

Érdekességek az analízis tanításának történetéből

Interesting facts from the history of the teaching of mathematical analysis

dr. MUNKÁCSY Katalin

ELTE TTK Matematikai Intézet
<https://www.math.elte.hu/>

Abstract

In my paper, I examine how the role of analysis in mathematics education has changed from the 18th century to the present day. I will show some examples. Initially, the goal was to quickly present the latest scientific findings. It later became a tool for the intellectual development of students. Today, knowledge is important for learning other higher education subjects. What was the role of Hungarian mathematics teachers in shaping modern trends? Is the change in goals followed by a change in teaching methods?

Keywords: history of mathematics, introductory analysis, higher education for non-mathematics students

Kivonat

Írásomban azt vizsgálom, hogyan változott az analízis szerepe az iskolai matematika oktatásban a XVIII századtól napjainkig. Kezdetben a legfrisebb tudományos eredmények gyors bemutatása volt a cél. Később a diákok szellemi fejlesztésének egyik eszköze lett. Ma fontos ismeret más felsőoktatási tantárgyak tanulásához. Mi volt a magyar matematikatanárok szerepe a modern trendek kialakításában? Követi-e a célok változását a tanítási módszerek változása?

Kulcsszavak: matematikatörténet, bevezető analízis, nem matematika szakos felsőoktatás

1. BEVEZETÉS

Az analízis tanításának történetében vannak olyan adatok, amelyek egyértelműek, mindenki által elfogadottak. Ezek azonban kevés magyarázatot kínálnak arra a tényre, hogy az analízis a diákok számára nagyon nehéz, sokan igen gyenge eredményt érnek el. Sikertelenségük akár korai isolaelhagyást okoz. Az analízis tanításának történetét vizsgálva meglepetést okoztak számomra a magyar evangélikus iskolák matematikatanításban elért eredményei a múlt századforduló környékén és az azt követő évtizedekben. Az a feltételezésem, hogy az a szemlélet, amit az akkori gimnáziumok képviseltek, egyik oka volt a híres Fasori Gimnázium diákjai világraszóló sikereinek és egyben oka a mai analízis tanítás problémáinak, nemcsak Magyarországon, hanem világszerte. Szeretnék érveket felsorolni állításom bizonyítására, és abban bízom, hogy ezzel az analízis tanításának kutatásában is új eredmények érhetőek el.

2. AZ ANALÍZIS MEGJELENÉSE AZ OKTATÁSBAN

A Newton és Leibniz által kidolgozott új elmélet, a differenciál- és integrálszámítás a XVIII. és a XIX. században a matematikai kutatások egyik legfontosabb területe lett. Hamar szerepet kapott a tanításban is. A sok ismert adat közül két magyar és egy francia példát említek meg ebből a korai időszakból.

Ezt olvashatjuk Hatvaniról az ATOMKI honlapján megjelent tanulmányban (Gyarmati): „Már 1747-ben megkapta a debreceni eklézsia felkérését a Kollégium matematika, filozófia és kísérleti fizika tanszékére tanárnak. Szilágyi Sámuel levélbeli és J. Chr. Beck szóbeli rábeszélésére vállalta a feladatot. Hogy kellő színvonalon eleget tehessen neki, tanulmányozni kezdte a matematikát nem kisebb tanároknál, mint Johann és Daniel Bernoulli. Orvosi tanulmányai befejeztével Zürichbe látogat, ahol ismeretséget köt az ottani egyetem nevezetes tanáraival.” Fő művében, amelyet elsősorban azért tart számon a tudománytörténet, mert az a matematikai statisztika első magyar megjelenése, Newton tevékenységére természetes módon hivatkozik. Ismertnek tételezi és egyben ismertebbé is teszi a kalkulust.

Kerekgedei Makó Pál

Tudós jezsuita szerzetesként nagy szerepe volt a magyar oktatásügy Mária Terézia által tervezett megújításának. Matematika tankönyvet írt a felsőszintű oktatás számára (Kerekgedei Makó, 1764). Compendiaria-ként ismert műve Szénássy Barna szerint jelentősen hozzájárult az osztrák matematikai műveltség fejlődéséhez. Ebben az analízist a korabeli tudományosság legmagasabb szintjén mutatta be. Ez a korabeli magyar iskolák számára túl nehéz volt. A Műegyetem elődjében, a Institutum Geometrico-Hydrotechnicum-ban Kerekgedei dolgozta ki az első matematika tantervet 1782-ben.

Az analízis tanítása Franciaországban, a XVIII. században

A XVIII. században természetes volt, hogy a matematikusok, és általában a természettudósok egyben a tudományos ismeretek terjesztői is voltak. Például Franciaországban közülük is sokan voltak jezsuita szerzetesek. A munkásságukat bemutató cikkben a szerzők azt is megemlítik, hogy Newton tanainak bemutatásában akkor a francia iskolák késésben voltak, nem alkalmazták a matematikai formalizmust a jelenségek leírásában, mivel a megfigyelésre és a kísérletezésre fordítottak nagy figyelmet (Perru, 2017).

A határérték fogalma, és taníthatósága

Az integrál- és a differenciálszámítás elmélete sok fontos tétellel gazdagodott a következő évszázadokban, kiterjedt pl. a többváltozós függvényekre, a differenciálegyenletekre. Mindeközben folyt az elméleti megalapozás, ennek pedig legfontosabb eszköze a határérték volt. Az angol nyelvű wikipédiát idézem, amely nagyon röviden, a legfontosabb eseményeket kiemelve mutatja be a határérték fogalmának definiálásához elvezető folyamatot. A jelölések megjelenése utal a tartalom egyre mélyebb kidolgozottságára is. Bolzano 1817-ben vezette be az epsilon-delta technikát a folytonos függvény fogalmának definiálására. Cauchy használta a folytonosság definíciójában az infinitézimálisokat, vagyis a végtelen kicsi változás az x esetében végtelen kicsi változást eredményez az y értékében, ami valójában a mai is használt definíció szöveges kifejtése. Weierstrass az epsilon-delta technikát felhasználta a határérték definiálására. Hardy vezetett be a nyilat a limes jelölésében 1908-ban (wikipedia, limit).

Az, ahogyan a matematikusok megoldják a határérték definiálását, majd annak alkalmazását a matematikai problémák megoldására, intellektuális csoda. Ebben a szellemenben kezdték el tanítani a kalkulus (magyarul inkább analízisnek nevezték és nevezik ma is) magyar evangélikus gimnáziumokban. Bemutatták a nagyszerű emberi alkotások egyik változataként, és ugyanakkor a szellemi sportok egy lehetséges formájaként is tekintettek rá. Azok a diákok, akiknek képessége megengedte, hogy elmélyedjenek ebben a témában, különösen hatékony módon fejleszthették matematikai és matematikán kívüli képességeiket.

A többi diáknak miért olyan nehezen tanítható a határérték fogalma?

A határértékekkel összefüggő definíciók, tételek és bizonyítások általában bonyolultak, jól kell ismerni sokféle matematikai technikát. Ennél is nagyobb probléma, hogy kezdők számára nagyon nehezen látható az értelme. Miért fontos nekünk az az egyetlen pont, ahol nincs értelmezve a függvény? És miért kell definiálnunk a folytonosságot? A folytonosság szemléletesen jól látható, ezzel szemben a pontonkénti folytonosságon keresztül vezető, a standard analízisben egyetlen lehetséges út nehezen követhető. A mindenütt értelmezett, de csak egyetlen pontban folytonos függvény létezésének megértése olyan feladat, ami sok diák életét megnehezíti. E nélkül a tudás nélkül viszont a mély technikai részletek tanítása feleslegesnek látszik.

3. AZ ANALÍZIS TANÍTÁSA A XX. SZÁZADBAN

A század elején megindult a gimnáziumi matematikatanítás nemzetközi reformja. Felix Klein volt a munkák irányítója, az európai Nemzetközi Matematikai Reformbizottság (IMUK) vezetőjeként. Beke Manó egy évet Göttingenben töltött, Felix Klein mellett. Megismerkedett a nemzetközi matematikatanítási reformokkal, ottani tanulmányai és hazai tapasztalatai alapján Klein őt bízta meg az analízis tanítási reformbizottság vezetésével. A folyamatok továbbra is párhuzamosan zajlottak itthon és nemzetközi szinten. Megalakult 1906-ban a magyar Matematikai Reformbizottság. Elnöke Beke Manó, titkára Mikola Sándor, egyik és talán legfontosabb, legnevesebb tagja pedig Rátz László volt.

Az analízis tanításának azon korai nemzetközi és magyar előzményei, amelyre ez a bizottság is támaszkodhatott, még nincsenek rendszeresen feldolgozva. A magyar adatok elérése érdemes a Fasori Evangélikus gimnázium fantasztikus sikerei nyomán visszahaladni az időben.

Soproni evangélikus gimnázium, az előd

Témánk szempontjából nagyon fontos a protestáns nevelés. Úgy tűnik, a természettudományos oktatás területén a vizsgált időszakban korszerűbb oktatást nyújtottak, mint az egyéb iskolák. Földesi Katalin kollégánk a Szarvas környéki evangélikus iskolákról gyűjtött adatokat. Az elemi iskolai oktatásra fordított figyelem egyértelműen kiderül a múlt századforduló körüli iskolalátogatási jegyzőkönyvekből.

A XV.-XVI. században 100-nál több soproni peregrináló diákról tud a szakirodalom. Ebből is következtethet, hogy Sopronban 1553-tól létezik protestáns szellemű nevelés. A „XIX. század folyamán volt olyan tanév, amikor 34 vármegye küldte el fiait a soproni alma materbe.”

Az matematikatanításról keveset tudunk. Az Országos Pedagógiai Könyvtárban sikerült megnézni az evangélikus középiskolák tanterveit, tankönyveit. Már az 1800-as évek végén megjelenik néhány utalás az analízisre, de a járvány miatt ezek pontos idézésére most nincs lehetőségem. Érdekes azonban figyelni az iskola tanáira és tanulóira. A soproni evangélikus gimnázium diákja volt Rátz László, aki budapesti, majd berlini és strasbourgi tanulmányok után a Fasori (Budapesti Evangélikus Főgimnázium) gimnáziumban tanított. A soproni evangélikus líceumban tanult Mikola Sándor, aki tanári diplomát a Budapesti Tudományegyetem bölcsészeti karán szerzett matematikából és fizikából. Fizikai kutatásai eredményeként lett akadémikus, és szintén a Fasori gimnáziumban tanított. Jóval később Sopronban tanult Vermes Miklós, aki híres fizikatanárrá vált. A Sopronban kialakult matematikatanítás a Fasorban folytatódott.

Budapesti Evangélikus Főgimnázium

„1823-ban Schedius Lajos akadémikus oktatási elvei alapján indult el gimnáziumunk működése.” - írják a Fasor mai diákjai, követve a pesti iskola építését, annak több korai helyszínét. A „gimnázium 1904-től új, tágasabb épületben”, már a Fasorban található.

A tanulók sokoldalú fejlesztésére törekedtek. A matematikatanítás elsődleges célja is a gondolkodás, a műveltség fejlesztése volt, kevésbé maguknak a matematikai ismereteknek a nyújtása, bár azt is igen fontosnak tartották. Sok olyan módszertani megoldást alkalmaztak, amelyeknek széleskörű megvalósítása még mindig aktuális feladat: a gyerekek korábban megszerzett tapasztalatainak beépítése a matematikai tanulmányokba, a matematika gyakorlati alkalmazhatóságának megmutatása. A Beke Manó irányításával működő reformbizottság „gyakorló iskolája” a Fasor volt. Rátz László tantermi keretek között alkalmazta azokat az elveket, amelyeket a bizottságban fogalmaztak meg.

„A reform elve röviden így fejezhető ki: Legyen a matematika tanítása olyan, hogy a tanulóban fejlődjön annak tudata, milyen fontos kulturális tényező a matematika. ...Nem az a célunk, hogy a technikára és egyéb szakiskolákba menő tanuló nagyobb matematikai ismeretanyagot vigyen magával, hanem hogy éppen azok, akiknek matematikai képzése befejeződik a középiskolában, oly fogalmat kapjanak a matematikáról, amely méltó ehhez a nagy tudományhoz.” (Rátz, 1909)

Ezeket a célokat minden tanuló esetében fontosnak tartották. Ezen túlmenően zajlott az egyéni tehetséggondozás. Itt érettségiztek Wigner Jenő, Neumann János, Harsányi János Nobel díjas tudósok. A matematikai tehetséggondozás az egész országra kiterjedt, és ennek egyik eszköze a középiskolások számára szerkesztett újság volt. A KöMaL-t Arany Dániel indította útjára 1893-ban Győrben, majd Rátz László vette át tőle, aki 1914-ig szerkesztette. Így Rátz László az egész ország összes tehetséges matematikus diákját taníthatta.

Okok és következmények

Feltételezem, hogy ugyanazok sajátosságok okozták a magyar matematikatanítás világraszóló sikereit a múlt század első harmadában, amelyek mostani lemaradásunkat is. Ez a lemaradás az analízis tanítása-tanulása területén különösen éles. A múlt századforduló a hihetelen gyors társadalmi és gazdasági fejlődés korszaka volt Magyarországon. A középiskolákban tanuló diákság száma jelentősen megnőtt, demokratizálódott az oktatás, ugyanakkor mégis megmaradt elit jellege. (A Tanácsköztársaság bukását követően sok egyetemi oktatót a középiskolákba száműzték, ez is hozzájárult a középiskolák színvonalának emelkedéséhez.) Ebben a virágzó korszakban lehetséges is és szükséges is volt a diákok szellemi fejlődését minden korábbinál erőteljesebben elősegíteni. A matematikai tanulmányok ekkor az érettségivel a tanulók többségének befejeződtek, a középiskolai analízis volt egyben a felsőoktatási analízis is. Az évtizedek múlásával a középiskolai oktatás kiszélesedett, már nem csak a tanulni nagyon akaró és arra képes diákokat vették föl ezekbe az iskolákba. A tanári pálya presztízse is csökkent. 1945 után a magyar matematikusok többsége úgy vélekedett, hogy az analízis, benne a határérték és a folytonosság olyan absztrakt fogalmak, amelyek megértéséhez érett gondolkodás szükséges. Így Magyarországon a matematika többi ágaiban javasolták fejleszteni a tanulók gondolkodását, problémamegoldó képességét. Az iskolából kikerült, később orvosná vált, valamint más hivatást választó diákok szerint számukra a matematikatanulás szakmai szempontból is igen hasznos volt, függetlenül attól, hogy később már nem tanultak és használták a matematikát.

Közben nagyot változott a világ. Az analízis szinte minden tudományterületen, a nyelvészettől a biológiáig fontos szerephez jutott, így lényegében minden első éves egyetemi hallgatónak kell analízist tanulnia. Az általános iskolai megalapozást a magyar középiskolai tananyag nem folytatja. A nem emelt szinten érettségiző, nem matematika szakos magyar hallgatókat felkészületlenül éri az egyetemi analízis tananyag. Az IEA vizsgálatok magyar vonatkozásaival mutatom be a helyzet sajátos vonásait (Munkácsy, 1984). Magyarország először 1981-82-ben vett részt az IEA matematika vizsgálatban, ez a második nemzetközi IEA matematika vizsgálat volt. A tagozatos diákok eredménye valamivel jobb lett a hasonló külföldi diákok eredményénél. Az ezt megelőző néhány évben a nem emelt szintű matematika tantervekben is volt analízis, igaz, csak néhány órányi keretben. Az ő eredményük nemzetközi összehasonlításban értelmezhetetlen, hiszen nálunk minden érettségiző vizsgázik matematikából is, máshol viszont ez választható tárgy, tehát csak a matematika iránt érdeklődők kerültek be a nemzetközi mintába. A magyar eredmények, ezen belül az analízis pontszámai természetesen jóval gyengébbek lettek a nemzetközi átlagnál. A finomabb elemzések megmutatták, hogy analízisből a nagyon alacsony magyar analízis óraszám volt a sikertelenség legfőbb oka. Ennek ellenére olyan oktatáspolitikai döntés született, ami nem megemelte az analízis tanítására fordítható óraszámot, hanem törölte a tananyagból ezt a részt, vagyis a deriválást és az integrálást.

A nemzetközi kutatások (Bressoud, 2016) azt mutatják, hogy a többi ország felsőoktatása is hasonló nehézségekkel küzd, az analízis buktató tantárgy, annak ellenére, hogy a középiskolai matematika oktatásnak harmad részét az analízis teszi ki. Úgy tűnik, sem a középiskolai analízis tanítás, sem annak későbbre halasztása nem jelent megoldást a tanítási-tanulási problémákra.

4. ÚJ UTAK AZ ANALÍZIS TANÍTÁSÁBAN

A legradikálisabb megoldás az analízis tanításának megszüntetése a nem matematikus szakokon. Ezen matematikusok szerint vannak sokkal fontosabb és könnyebben tanítható matematikai részterületek, például az adattudomány, érdemesebb arra fordítani a figyelmet. Ezt a szélsőséges nézetet kevesen vallják. Inkább elfogadott tendencia, az analízis klasszikus felépítésben történő tanítása, de úgy, hogy annak minden nehezebb elemét sokféle módszertani megoldással könnyebben tanulhatóvá igyekeznek tenni. Vannak olyan elgondolások, amelyek szerint a hagyományossá vált tananyagot érdemes átszerkeszteni, például deriválás helyett integrálással kezdeni az oktatást. Az említett javaslatok közös vonása, hogy megkerülhetetlennek tartják az analízis tanításának azt a tantervét és módszertanát, amely a múlt századforduló után, magyar matematikusok és matematikatanárok jelentős szerepvállalásával alakult ki.

Kutatócsoportunk, elsősorban Stettner Eleonórával dolgozunk sokat, úgy gondolja, hogy lényeges változtatásokra van szükség (Munkácsy, Stettner, 2019). Másképp kel tanítani az analízist a leendő matematikusoknak (fizikusoknak, mérnököknek), mint a többi hallgatónak. Nem működik az az elgondolás, hogy az analízis szépsége megragadja a diákok érdeklődését, és ők szívesen meg akarnának tanulni olyan elvont gondolatmeneteket, amelyeknek pillanatnyilag nem látják értelmét. Nem is tudnak ebben a tanulásban érdemi segítséget, lényeges könnyítést kapni, hiszen valóban bonyolult és absztrakt gondolatokról van szó. Javaslatunk, aminek részletein dolgozunk, olyan oktatási stratégia, ami konzekvensen épít a tanulók korábbi tapasztalataira és a definíciók és tételek formális kimondása helyett a szükséges fogalmakat szemléletes úton alakítja ki. Utalok arra, hogy a pillanatnyi sebesség már az egészen kicsi gyerekek számára is ismerős. Ez sokkal korábbi tudás, mint az átlagsebesség ismerete, hiszen minden gyerek képes arra, hogy elegendő nagy sebességkülönbség esetén megmondja, hogy melyik jármű haladt el mellette gyorsabban. A megfelelő kifejezések ismerete nélkül, de össze tudják hasonlítani a pillanatnyi sebességeket. Idősebbek számára az érintő fogalom válik fontossá és érdekessé. Csak a szemléletre építve kialakítható olyan érintőfogalom, amelynek terjedelme lényegében ugyanaz, mint a korrekt módon definiált érintő fogalmáé. A deriválás tételei kísérleti úton megfigyelhetők, részben számítógépes applikációkkal. A tanulók ugyanúgy elfogadják és értelmes módon alkalmazni tudják ezeket az összefüggéseket, bizonyítások nélkül, mint például a gömb térfogatának képletét. Ezt követné az elmélet. Elképzelésünk szerint a bevezető analízis axiomatikus felépítésének vázlatos bemutatása a már ismert tények rendszerezése és szükséges mértékű kiegészítése lenne.

5. TOVÁBBI TERVEINK

Szeretnénk részletesen kidolgozott tantervet és módszertant összeállítani. Eddigi tapasztalataink mellett tervezzük, hogy továbbra is sok kollégával konzultálunk. Azt is szeretnénk megismerni, hogy milyen akadályai lennének egy, a hagyományokra is támaszkodó, de új szemléletű analízis oktatásnak.

Irodalom

- [1.] BRESSOUD, D. et al. (2016): A historical perspective on teaching and learning calculus, Springer, https://www.researchgate.net/publication/46700893_A_historical_perspective_on_teaching_and_learning_calculus [accessed May 22 2021].
- [2.] GYARMATI Borbála: Hatvani István, Gyarmati Borbála: Hatvani István (atomki.hu)
- [3.] KEREGEDEI MAKÓ Pál (1764): Compendiaria matheseos institutio, quam in usum auditorum philosophiae elucubratus est.
- [4.] MUNKÁCSY K.- STETTNER E. (2019): Analysis for Non-Mathematician Students, A Student-friendly Calculus, Varga100 conference, (4) (PDF) Analysis for Non-Mathematician Students (researchgate.net)
- [5.] MUNKÁCSY Katalin (1984): Az IEA B populáció matematika eredményei, kézirat, OPI irattár
- [6.] PERRU, Olivier (2017): Teaching sciences during the 18th century: an education in experiment and reasoning, (4) (PDF) Teaching sciences during the 18th century: an education in experiment and reasoning (researchgate.net)
- [7.] RÁTZ László (1909): *A függvények és az infinitezimális számítás elemeinek tanítása középiskoláinkban.* in *A középiskolai matematikai tanítás reformja* (Franklin)
- [8.] SCHUBRING, G. - KÁNTOR T. (2008): Emanuel Beke, The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008) - History of ICMI (unito.it)<https://www.icmihistory.unito.it/portrait/beke.php>

1893-1899 – KöMaL-archívum – 1973-2018 (komal.hu)

A Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium honlapja

Limit (mathematics) - Wikipedia

Rátz László | A múlt magyar tudósai | Kézikönyvtár (arcanum.com)