HAAR Alfréd variációszámítási munkásságáról

Contributions of Alfréd HAAR to Calculus of Variations

ÁCS Tibor emlékére

dr. SZABÓ Péter Gábor

Szegedi Tudományegyetem, Természettudományi és Informatikai Kar,
Informatikai Intézet, Számítógépes Optimalizálás Tanszék
H-6720 Szeged, Árpád tér 2, pszabo@inf.u-szeged.hu

Abstract
Alfréd HAAR (1885–1933) was a famous Hungarian mathematician at the University of Kolozsvár and later, at the University of Szeged. This paper deals with shortly his contributions to calculus of variations and some related Hungarian dissertations.

Keywords: Alfréd HAAR, HAAR's Lemma, Jenő GERGELY, Antal SÓLYI, calculus of variations.

Kivonat
HAAR Alfréd (1885–1933) a kolozsvári majd a szegedi egyetem matematikaprofesszora a 20. század egyik legkiválóbb magyar matematikusa volt. Ebben a dolgozatban a variációszámítással kapcsolatos munkásságát és eredményei utóéletének néhány fejezetét tárgyaljuk röviden.

Kulcsszavak: HAAR Alfréd, HAAR-lemma, GERGELY Jenő, SÓLYI Antal, variációszámítás.

1. BEVEZETŐ GONDOLATOK

HAAR Alfréd 1885. október 11-én született Budapesten, zsidó családban. Édesapja HAAR Ignác földbirtokos, borkereskedő, édesanyja FUCHS Emma. Középiskolai tanulmányait a budapesti evangélikus gimnáziumban végezte, matematikatanára RÁTZ László volt. Remek képességű diák, rendszeres feladatmegoldója a *Középiskolai Mathematikai Lapok*nak. 1903-ban érettségizett, majd díjat nyert az Eötvös Loránd matematikai versenyen. Bizonyára ez a díj is közrejátszott abban, hogy a vegyészmérnöki szakról, ahová először jelentkezett, átiratkozott a budapesti tudományegyetemre, ahol matematikai, fizikai és csillagászati előadásokat hallgatott. Tanárai BEKE Manó, EÖTVÖS Loránd, FRÖHLICH Izidor, KÜRSCHÁK József, RADOS Gusztáv és SCHOLTZ Ágoston voltak.

1905-ben a Göttingeni Egyetemre iratkozott be, ahol Constantin CARATHÉODORY, David HILBERT, Félix Christian KLEIN, Hermann MINKOWSKI, Ludwig PRANDTL, Carl RUNGE, Karl SCHWARZSCHILD, Woldemar VOIGT és Ernst ZERMELO előadásaira és szemináriumaira járt. Tanulmányai után ott előbb tanársegéd lett, majd 1909. június 16-án doktorált David HILBERTnél és pár hónap múlva habilitált is matematikából és matematikai asztronómiából. Ezt követően egy rövid ideig még Göttingenben maradt, majd elment Zürichbe, ahol a műegyetemen lett helyettes tanár. Itt megismerkedett és barátságba került Albert EINSTEINnel is [20].

1912-ben HAARt meghívták a kolozsvári tudományegyetemre, ahol előbb az elemi mennyiségtan nyilvános rendkívüli tanárának, majd 1917-től nyilvános rendes tanárnak nevezték ki. Trianon után a kolozsvári egyetem egy kis ideig Budapesten, majd 1921-től Szegeden folytatta működését. 1922-ben RIESZ Frigyessel itt megalapítják az *Acta Scientiarum Mathematicarum* folyóiratot és ezzel kezdetét vette Szegeden egy máig működő és ható matematikai centrum kialakulása is. 1931-ben levelező tagjává választotta a Magyar Tudományos Akadémia. HAAR fiatalon, 1933. március 16-án hunyt el Szegeden, gyomorrákban. Világhírű tanártársa RIESZ Frigyes [10] és a tudós szegedi rabbi LÖW Immánuel búcsúztatta [15], majd Szegedről Budapestre szállították és a rákoskeresztúri temetőben temették el. Ma is ott, a Kozma utcai izraelita temetőben nyugszik.

Összegyűjtött munkáinak kötete [10] harmincöt dolgozatát sorolja fel, amelyeket magyarul és németül írt, de van egy francia nyelvű publikációja is. Munkássága az alábbi tárgykörökre terjedt ki: halmazelmélet, ortogonális függvénysorok, szinguláris integrálok, analitikus függvények, parciális differenciálegyenletek, variációszámítás, függvényapproximációk, lineáris egyenlőtlenségek, diszkrét csoportok, függvényalgebrák és folytonos csoportok. A matematikában nevét viseli a HAAR-féle függvényrendszer, a HAAR-transzformáció, a HAAR-lemma, a HAAR-tér, a HAAR-mátrix, a HAAR-mérték, a HAAR-integrál és a HAAR-wavelet. Legnevezetesebb eredménye a folytonos csoportokon általa értelmezett mértékfogalom.

HAAR Alfréd nőtlen volt, személyes hagyatékának sorsa ismeretlen. CZEIZEL Endre úgy tudta, hogy HAAR Alfrédnak nem volt testvére és ez alapján rajzolta meg a családfáját. Pedig a *Délmagyarország* 1933. március 21. száma HAAR szegedi búcsúztatása után azt írta, hogy a gyászkocsi mögött az elhunyt professzor *nővére* és az egyetem tanácsa haladt. Ráadásul a családfakutatást segítő internetes oldalak (familysearch) HAAR Alfréd neve mellett feltüntetik egy idősebb nőtestvérét, akiről azt írják, hogy Etelkának vagy Erzsinek hívták. A neve mellett szereplő 1869. október 7-es évszám azonban kételyekre adhat okot, hiszen ha ő is HAAR Ignác és FUCHS Emma gyermeke volt, akkor HAAR Ignácnak körülbelül 12 évesen kellett volna nemzenie a lányát, lévén róla úgy tartják, hogy 1857 körül születhetett Csicsón. Talán ehhez a rejtélyes, E-vel kezdődő keresztnevű hölgyhöz, mint családtaghoz kerülhettek HAAR Alfréd halála után annak iratai.

Egy nemrég készült munkában hat fényképet sikerült róla összegyűjtenem [18]. Levelezésének néhány darabja szórványosan magyar matematikusok hagyatékában itt-ott fellelhető. Évekkel ezelőtt a szegedi BOLYAI Intézet költözködése folytán került elő NEUMANN Jánosnak egy HAARhoz írott levele, amelyet külön dolgozatban ismertettünk HAAR Szegeden fellelhető előadásjegyzeteinek listájával együtt [19]. Ma e levél eredetije bekeretezve a BOLYAI Intézet könyvtárának falát díszíti.

2. A VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS TÖRTÉNETÉRŐL A 20. SZÁZAD ELEJÉIG

A variációszámítás valós funkcionálok (adott függvényosztályon értelmezett függvények) optimalizálásával foglalkozik. A funkcionál az adott függvényosztály minden egyes függvényéhez egy valós számot rendel, ennek keressük a szélsőértékeit, a legkisebb vagy legnagyobb értékét. Például

$$I(x) = \int_a^b x(t)\, dt$$

egy funkcionál, ahol $x(t)$ az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos valós függvény [1].

Habár már az ókorból is találkozhatunk olyan problémával, amely variációszámítási feladatnak tekinthető (lásd DIDO karthágói királynő történetét a római mitológiából, amelyben egy izoperimetrikus problémához vezető feladat szerepel), a téma kutatásának Johann BERNOULLI egy 1696-ban az *Acta Eruditorum*ban felvetett problémája adott igazi lökést. Ez volt a Brachisztochron-probléma (βραχιστος (*brachistos*) „a legrövidebb” és χρονος (*chronos*) „idő”). Képzeljünk el két különböző magasságban, de nem egy függőleges egyenesen elhelyezkedő pontot, amelyeket görbével kötünk úgy össze, hogy a magasabban fekvő pontból egy test a görbe mentén súrlódás nélkül csak a gravitáció hatására mozogjon. Vajon van-e olyan görbe és ha igen, melyik, amelyet a pont minimális idő alatt fut be? – kérdezte Johann BERNOULLI. Az esés ideje itt az alábbi integrállal írható fel:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

Ezt kell minimalizálni, ahol az $y(x)$ függvény összeköti az origót és az (x_1, y_1) pontokat. Hasonló problémát már Galileo GALILEI is vizsgált. A feladatnak van megoldása, és ez a ciklois (az a görbe, amit egy gördülő kör adott pontja ír le az útja során). A feladatra sokáig nem érkezett válasz, de aztán a kitűzőn kívül mások is megoldották: Isaac NEWTON, Jakob BERNOULLI, Gottfried Wilhelm LEIBNIZ, Ehrenfried Walther von TSCHIRNHAUS és Guillaume de L'HÔSPITAL.

A klasszikus problémafelvetés mellett M. A. LAVRENTYEV és L. A. LJUSZTYERNYIK variációszámítási könyvében [14] azzal az általánosítással is találkozunk, amikor a két pont egy vízszintes tengelyen van. Természetesen ilyenkor a test kap egy kezdősebességet. A keresett görbe ekkor egy teljes ciklois. A vizsgált feladatból egy érdekes és elsőre paradox tényre következtetnek a szerzők: *bizonyos esetekben ugyanolyan üzemanyagfogyasztás mellett hamarabb eljuthatunk egyik pontból a másikba egy fel-le hullámzó útvonalon, mintha végig egyenes úton haladnánk.*

A 18. században Leonhard EULER és Joseph Louis LAGRANGE voltak a variációszámítás mesterei, EULERtől származik a variációszámítás elnevezés is egy 1764/66-ban megjelent munkájából. A variációszámítás legegyszerűbb feladata az ún. LAGRANGE-feladat, ahol a kérdés az

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')dx$$

funkcionál minimalizálása az $y(x_0) = y_0$ és $y(x_1) = y_1$ peremfeltételek mellett. Itt a szélsőérték létezésének kérdése egy másodrendű differenciálegyenletre, az ún. EULER–LAGRANGE differenciálegyenletre vezet.

A variációszámítás 19. századi történetéről jó áttekintést ad Andrej Nyikolajevics KOLMOGOROV és Adolf Pavlovics JUSKEVICS kötete [13]. Itt olyan nevekkel találkozunk, mint például Mihail Vasziljevics OSZTROGRADSZKIJ, William Rowan HAMILTON, Carl Friedrich GAUSS, Adrien-Marie LEGENDRE, Carl Gustav Jacob JACOBI, Karl WEIERSTRASS, David HILBERT és mások. Megszületnek olyan klasszikus eredmények és módszerek, mint a LEGENDRE- és a WEIERSTRASS-feltétel, a HAMILTON-elv, a HAMILTON–JACOBI-tétel vagy éppen a DU BOIS–REYMOND-lemma.

3. HAAR ALFRÉD VARIÁCIÓSZÁMÍTÁSI MUNKÁSSÁGÁRÓL

„A variatioszámítás alaptételén – a mennyiben olyan problémákról van szó, a melyekben az ismeretlen függvény csak egy változótól függ – a következő, DU BOIS REYMOND-tól eredő lemmát szokás érteni:

Ha $u(x)$ folytonos függvénye az x-nek az $x_1 \leq x \leq x_2$ intervallumban és ha

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x)\frac{d\zeta}{dx}dx = 0$$

mindazokra a $\zeta(x)$ függvényekre nézve, melyek intervallumunkban folytonosan differentiálhatók és az intervallum határain eltűnnek, akkor $u(x) = const.$" – kezdi HAAR Alfréd az első 1917-ben megjelent variációszámítással foglalkozó dolgozatát [3].

Ezen lemma segítségével könnyen levezethető az EULER–LAGRANGE differenciálegyenlet, és csak azt kell feltételezni hozzá, hogy a megoldás deriváltja folytonos függvény legyen. Viszont HAAR dolgozatáig azzal senki nem boldogult, hogy a kétváltozós esetre anélkül tudjon differenciálegyenletet felállítani, hogy ne feltételezzék, hogy a keresett függvénynek a második deriváltja is létezik. Jacques HADAMARD meg is mutatta, hogy az első variáció eltűnéséből még nem következik a keresett függvény második deriváltjának létezése.

HAAR így folytatja dolgozatát: „Ezek után első pillanatra lehetetlennek tűnik fel egy kettős integrál első variatiojának eltűnését további megszorítás nélkül, differentiálegyenletek segélyével kifejezni; más szóval a megfelelő variatioprobléma megoldására differentiálegyenleteket levezetni anélkül, hogy e megoldás második differentiálhányadosának létezését feltételeznők. Ennek daczára sikerül egy ilyen differentiálegyenlet levezetése és egy olyan tétel segélyével, mely mindenben analog a fent említett DU BOIS REYMOND-féle tétellel s a mely a kétváltozós függvények elméletében ugyanazt a szerepet játssza, mint amaz az egyváltozós függvények körében."

A fenti dolgozatában jelenik meg (egyelőre a kétváltozós esetre) az a híres eredmény, amelyet HAAR-lemmának hívnak. A tétel az eredeti megfogalmazásában a következőképpen szól:

Haar-lemma [3]**:** *Ha $u(x, y)$ és $v(x, y)$ olyan függvényei az x és y független változóknak, melyek egy megadott T tartomány belsejében folytonosak, és ha*

$$\iint_{(T)} \left(u\frac{\partial\zeta}{\partial x} + v\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

mindazokra a $\zeta(x, y)$ függvényekre nézve, melyek e tartomány határán eltűnnek, belsejében pedig x és y szerint folytonosan differentiálhatók, akkor – bármely a T tartomány belsejében fekvő zárt görbét jelöl G – a következő integrál:

$$\int_{(G)} (udy - vdx)$$

értéke zérussal egyenlő. Más szóval a mondott feltételek mellett létezik egy oly $\omega(x, y)$ *függvény, melynek első differentiálhányadosai tartományunkban folytonosak s a mely kielégíti a*

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -v(x, y), \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = u(x, y)$$

egyenleteket.

HAAR Alfréd a fenti dolgozatát németül is megjelentette [4], majd a DU BOIS-REYMOND lemmának egy másik általánosítását is megadta [5]. Külön foglakozott eredményének a PLATEAU-problémában való alkalmazásával [6]. A PLATEAU-probléma a variációszámítás azon nevezetes feladata, ahol meg kell találni egy olyan felületet minimális felszínnel, amelyet egy adott görbe vesz körül a háromdimenziós térben. Nevét a belga fizikusról Joseph PLATEAUról kapta, aki 1849-ben arra jött rá kísérleti úton, hogy a minimális felületet szappanos vízbe merített a határokat jelentő drótvázzal kaphatjuk meg. Az 1930-as évek elején a magyar származású, később Amerikába kivándorolt RADÓ Tibor és tőle függetlenül az amerikai Jesse DOUGLAS bizonyították a minimális felület létezését tetszőleges egyszerű határokhoz. DOUGLAS 1936-ban az eredményeiért FIELDS-érmet kapott. RADÓ 1933-as dolgozatában részletesen ismerteti az addigi eredményeket, sőt rögtön már a cikk első mondatában hivatkozza HAAR idevágó munkáját. HAAR Alfréd a lemmáját használta még reguláris [7] és ún. adjungált variációproblémák tárgyalásában [8] is.

1929-ben HAARt felkérték, hogy a hamburgi egyetemen előadásokat tartson, ahol áttekintette a variációszámítás terén elért saját munkásságát, mások azokhoz csatlakozó vizsgálatait és a további lehetőségeket. Az előadás anyaga később nyomtatásban is megjelent [9]. Érdekes elolvasni ehhez RIESZ Frigyes idevágó 1929 júniusában kelt leveleit is, amelyeket testvérének RIESZ Marcelnek írt, lévén HAARral együtt utaztak Hamburgba [17].

4. GERGELY JENŐ ÉS SÓLYI ANTAL DOKTORI ÉRTEKEZÉSEI

Befejezésül két doktori disszertációt emelünk még ki. Az első GERGELY Jenő kolozsvári matematikus munkája [2], amely HAAR vezetése alatt készült. 1921. november 12-én doktorált vele az akkor már Szegeden működő egyetemen [12]. Munkájában a kettős integrálú variációproblémával foglalkozott változó határgörbével. A kézzel írt 20 oldalas doktori disszertáció elérhető a Szegedi Tudományegyetem Klebelsberg Könyvtárának adatbázisában. GERGELY Jenő idevágó vizsgálatait később idegen nyelven is megjelentette.

A másik disszertáció szerzője a fiatalon elhunyt SÓLYI Antal. Értekezésének tárgya a HAAR-féle variációs lemma és annak alkalmazásai. A dolgozat igen alaposan járja körül a témát, részletezve a kettőnél magasabb dimenziós eseteket is. Több eredményre ad új bizonyítást, köztük HAAR és GERGELY Jenő eredményeit is tovább egyszerűsíti. A disszertáció a *Mathematikai és Physikai Lapok*ban és különlenyomatban is megjelent [16].

5. HAAR ALFRÉD VARIÁCIÓSZÁMÍTÁSI JEGYZETE

Végezetül, érdemes még szólnunk HAAR Alfrédnak a közelmúltban könyv formájában megjelent variációszámítási jegyzetéről [11]. HAAR már az 1910/11-es tanévben német nyelven tartott variációszámítási kurzust. Első dolgozatának eredményeiről 1916-ban előadott a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Osztályán is. Kuriózum, hogy az 1928/29-es tanév *Variációszámítás* című kurzusának jegyzete, egyetlen példányban, Szegeden fennmaradt BUKOVSZKY Ferenc lejegyzésének köszönhetően (HAAR halálakor a tanítványok nevében ő búcsúztatta). 2019-ben ezt a jegyzetet jelentette meg Kolozsváron az Ábel Kiadó FIALOWSKI Alice és VARGA Csaba gondozásában. A kéziratot értelmezte, gépelte és az ábrákat készítette: BÓDIS Tamás. Új, könnyen elérhető forrássá vált így ez a jegyzet olyan vizsgálatokhoz, amelyek feltárhatják a magyar matematika történetének a variációszámításhoz kötődő korai fejezeteit, kezdve azt VÁLYI Gyulától, KŐNIG Gyulán és KÜRSCHÁK Józsefen keresztül HAAR Alfréd munkásságáig.

Irodalmi hivatkozások

[1] DEZSŐ Gábor – LÁZÁR József: *Variációszámítás a fizikában és a technikában*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1988.

[2] GERGELY Jenő: *Kettős integrálú variátióproblémák változó határgörbével*. Doktori értekezés, 1921. http://doktori.bibl.u-szeged.hu/id/eprint/9157/1/doktori_1945_gergely_jeno.pdf

[3] HAAR Alfréd: A kettős integrálok variációjáról, *Mat. Term. Ért.,*1917 35, 1-19.

[4] HAAR, Alfréd: Über die Variation der Doppelintegrale, *J. f. Math.,* 1919*,* 149, 1-18.

[5] HAAR, Alfréd: Über eine Verallgemienerung des Du Bois-Reymond'schen Lemmas, *Acta Sci. Math.* 1922, 1, 33-38.

[6] HAAR, Alfréd: Über das Plateausche Problem, *Math. Ann.*, 1926, 97, 124-158.

[7] HAAR, Alfréd: Über reguläre Variationsprobleme, *Acta Sci. Math*. 1927, 3, 224-234.

[8] HAAR, Alfréd: Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen, *Math. Ann.*, 1928, 100, 481-502.

[9] HAAR, Alfréd: Zur Variationsrechnung. Drei Vorträge gehalten am Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität (23-25. Juli 1929), *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1930, 8 1-27.

[10] HAAR Alfréd *összegyűjtött munkái*: Sajtó alá rendezte: SZŐKEFALVI-NAGY Béla, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.

[11] HAAR Alfréd: Variációszámítás. Egyetemi jegyzet. HAAR Alfréd egyetemi nyilvános rendes tanár előadásai nyomán kézírással jegyezte BUKOVSZKY Ferenc tanárjelölt. Szegedi Tudományegyetem 1928/29-es tanév. Szerkesztette FIALOWSKI Alice és VARGA Csaba. A kéziratot értelmezte, gépelte és az ábrákat készítette BÓDIS Tamás. Ábel Kiadó. Kolozsvár–Pécs, 2019.

[12] KÁSA Zoltán: Negyven éve hunyt el Gergely Jenő matematikus, *Historia Scientiarum*, 2014, 12. http://epa.oszk.hu/03000/03051/00012/pdf/EPA03051_historia_scientarium_2014_12_14-24.pdf

[13] KOLMOGOROV, A.N. – YUSHKEVICH, A. P. (Ed.): *Mathematics of the 19th Century*. Vol. 3., Birkhäuser, Basel, 1998. 197-254.

[14] LAVRENTYEV, M. A. – LJUSZTYERNYIK, L. A.: *Variációszámítás*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1953.

[15] LÖW Immanuel: *Kétszáz beszéd* II, Szeged, Zsidó Hitközség, 1939, 248-249.

[16] SÓLYI Antal: A HAAR-féle variációs lemma és alkalmazásai, *Mat.–Fiz. Lapok,* 1941 48, 285-311. http://real-j.mtak.hu/7297/1/MTA_MatematikaiEsPhysikaiLapok_48.pdf

[17] SZABÓ Péter Gábor: *A matematikus RIESZ testvérek.* Válogatás RIESZ Frigyes és RIESZ Marcel levelezéséből. Magyar Tudománytörténeti Intézet, Budapest, 2010.

[18] SZABÓ Péter Gábor: HAAR Alfréd fényképei, *MATLAP*. (megjelenés alatt)

[19] VARGA Ferencné–SZABÓ Péter Gábor: Elmélkedések egy NEUMANN–HAAR-levél ürügyén. *Polygon*. 2018, XXV. évf., 1. szám, 1-12.

[20] VARGA Antal: 75 éve halt meg HAAR Alfréd, *Polygon*, 2008, XVII. évf., 1-2. sz., 1-10.