Így a cikk matematikai tétele egy adatnormalizáló algoritmus matematikai helyességi háttérét adja: elegendő a kanonikus adatstruktúrát, azaz a komponensmonoidokat tárolni.

A konferencia oktatási aspektusához: a példa egy szemléletes konstrukciót kínál az absztrakt algebra és számítógépes adatrepresentációk között. A monoid axiómái, a monotonitás, az idempotensek, a partíciók és a gráfkomponensek mind véges objektumokon ellenőrizhetők. Ezért a tétel alkalmas arra, hogy diszkrét matematika, algebrai algoritmusok vagy formális módszerek oktatásában például esettanulmányként szerepeljen. A bizonyítások nélkül is jól látható az általános informatikai minta: lokális invariánsokból kanonikus adatstruktúra, és az abból visszanyerhető globális objektum.

7. ÖSSZEGZÉS

A dolgozat fő eredménye, hogy a lokálisegységek kanonikus szervezőelvet biztosítanak véges rendezett monoidokon. A τ -leképezés blokk szintű multiplikatív koherenciája meghatározza azokat a komponenseket, amelyekből a monoid direkt-rendszerként rekonstruálható. A véges eset rigiditása ezt a direkt-rendszert tovább egyszerűsíti: a nemtriviális átmenetek egységkonstansok, ezért a komponensek közötti szorzás ordinális összegszerű, abszorpcióként jelenik meg.

A felbontás kanonikus, izomorfizmus-invariáns és kétirányú. Nem előre megadott komponenseket illeszt össze, hanem a monoid saját szorzása és rendezése alapján állítja elő a komponenseket; ugyanakkor megmutatja, hogy a megfelelő direkt rendszerekből pontosan ilyen monoidok kaphatók vissza. Ez a perspektíva egyszerre kapcsolódik a rendezett algebra hagyományaihoz és a véges struktúrák algoritmikus feldolgozásához.

A kutatást az NKFI K146701 projekt támogatta.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
3	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	
4	1	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
5	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	28	
6	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	27	
7	1	2	3	4	5	6	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	27	
8	1	2	3	4	5	6	6	6	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	27	
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	10	10	10	10	10	17	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
11	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	11	11	11	11	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	11	11	12	13	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
13	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	11	11	13	13	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
14	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
15	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	13	15	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	16	16	16	16	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
17	1	2	3	4	5	6	7	8	9	17	17	17	17	17	17	17	19	19	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	18	18	18	18	18	18	18	19	19	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
20	1	2	3	4	5	6	7	8	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
21	1	2	3	4	5	6	7	8	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	22	23	24	25	26	27	28	
22	1	2	3	4	5	6	7	8	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	23	23	24	25	26	27	
23	1	2	3	4	5	6	7	8	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	24	25	26	27	
24	1	2	3	4	5	6	7	8	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	25	26	27	
25	1	2	3	4	5	6	8	8	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	26	27	
26	1	2	3	4	5	6	8	8	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	27	
27	1	2	3	4	5	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	
28	1	2	4	4	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	
29	1	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	
29	29	28	27	28	27	26	24	26	19	16	15	14	15	14	15	16	16	16	19	20	21	21	23	24	25	26	27	28	

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. ábra. Egy lokálisegység-illesztett véges rendezett monoid Cayley-táblája a τ -sorral, alul a komponensmonoidok; a háttérszínek a kanonikus komponensekhez tartozó tartományokat jelzik

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

- [1] Clifford A. H.: Semigroups admitting relative inverses. *Annals of Mathematics*, 1941, 42, 1037–1049.
- [2] Clifford A. H.: Naturally totally ordered commutative semigroups. *American Journal of Mathematics*, 1954, 76, 631–646.
- [3] Clifford A. H.: Totally ordered commutative semigroups. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1958, 64, 305–316.
- [4] Fuchs L.: *Partially ordered algebraic systems*. Pergamon Press, Oxford, 1963.
- [5] Jenei S.: Group representation for even and odd involutive commutative residuated chains. *Studia Logica*, 2022, 110, 881–922.
- [6] Płonka J.: On a method of construction of abstract algebras. *Fundamenta Mathematicae*, 1967, 61, 183–189.
- [7] Vetterlein T.: Totally ordered monoids based on triangular norms. *Communications in Algebra*, 2015, 43, 2643–2679.